

DANIEL MARCEAU

**MODÉLISATION DU CONTACT TRIDIMENSIONNEL
AVEC FROTTEMENT EN GRANDES
TRANSFORMATIONS ET SON APPLICATION À L'ÉTUDE
DES DISPOSITIFS D'ANCRAGE MULTITORONS**

Thèse
présentée
à la Faculté des études supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de Philosophiæ Doctor (Ph. D.)

Département de génie civil
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

OCTOBRE 2001



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-66325-6

Canada



*À la mémoire de mon grand-père
Maurice Girard, Daddy
(1918-2000)*

Résumé court

Au fil des années, l'utilisation de la précontrainte externe est devenue très populaire comme moyen permettant d'éviter le remplacement d'un ouvrage existant, pour des raisons de capacité portante insuffisante ou encore pour la conception de nouveaux ouvrages. Cependant, la grande complexité des dispositifs d'ancrage nécessaires à la mise en tension des câbles, rend d'une extrême délicatesse la détermination de son comportement déformationnel. La nature tridimensionnelle du problème, jumelée au suivi de l'évolution des conditions de contact et de frottement aux diverses interfaces ainsi qu'à l'apparition de déformations permanentes dans le bloc d'ancrage au cours de la mise en tension des câbles en font un problème de grande taille fortement non linéaire. Cette thèse présente la mise au point d'un modèle permettant la bonne représentation du problème de contact tridimensionnel avec frottement en grandes transformations et l'application de ce dernier dans le cadre d'une étude du comportement déformationnel des dispositifs d'ancrage multitorons. Une spécialisation du modèle a également été considérée afin de permettre une représentation adéquate du comportement à l'interface toron-mors d'ancrage. Inhérent à l'ensemble des difficultés relatives à la résolution d'un tel problème, on propose, en particulier, la résolution du système linéarisé à l'aide de méthodes itératives ainsi qu'une reconstruction systématique de la matrice tangente globale basée sur la modification de la définition d'un élément de contact. L'ensemble des développements ont été effectués dans le cadre d'une mise en œuvre informatique orientée objet, permettant ainsi l'encapsulation de la gestion du problème de contact avec frottement. Plusieurs exemples de validation ont été présentés afin d'illustrer les performances du modèle. Finalement ce dernier a été utilisé dans le cadre d'une étude comparative de trois dispositifs d'ancrage multitorons ainsi que pour la détermination des paramètres associés à la loi de comportement spécialisée à l'interface toron-mors d'ancrage à l'aide d'une technique de calage par réseaux neuromimétiques en utilisant des résultats expérimentaux obtenus sur un dispositif monotoron.

Résumé

Depuis plusieurs années, la précontrainte externe jouit d'une grande popularité, quant à son utilisation comme moyen permettant d'éviter le remplacement d'un ouvrage existant, pour des raisons de capacité portante insuffisante ou encore pour la conception de nouveaux ouvrages. Cette situation a inévitablement poussé les sociétés œuvrant dans le domaine de la précontrainte à offrir toute une gamme de dispositifs d'ancrage, chacun se distinguant par ses propriétés géométriques, mécaniques ainsi que par son procédé de mise en tension. Malgré des critères de conception sévères, certains dispositifs d'ancrage ont néanmoins subi des déformations excessives en quelques occasions, et certains se sont même rupturés sous l'effet des charges de service. De plus, la venue de nouveaux matériaux tels les fibres de verre, d'aramide et de carbone dans le domaine de la précontrainte, a incité ces mêmes sociétés à concevoir de nouveaux dispositifs d'ancrage plus résistants ainsi qu'à réévaluer les dispositifs existants afin de vérifier leur utilisation potentielle avec ces torons à très haute performance.

Dans de tels dispositifs, la difficulté d'une modélisation adéquate se traduit principalement par la bonne représentation du transfert des efforts entre les diverses composantes. La nature tridimensionnelle du problème, jumelée au suivi de l'évolution des conditions de contact et de frottement aux diverses interfaces ainsi qu'à l'apparition de déformations permanentes (élastoplastiques) dans le bloc d'ancrage au cours de la mise en tension des câbles en font un problème de grande taille fortement non linéaire. L'objectif de ce projet de thèse porte donc sur la modélisation du problème de contact tridimensionnel avec frottement en grandes transformations et l'application de ce dernier dans le cadre d'une étude du comportement déformationnel des dispositifs d'ancrage multitorons utilisés pour la mise en tension des câbles de précontrainte.

Inspirée des travaux de Simo et Laursen, la modélisation des interfaces de contact, établie sur le milieu continu, a permis d'obtenir une écriture indépendante de l'aspect discrétisation spatiale et par le fait même, une perspective d'implémentation informatique beaucoup plus générale qu'une formulation établie sur le milieu discret. On y présente l'ensemble des détails relatifs à l'écriture d'une cinématique exprimée dans la base convective, permettant ainsi, une représentation objective de la loi de frottement en présence de grandes transformations. Compte tenu de la nature générique du modèle anticipé, on présente l'ensemble des variations et linéarisations nécessaires à l'établissement du résidu et de la matrice de rigidité tangente consistante associée au problème de contact avec frottement. De ce modèle général, on propose également une spécialisation, dans le but de permettre une modélisation adéquate du

comportement à l'interface toron-mors d'ancrage. Basée sur des observations expérimentales, la loi de comportement développée a permis, entre autres, de reproduire la pénétration des encoches présentes sur les clavettes dans le toron à l'aide d'une loi hyperbolique. Les variations et linéarisations inhérentes à cette spécialisation ont également été présentées en détail.

Après avoir effectué une revue exhaustive de l'ensemble des difficultés relatives à la résolution d'un tel problème, des suggestions ont été faites afin d'en améliorer les divers aspects soit la convergence, l'espace mémoire ainsi que les temps de calcul. Pour les problèmes de grande taille, on suggère, entre autres, une résolution du système linéarisé à l'aide de méthodes itératives ainsi qu'une reconstruction systématique de la matrice tangente globale lorsqu'apparaît une modification des éléments maîtres associés à l'ensemble des projections d'un élément esclave. On s'est ensuite attardé à la présentation des opérations jugées les plus critiques inhérentes à l'évaluation des contributions associées à un élément de contact ainsi que la détermination du point de projection d'une particule esclave sur la surface maître. Entre autres, le passage d'une particule esclave sur un nouvel élément maître, la mise en contact ainsi que l'indétermination du point de contact ont été traités en détails. Dans le cadre de la mise en œuvre informatique, on présente le développement d'un module indépendant permettant une gestion intégrale du problème de contact et de frottement.

Plusieurs exemples ont été présentés afin de permettre la validation du modèle développé, mais aussi, afin de démontrer l'aptitude, les performances ainsi que les limites du modèle proposé. Entre autres, on a pu faire ressortir l'influence du type de non-linéarité sur le comportement de divers préconditionneurs lors de la résolution du système linéarisé. Également, la factorisation sélective en phase d'augmentation (utilisation d'une méthode de lagrangien augmenté) permet une diminution importante du temps de calcul.

Le modèle développé a par la suite été utilisé dans le cadre d'une étude du comportement déformationnel de trois dispositifs d'ancrage multitorons. Les dispositifs ont été soumis à des conditions de mise en charge correspondant aux limites d'utilisation à l'ultime et les résultats obtenus ont été comparés afin de vérifier leurs tenues en service. Entre autres, cette étude a permis de constater que le dispositif CS 6-31 du procédé CS de la société VSL était celui possédant le meilleur comportement en service. En contrepartie, aucun des dispositifs à l'étude n'est apte à être utilisé au delà de cette limite. Finalement, on a procédé à la détermination des paramètres associés à la loi de comportement spécialisé à l'interface toron-mors d'ancrage, en jumelant une séquence d'analyses par éléments finis sur un dispositif d'ancrage monotoron à une technique de calage par réseaux neuromimétiques. Les résultats de ce calage ont permis de déterminer complètement l'effet du système toron-mors d'ancrage sur le bloc d'ancrage et de permettre, par le fait même son utilisation dans le cadre d'une analyse sur un dispositif d'ancrage multitorons complet.

Abstract

For several years, external prestressing has enjoyed a great popularity both in new and existing works, for it increases significantly their bearing capacity. In some instances, it has even avoided the replacement of superseded works. As a result, companies working in this field offer a whole range of anchorage mechanisms, each with their unique geometrical and mechanical characteristics. In spite of severe design criteria, a few mechanisms nevertheless underwent excessive deformations, some of them even collapsing under service loads. Moreover, new materials such as fiber glass, aramide and carbon fibers made these companies revisit their devices to evaluate their potential use with these very high performance strands.

The modeling of such mechanisms is complicated by the difficulty of representing adequately the load transfer between their various components. The three-dimensional nature of the problem, the change in frictional contact conditions on the interfaces, as well as the development of permanent (plastic) deformations in the anchor block during the tendons tensioning lead to a strongly nonlinear problem. This project thus involves the modeling of the three-dimensional frictional contact problem in the framework of finite strain and finite sliding, then its application to the deformational behavior study of the multi-strands anchorage mechanism used for prestressing.

Inspired by the work of both Simo and Laursen, the modeling of the contact interfaces is established on the continuum. Hence, a formulation independent of the spatial discretization is obtained, leading to a much more general numerical implementation than a formulation established on the discrete medium. The related kinematics as expressed in the convected basis are presented in details, allowing an objective representation of the frictional law in a large transformation context. Also, the variational aspects and the required linearizations for the computation of the residual vector and the consistent tangent matrix associated with the frictional contact problem are discussed in details. This general model is then specialized to the strand-wedge interface by using an hyperbolic representation ; this law allowed, inter alia, to reproduce the penetration of the notches present on the wedge observed experimentally. The variational aspects and linearizations inherent to this specialization are also explained in details.

After an exhaustive review of the difficulties relating to the resolution of the three-dimensional frictional contact problem, suggestions are made in order to improve convergence, memory usage and computation time. For large scale problems, the resolution of the linearized

system using iterative methods and the systematic rebuilding of the global tangent matrix whenever any of the list of master elements, associated with the projections of the slave elements, is modified is proposed. The most critical operations inherent to the evaluation of a contact element contributions and to the determination of a slave particle projection point on a master surface are then discussed. In particular, the transition of a particle slave onto a new master element, the initial contact establishment as well as the indetermination of projection point are treated in details. The development of an independent software module managing completely the numerical frictional contact problem is also presented.

Several examples are used to validate the model, but also to show its strengths and its capabilities, to evaluate its performance as well as to expose its limits. In particular, the influence of the type of non-linearity on the behavior of various preconditionners and on the computation time needed for the resolution of the linearized system is emphasized. However, selective factorization during the augmentation phase (use of an augmented Lagrangian technique) provides a significant reduction of computation time.

Finally, the developed model was used to analyze the deformational behavior of three multi-strands anchorage mechanisms. The devices were subjected to loading cases corresponding to their operational and ultimate limits and the obtained results were compared. Among the studied devices, VSL International's CS 6-31 shows the best behavior in service. Yet, none of them would be safe beyond the operational limit. The parameters associated with the specialized law at the strand-wedge interface were calibrated using artificial neural networks learning from finite elements analysis results of mono-strand anchorage mechanism simulations. The effect of the particular strand-wedge system on the anchorage mechanism was then fully determined, therefore allowing the analysis of a complete multi-strands anchorage device.

Avant-propos

Le travail de recherche présenté dans cette thèse a été réalisé au sein du département de génie civil et du GIREF de l'Université Laval, Québec, Canada.

Il importe de noter que ce travail n'aurait été rendu possible sans le soutien financier du Ministère des Transports du Québec (MTQ), du Fond pour la formation des chercheurs et l'aide à la recherche du Québec (FCAR) ainsi que du Conseil national de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada (CRSNG). L'auteur fut d'ailleurs boursier de ces deux organismes dans le cadre de ses études doctorales.

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à mon directeur, le Professeur Mario Fafard pour l'ensemble de ses conseils ainsi que les encouragements qu'il m'a généreusement prodigués tout au long de la réalisation de ce travail. Malgré ses multiples charges, il a toujours su montrer une entière disponibilité et une grande attention à ce travail de recherche.

Je tiens également à remercier ma codirecteure, la Professeure Josée Bastien pour l'ensemble des discussions techniques relatives à l'étude expérimentale et numérique des dispositifs d'ancrage. On notera que Mme Bastien m'a de plus offert l'opportunité d'éprouver le modèle développé par l'entremise d'un contrat de recherche avec la société VSL International Ltd.

Toute ma reconnaissance va aux Professeurs Jean-Louis Batoz de l'Université de Technologie de Compiègne, Michel Fortin de l'Université Laval et Augustin Gakwaya, du département de génie mécanique de l'université Laval pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant d'être membres du Jury.

Je tiens également à réitérer mes remerciements au Professeur Batoz pour son accueil dans le cadre d'un stage d'une période de quatre mois que j'ai effectué au sein des laboratoires de l'UTC à l'hiver 1994. Encadré par les Professeurs Jean-Marc Roeland et Gouri Dhatt, ce stage m'a été très enrichissant en permettant de me familiariser d'avantage avec les aspects théoriques et mise en œuvre informatique reliés à la modélisation des grandes transformations.

Je tiens également à témoigner de ma profonde gratitude au GIREF, dirigé successivement par les Professeurs Michel Fortin et André Fortin; le Centre m'a été d'un grand apport scientifique et m'a permis de mettre un terme à ce projet au sein d'un environnement de travail efficace. Mes remerciements vont également à l'ensemble de mes collègues du GIREF pour

l'ambiance qui a toujours régné aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur du centre. En particulier, Jean-Jacques, Carl, Éric et Cristian pour les nombreuses discussions que nous avons eu lors du développement de Contacta. Soyez assurés, chers collègues, que ces discussions m'ont été très enrichissantes et constructives.

Un remerciement tout spécial va également à la compagnie Pratt & Whitney Canada et en particulier, à Monsieur Charles Melançon pour l'opportunité qu'il m'a offert, en mandant l'Université Laval afin que je procède à une première implémentation de la technologie développée dans le cadre de cette recherche dans leur logiciel interne d'analyse par éléments finis. Il s'agit là de l'aboutissement ultime d'un projet de recherche universitaire et l'auteur en est d'ailleurs très fier.

Finalement, j'aimerais tout particulièrement remercier ma compagne de toujours, celle qui a su me soutenir, m'encourager et surtout me supporter lors des moments difficiles. À ma très chère amie et épouse, Louise, je dis merci du fond du cœur. Je remercie également mes deux grandes filles, Myriam et Naomi, ainsi que le petit dernier, Olivier, qui ont su grandir avec un père omniprésent et qui n'était pas toujours là aux moments opportuns. Vous m'avez tous donné la force et le courage de compléter un projet qui me tenait à cœur.

Table des matières

Résumé court	i
Résumé	ii
Abstract	iv
Avant-propos	vi
Table des matière	xiii
Liste des figures	xviii
Liste des tableaux	xx
Liste des algorithmes	xxi
1 Introduction	1
1.1 Généralités	1
1.2 Problématique	3
1.3 État actuel des connaissances	7
1.3.1 Dispositifs d'ancrage multitorons	7
1.3.2 Problème de contact avec frottement	10
1.4 Objectifs et contenu de la thèse	14
1.5 Aspects originaux	16

2	Formulation tridimensionnelle des équations...	18
2.1	Généralités	18
2.2	Description des grandes transformations	18
2.2.1	Cinématique d'un point matériel	19
2.2.1.1	Description géométrique du champ de déplacement	19
2.2.1.2	Mesures de déformation	21
2.2.1.3	Expression du taux de variation de la déformation	23
2.2.2	Cinétique au voisinage d'un point matériel	25
2.2.2.1	Description du tenseur des contraintes	25
2.2.2.2	Équilibre du milieu déformable	27
2.3	Écriture de la loi de comportement	28
2.3.1	Objectivité des quantités tensorielles	28
2.3.2	Principe de l'indifférence matérielle	30
2.3.3	Loi de comportement élastoplastique	30
2.3.3.1	Contexte d'utilisation de la loi	31
2.3.3.2	Description vectorielle de la loi	32
2.3.3.3	Spécialisation au critère de von Mises	33
2.4	Principe des travaux virtuels (PTV)	34
2.4.1	Expression de la forme intégrale	35
2.4.2	Taux de variation de la forme intégrale	36
3	Formulation du problème de contact tridimensionnelle...	39
3.1	Généralités	39
3.2	Notation utilisée	40
3.3	Cinématique d'une particule candidate au contact	42
3.3.1	Définition de la fonction écart	44
3.3.2	Définition de la base convective	45

3.3.3	Expression du champ de vitesses relatives	47
3.3.4	Écriture des mesures de déformation	48
3.4	Conditions d'admissibilité	49
3.4.1	Condition de contact unilatéral	50
3.4.2	Introduction de la loi de frottement	51
3.4.3	Régularisation des conditions d'admissibilité	53
3.5	Formulation et linéarisation du travail virtuel associé	55
3.5.1	Expression de la forme intégrale	56
3.5.2	Linéarisation de la forme intégrale	57
3.6	Spécialisation au cas de l'interface toron-mors d'ancrage	58
3.6.1	Comportement à l'interface toron-mors d'ancrage	58
3.6.2	Présentation du modèle proposé	59
3.6.2.1	Cinématique à l'interface toron-mors d'ancrage	60
3.6.2.2	Conditions d'admissibilités	62
3.6.2.3	Expression et linéarisation du PTV	64
4	Discrétisation des équations d'équilibre...	66
4.1	Généralités	66
4.2	Discrétisation temporelle	67
4.2.1	Loi de comportement élastoplastique	67
4.2.1.1	Approximation de la cinématique sur le pas	68
4.2.1.2	Méthode du retour radial	69
4.2.1.3	Évaluation du module tangent consistant C_{ep}	71
4.2.2	Loi de frottement de Coulomb	72
4.2.3	Spécialisation à l'interface toron-mors d'ancrage	74
4.3	Discrétisation spatiale par éléments finis	75
4.3.1	Mécanique en grandes transformations	77

4.3.2	Problème de contact avec frottement	79
4.3.2.1	Évaluation du terme R_c^k	82
4.3.2.2	Évaluation des termes $K_{c_N}^k$ et $K_{c_T}^k$	83
4.3.3	Spécialisation à l'interface toron-mors d'ancrage	85
4.4	Expression de la forme globale discrétisée	86
5	Résolution numérique du système discrétisé	88
5.1	Généralités	88
5.2	Présentation du contexte de résolution	89
5.2.1	Difficultés de convergence	91
5.2.2	Mémoire requise et temps de calcul	93
5.3	Description de la stratégie proposée	98
5.3.1	Modification du contexte de résolution	98
5.3.2	Opérations sur la base d'un point d'intégration	107
5.3.2.1	Évaluation des contributions R_c^e et K_c^e	107
5.3.2.2	Détermination du point de contact	108
5.4	Mise en œuvre informatique et logiciels utilisés	112
5.4.1	Définition structurée à l'interface de contact	115
5.4.2	Logiciels utilisés	118
6	Validation du modèle numérique	124
6.1	Généralités	124
6.2	Poutre courte en grandes transformations	124
6.3	Problème de Hertz	132
6.4	Blocs en compression	139
6.5	Glissement d'un bloc sur une plaque	148
6.6	Formage d'une tôle mince	157

7 Étude des dispositifs d'ancrage multitorons	166
7.1 Généralités	166
7.2 Étude comparative de trois dispositifs d'ancrage	167
7.2.1 Description des dispositifs	168
7.2.1.1 Propriétés géométriques	168
7.2.1.2 Propriétés mécaniques	172
7.2.2 Mise en charge des dispositifs	174
7.2.3 Analyses par éléments finis	175
7.2.4 Résultats obtenus et discussion	184
7.3 Étude paramétrique à l'interface toron-mors d'ancrage	197
7.3.1 Description du dispositif d'ancrage	205
7.3.2 Résultats expérimentaux	207
7.3.3 Description de la stratégie proposée	209
7.3.3.1 Analyses par éléments finis	209
7.3.3.2 Calage des paramètres et discussion	214
8 Conclusion	222
8.1 Rétrospective et conclusions	222
8.2 Recommandations	227
Bibliographie	235
A Méthode de décomposition polaire...	236
A.1 Généralités	236
A.2 Expression du tenseur des déformations pures	236
A.3 Définition de l'expression $(\mathbf{C} + \mathcal{I}\mathcal{I}_U\mathbf{I})^{-1}$	237
A.4 Expression des invariants de \mathbf{U} en fonction des invariants de \mathbf{C}	238

B	Détails relatifs à l'écriture du PTV...	240
B.1	Généralités	240
B.2	Évaluation de la variation des vecteurs de base	240
B.2.1	Évaluation des vecteurs $\delta \tilde{\tau}_\alpha$	241
B.2.2	Évaluation du vecteur $\delta \tilde{n}$	242
B.3	Évaluation du terme δg	244
B.4	Évaluation du terme $\delta \tilde{\xi}^\alpha$	246
B.5	Évaluation du terme Δt_N	247
B.6	Évaluation du terme $\Delta(\delta g)$	248
B.7	Évaluation du terme $\Delta(\delta \tilde{\xi}^\alpha)$	249
B.8	Évaluation du terme $\Delta t_{T_{\alpha_t + \Delta t}}$	251
B.8.1	Linéarisation sans glissement	252
B.8.2	Linéarisation avec glissement	252
B.9	Linéarisation à l'interface toron-mors d'ancrage	256
C	Utilisation d'une méthode de lagrangien augmenté...	258
C.1	Généralités	258
C.2	Prise en compte des multiplicateurs de Lagrange	259
C.3	Répercussions sur la forme variationnelle	260
D	Résolution du problème de projection...	262
D.1	Généralités	262
D.2	Mise en équation du problème de projection	262
D.3	Résolution du problème de projection	264

Liste des figures

1.1	Problèmes présentant des zones de contact	2
1.2	Construction d'un pont à l'aide de la précontrainte extérieure	4
1.3	Présentation d'un dispositif d'ancrage multitorons	5
1.4	Rupture d'un dispositif d'ancrage multitorons	6
1.5	Distinction entre système toron-mors d'ancrage et plot tronconique	9
2.1	Définition des configurations C_0 et C_t	20
2.2	Différentiation de la fonction φ au voisinage du point P	21
2.3	Décomposition polaire du tenseur \mathbf{F}	23
2.4	Facette de normale \underline{n} dans C_t	26
2.5	Représentation schématique d'un solide à l'équilibre	28
2.6	Définition de la configuration relâchée	31
2.7	Courbe contrainte-déformation	34
3.1	Notation utilisée pour le problème de contact avec frottement	41
3.2	Paramétrisation des surfaces Γ_c^2 et γ_c^2	43
3.3	Représentation schématique de la fonction $g(\underline{X}^1, t)$	44
3.4	Représentation des vecteurs de base \underline{E}_α et \underline{e}_α	45
3.5	Représentation du champ de vitesse à l'interface de contact	48
3.6	Représentation du vecteur des contraintes nominales \underline{t}^1 à l'interface	51
3.7	Représentation des lois de contact et de frottement	53

3.8	Représentation des lois de contact et de frottement régularisées	55
3.9	Représentation schématique des lois d'action et réaction	56
3.10	Représentation schématique du comportement au voisinage d'une encoche . . .	60
3.11	Représentation géométrique à l'interface toron-mors d'ancrage	61
3.12	Représentation de la loi normale spécialisée à l'interface toron-mors d'ancrage	63
4.1	Intégration implicite de la loi de comportement sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$. . .	70
4.2	Intégration de la loi de frottement de Coulomb sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$. . .	73
4.3	Discrétisation du milieu continu par éléments finis	76
4.4	Discrétisation spatiale à l'interface de contact	81
5.1	Exemple de glissement d'un bloc sur une surface rigide	92
5.2	Représentation des discontinuités géométriques	94
5.3	Élément de contact défini selon différentes densités de maillage de la frontière maître	95
5.4	Mémoire requise selon la densité de maillage de la surface maître	96
5.5	Deux blocs candidats au contact: géométrie et maillage utilisé	97
5.6	Deux blocs candidats au contact: influence du couplage sur la topologie de la matrice	97
5.7	Représentation schématique du facteur de relaxation ρ_{min}^{pi}	102
5.8	Mise à jour de la coordonnée paramétrique $\bar{\xi}(X^1, t)$	110
5.9	Évaluation de la coordonnée paramétrique à la frontière d'un élément maître .	113
5.10	Cas pathologique menant à une indétermination du point de contact	114
5.11	Diagrammes de classes associés à la définition de divers objets utilitaires . . .	119
5.12	Diagrammes de classes associés à la définition d'une frontière candidate au contact	120
5.13	Diagrammes de classes associés à la définition des schémas d'intégration . . .	121
5.14	Diagrammes de classes associés à la définition d'un élément de contact	122

6.1	Poutre en grandes transformations: géométrie, conditions aux limites et points de contrôle	126
6.2	Poutre en grandes transformations: maillages et conditions aux limites	127
6.3	Poutre en grandes transformations: évolution des contraintes aux points de contrôle	128
6.4	Poutre en grandes transformations: déformation plastique équivalente	130
6.5	Poutre en grandes transformations: évolution des contraintes aux points #4 selon la dérivée utilisée	131
6.6	Poutre en grandes transformations: résolution à l'aide de solveurs itératifs	133
6.7	Poutre en grandes transformations: évolution de la plastification	134
6.8	Problème de Hertz: caractéristiques géométriques	135
6.9	Problème de Hertz: maillage type, conditions aux limites et interface de contact	137
6.10	Problème de Hertz: distribution du champ de pression sur la zone de contact	140
6.11	Problème de Hertz: étendue de la zone de contact	141
6.12	Blocs en compression: maillage, conditions aux limites et interface de contact	143
6.13	Blocs en compression: résolution à l'aide de méthodes itératives	144
6.14	Blocs en compression: influence du taux de factorisation en présence d'une méthode de lagrangien augmenté	145
6.15	Blocs en compression: qualité de la solution sur le trajet A selon le nombre d'augmentations	146
6.16	Blocs en compression: composantes de la pression nominale à l'interface de contact à charge maximale	147
6.17	Blocs en compression: statuts de contact à l'interface (charge maximale)	148
6.18	Blocs en compression: validation de la loi de comportement spécialisée dans la direction normale	149
6.19	Blocs en compression: validation de la loi de comportement spécialisée dans le plan tangent	150
6.20	Glissement d'un bloc sur une plaque: caractéristiques géométriques	151
6.21	Glissement d'un bloc sur une plaque: maillages et conditions aux limites	152
6.22	Glissement d'un bloc sur une plaque: comportement des solveurs itératifs	154

6.23	Glissement d'un bloc sur une plaque: comportement des solveurs itératifs (au voisinage du point critique)	155
6.24	Glissement d'un bloc sur une plaque: réactions d'appuis en fonction du déplacement horizontal au point B	156
6.25	Glissement d'un bloc sur une plaque: déplacement vertical en fonction du déplacement horizontal au point B	157
6.26	Glissement d'un bloc sur une plaque: évolution de la contrainte de von Mises selon la position du bloc	158
6.27	Formage d'une tôle mince: caractéristiques géométriques du procédé	160
6.28	Formage d'une tôle mince: maillages, conditions aux limites et interfaces de contact	161
6.29	Formage d'une tôle mince: force appliquée sur la sphère en fonction de son enfoncement	163
6.30	Formage d'une tôle mince: distribution de la déformation radiale selon la direction radiale (enfoncement = 20 mm)	163
6.31	Formage d'une tôle mince: déformation plastique équivalente (enfoncement = 30 mm)	165
7.1	Caractéristiques géométriques du dispositif LH19T15S	170
7.2	Caractéristiques géométriques du dispositif A19K15S	171
7.3	Caractéristiques géométriques du dispositif CS 6-31	173
7.4	Mise en charge des dispositifs d'ancrage: système toron mors d'ancrage -vs- plot tronconique	175
7.5	Symétrie des dispositifs d'ancrage selon la répartition des alvéoles	177
7.6	Dispositifs d'ancrage LH19T15S: maillages utilisés et conditions aux limites	178
7.7	Dispositifs d'ancrage A19K15S: maillages utilisés et conditions aux limites	179
7.8	Dispositifs d'ancrage CS 6-31: maillages utilisés et conditions aux limites	180
7.9	Définition des interfaces de contact sur le dispositif LH19T15S	181
7.10	Définition des interfaces de contact sur le dispositif A19K15S	182
7.11	Définition des interfaces de contact sur le dispositif CS 6-31	182
7.12	Déformée des dispositifs d'ancrage à l'ultime	186

7.13	Volume plastifié en fonction du niveau de charge	187
7.14	Flèche des dispositifs d'ancrage en fonction du niveau de charge	187
7.15	Enfoncement des plots en fonction du niveau de charge	188
7.16	Déformation plastique équivalente normalisée en service (LH19T15S)	190
7.17	Déformation plastique équivalente normalisée en service (A19K15S)	191
7.18	Déformation plastique équivalente normalisée en service (CS 6-31)	192
7.19	Contrainte de von Mises normalisée en service (LH19T15S)	193
7.20	Contrainte de von Mises normalisée en service (A19K15S)	194
7.21	Contrainte de von Mises normalisée en service (CS 6-31)	195
7.22	Statuts de contact aux interfaces en service	196
7.23	Déformation plastique équivalente normalisée à l'ultime (LH19T15S)	198
7.24	Déformation plastique équivalente normalisée à l'ultime (A19K15S)	199
7.25	Déformation plastique équivalente normalisée à l'ultime (CS 6-31)	200
7.26	Contrainte de von Mises normalisée à l'ultime (LH19T15S)	201
7.27	Contrainte de von Mises normalisée à l'ultime (A19K15S)	202
7.28	Contrainte de von Mises normalisée à l'ultime (CS 6-31)	203
7.29	Statuts de contact aux interfaces à l'ultime	204
7.30	Caractéristique géométrique du dispositif LH1T15	206
7.31	Caractéristiques de la procédure expérimentale	208
7.32	Interaction entre la méthode des éléments finis et le calage par réseaux neuro- mimétiques	210
7.33	Dispositifs d'ancrage LH1T15: maillages utilisés et conditions aux limites . . .	212
7.34	Dispositifs d'ancrage LH1T15: interfaces candidates au contact	213
7.35	Sensibilité des paramètres sur l'enfoncement du système toron-mors d'ancrage	216
7.36	Sensibilité des paramètres sur la déformation axiale (point #2)	217
7.37	Sensibilité des paramètres sur la déformation circonférentielle (point #2) . . .	218
7.38	Courbe de convergence typique d'un réseau neuromimétique	220
7.39	Validation des paramètres obtenus à l'aide des réseaux neuromimétiques . . .	221
D.1	Représentation schématique du problème de projection	264

Liste des tableaux

5.1	Formules d'intégration sur les triangles avec contribution sur la frontière . . .	105
6.1	Poutre en grandes transformations: comparaison des champs de contrainte aux points de contrôle	129
6.2	Problème de Hertz: quelques informations sur les densités de maillage	136
6.3	Problème de Hertz: quelques informations relatives à la résolution numérique	138
6.4	Blocs en compression: quelques informations sur la densité de maillage	142
6.5	Glissement d'un bloc sur une plaque: quelques informations sur la densité de maillage	149
6.6	Formage d'une tôle mince: quelques informations sur la densité de maillage .	159
6.7	Formage d'une tôle mince: convergence typique pour un pas de chargement .	162
7.1	Propriétés mécaniques des dispositifs LH19T15S et A19K15S	172
7.2	Coefficients de frottement utilisés	174
7.3	Caractéristiques d'un toron T15S	174
7.4	Équivalence des contraintes admissibles selon le dispositif d'ancrage	175
7.5	Dispositifs multitorons: quelques informations sur les densités de maillage utilisés	181
7.6	Quelques informations relatives à la résolution numérique	183
7.7	Caractéristiques d'un toron T15	207
7.8	Résultats expérimentaux: enfoncement du mors d'ancrage	207
7.9	Résultats expérimentaux: profils de déformation à chargement maximal	209
7.10	Dispositifs d'ancrage LH1T15: quelques informations sur la densité de maillage	211

7.11 Sensibilité et plage des paramètres à caler	215
7.12 Résultats obtenus du calage par réseaux neuromimétiques	219

Liste des algorithmes

5.1	Contexte général de résolution par la méthode de Newton-Raphson	90
5.2	Résolution du problème de contact avec frottement par une méthode de lagrangien augmenté	100
5.3	Détermination du facteur de relaxation ρ_{min}	103
5.4	Détermination du facteur de relaxation ρ_{min}^{pi}	104
5.5	Évaluation des contributions élémentaires \tilde{R}_c^e et K_c^e	109
5.6	Détermination du point de contact d'une particule esclave $\underline{x}_{t+\Delta t}^1$ sur γ_c^2 . . .	112
D.1	Opérations relatives à la résolution du problème de projection	265

Chapitre 1

Introduction

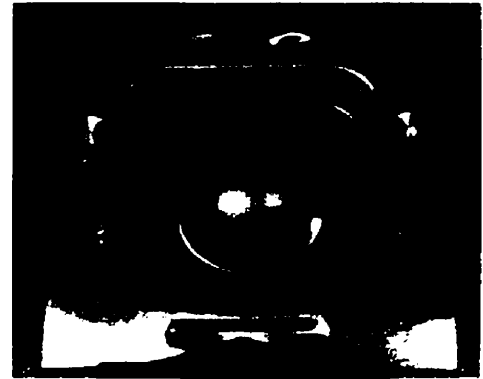
1.1 Généralités

L'étude du comportement des systèmes mécaniques comportant des zones candidates au contact, constitue, encore aujourd'hui, un champ de recherche d'un grand intérêt. Cet intérêt est entre autres dicté par les défis inhérents à la complexité ainsi qu'à l'interaction potentielle des phénomènes en cause, mais aussi, par la diversité sans cesse grandissante des applications, telles que montrées à la Figure 1.1 et pour lesquelles le problème de contact joue un rôle prédominant. Qu'il s'agisse de procédés d'emboutissage, de formage ou de pliage des tôles, d'extrusion massive, de problèmes d'impact, d'étude de trains d'engrenages, de systèmes poutre-dalle, de la simulation d'extraction d'ancrage dans un massif de béton, de l'étude du comportement de divers mécanismes tels les assemblages boulonnés, les structures minces en mode post-flambement ou encore de plaques tectoniques, le problème de contact se reporte, d'un point de vue simpliste, à l'évolution des mécanismes de transfert d'efforts à l'interface des composantes d'un système mécanique. La nature de ces mécanismes de transfert est, par définition, non linéaire, car dépendante de la position des solides qui est *a priori* inconnue, nécessitant, par le fait même, une évaluation des conditions de contact et de frottement *a posteriori*. Jumelée à la présence potentielle de non-linéarités géométriques et matérielles, la solution d'un tel problème est rarement directe et nécessite, dans la majorité des cas, la mise sur pied d'un programme expérimental et/ou encore, l'utilisation de méthodes numériques.

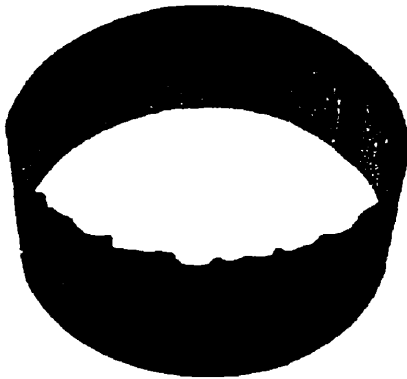
De nos jours, les sociétés œuvrant à la conception de tels systèmes, font de plus en plus souvent appel à la modélisation numérique. Ce choix émane principalement de la réduction substantielle du temps nécessaire aux études par la diminution du nombre d'essais expérimentaux qui, généralement, sont extrêmement coûteux en raison de l'appareillage nécessaire et difficilement représentatifs des conditions d'utilisation en service. Cependant, les applications, telles que décrites précédemment, et qui présentent de fortes non-linéarités, sont souvent mal cernées du point de vue théorique. Le formalisme mathématique semble encore passablement déficient pour ce qui est de la description rigoureuse de ce type de problème, et le choix de



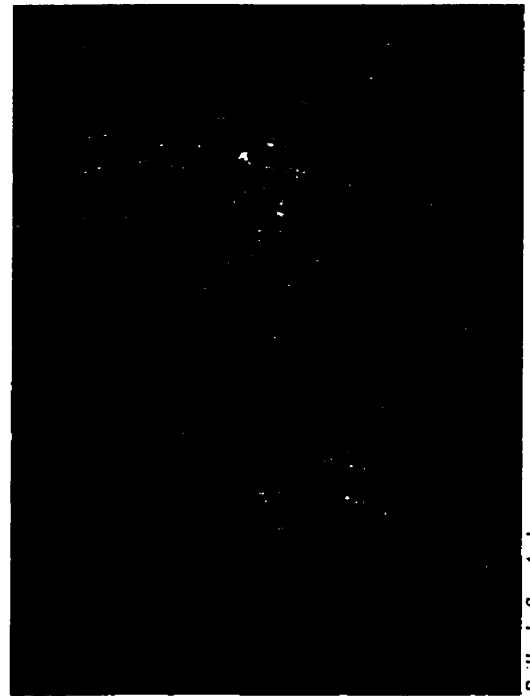
(a) Train d'engrenage



(b) Emboutissage des tôles



(c) Comportement post-flambage



(d) Mouvement des plaques tectoniques

Patrice de San Andreas

Figure 1.1 – Problèmes présentant des zones de contact

modèles physiques représentatifs ainsi que des techniques de résolution suffisamment précises et performantes n'est pas toujours évident. De plus, la mise en œuvre informatique des outils de modélisation permettant la prise en compte des zones candidates au contact pose souvent un problème quant au choix de l'organisation de l'information. Dans cette optique, la modélisation ainsi que la résolution des problèmes de contact impliquent donc des considérations de nature physique, mathématique et informatique permettant la prise en compte des divers phénomènes associés à ces problèmes.

Ce chapitre a donc comme principal objectif la présentation des divers aspects ayant menés à l'élaboration de ce projet de recherche. En particulier, on introduit la notion de dispositif d'ancrage multitorons pour lequel le problème de contact constitue une difficulté de premier plan dans la détermination de son comportement déformationnel. L'ensemble des caractéristiques géométriques, mécaniques et matérielles de ce type de dispositif, ainsi que son contexte d'utilisation permettent d'établir la problématique ainsi que les objectifs de la thèse. Par la suite, on présente une revue exhaustive de l'état actuel des connaissances permettant, par le fait même, de justifier l'ensemble des développements qui vont s'en suivre. Finalement, on présente les objectifs, une brève description du contenu ainsi que les divers aspects originaux de la thèse.

1.2 Problématique

Depuis plusieurs années, la précontrainte externe jouit d'une grande popularité, quant à son utilisation comme moyen permettant d'éviter le remplacement d'un ouvrage existant, pour des raisons de capacité portante insuffisante ou encore pour la conception de nouveaux ouvrages, tel que montré à la Figure 1.2(a). Dans le cadre d'une réhabilitation, cette technique permet d'augmenter la capacité ultime de l'ouvrage en place et ainsi, d'augmenter sa durée de vie tout en permettant le passage de charges beaucoup plus élevées. Dans ce contexte, la précontrainte constitue donc un traitement mécanique consistant en l'introduction, dans une composante de l'ouvrage, d'un champ de contrainte agissant inversement à celui induit par les charges qui la sollicitent. Il s'agit là, bien évidemment, d'une définition de la précontrainte au sens large. Plus particulièrement, pour ce qui est des ouvrages d'art (ponts, viaducs, bretelles d'accès, etc.), le matériau précontraint est généralement le béton tandis que la précontrainte est exercée par l'entremise de câbles d'acier composés de torons à haute résistance. Telle que montrée à la Figure 1.2(b), la mise en œuvre de ce procédé de mise en post-tension, nécessite l'utilisation de systèmes mécaniques appelés dispositifs d'ancrage, assurant ainsi la retenue du câble de précontrainte en chacune des extrémités de la pièce à renforcer suite à sa mise en tension.

Dans un contexte générique, le terme «ancrage» désigne tout dispositif, mécanisme ou outil servant à assurer la retenue par butée (blocage) d'une pièce ou d'un élément de construction soumis à un effort de traction. Dans le cadre de ce projet de recherche, on s'intéresse plus particulièrement aux dispositifs d'ancrage multitorons tels que présentés à la Figure 1.3. Dans ce cas bien précis, le dispositif assure la retenue du câble, constitué de plusieurs torons, par

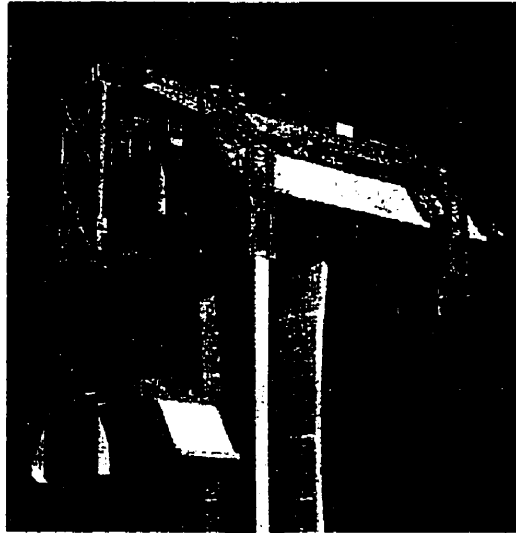


Photo: VSL

(a) Montage des voussoirs



Photo: VSL

(b) Vue de l'intérieur

Figure 1.2 – *Construction d'un pont à l'aide de la précontrainte extérieure*

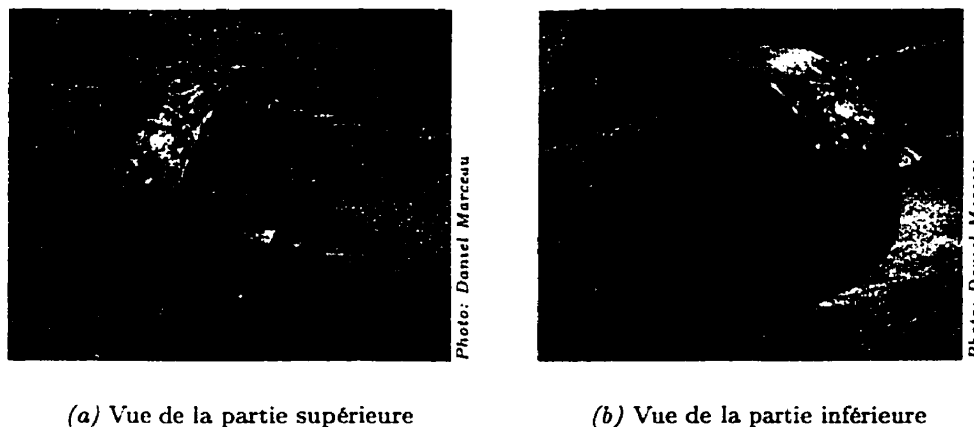


Figure 1.3 - Présentation d'un dispositif d'ancrage multitorons

l'intermédiaire d'une pièce massive communément appelée « bloc d'ancrage ». Cette composante, possédant plusieurs ouvertures appelées « alvéoles coniques » et au travers lesquelles les torons s'enfilent, repose sur une plaque d'ancrage qui elle-même, s'appuie sur la pièce de béton à renforcer. Le blocage proprement dit d'un toron est obtenu par l'intermédiaire du mors d'ancrage composé d'un certain nombre de clavettes indépendantes qui agrippent les torons et les coincent à l'intérieur des alvéoles coniques. Dans ce contexte, on anticipe aisément que le transfert des efforts au massif de béton constitue une opération fort complexe. En effet, la tension induite dans les torons est transférée au mors d'ancrage par contact à l'interface toron-clavette. Cet effort, est par la suite transféré au bloc d'ancrage par contact à l'interface clavette-alvéole conique pour finalement descendre au niveau de la plaque d'ancrage par contact à l'interface bloc d'ancrage-plaque d'ancrage et ainsi, jusqu'à la pièce de béton¹.

Les possibilités d'utilisation d'un tel système mécanique, jumelées à l'utilisation grandissante de la précontrainte extérieure ont poussé les sociétés œuvrant dans le domaine de la précontrainte (VSL, 2000; Dywidag, 1989; Freyssinet, 1988; GTM, 1987; Spie-Batignolles, 1986) à offrir toute une gamme de dispositifs d'ancrage, chacun se distinguant par ses propriétés géométriques et mécaniques ainsi que par son procédé de mise en tension. Malgré des critères de conception sévères, certains dispositifs d'ancrage ont néanmoins subis des déformations excessives en quelques occasions, et certains se sont même rompus de façon brutale sous l'effet des charges de service, tel que montré à la Figure 1.4. Ces défaillances peuvent entre autres s'expliquer soit par un défaut intrinsèque du matériau ou encore, par une mauvaise conception du dispositif. Dans ce dernier cas, il devient impératif de déterminer l'origine de ces dysfonctionnements et de procéder, le cas échéant, à l'application des correctifs nécessaires. De plus, la venue de nouveaux matériaux tels les fibres de verre, d'aramide et de

1. Il importe de noter que l'influence de la pièce de béton sur le comportement du dispositif d'ancrage n'est pas prise en compte dans la présente étude. Il s'agit là d'un projet à part entière dépassant largement le cadre de cette thèse.



Figure 1.4 – Rupture d'un dispositif d'ancrage multitorons

carbone dans le domaine de la précontrainte (Mufti *et al.*, 1991; Taerwe *et al.*, 1992; McKay et Erki, 1993; Kerstens *et al.*, 1998; Sayed-Ahmed et Shrive, 1998), possédant des limites de rupture pouvant atteindre 3500 MPa, a incité ces mêmes sociétés à concevoir de nouveaux dispositifs d'ancrage plus résistants ainsi qu'à réévaluer les dispositifs existants afin de vérifier leur utilisation potentielle avec ces torons à très haute performance.

Selon l'ensemble des points mentionnés précédemment, et avant même d'entreprendre le développement de nouveaux dispositifs plus efficaces et performants, il apparaît de toute première importance de bien saisir le comportement en service ainsi qu'à l'ultime des dispositifs conventionnels. De plus, le souci actuel d'uniformisation des standards et normes en ce qui concerne la conception des dispositifs d'ancrage mène directement à une réévaluation exhaustive des différents dispositifs d'ancrage disponibles sur le marché.

Jusqu'à très récemment, le développement des nouveaux dispositifs ainsi que l'évaluation de ceux existant n'étaient basés que sur l'expérimentation en laboratoire. Cependant, les coûts importants associés à une telle mise en œuvre, jumelés à l'impossibilité d'obtenir certaines informations telles que l'intensité ainsi que l'étendu de la plastification dans le dispositif d'ancrage ont mené les sociétés concernées à se pencher vers l'utilisation des méthodes numériques. Dès lors, on a rapidement constaté que l'utilisation des rares codes de calcul commerciaux permettant la prise en compte du problème de contact tridimensionnel avec frottement entre solides déformables dans un contexte de grandes transformations, constituait une tâche extrêmement délicate et ne permettant l'obtention de solutions adéquates qu'en certaines circonstances particulières. Face à une telle situation, les ingénieurs de conception se devaient d'effectuer de nombreuses simplifications dans leurs modèles rendant ces derniers totalement inaptes à fournir une solution représentative du comportement réel. Entre autres simplifications, on note l'élimination du système toron-mors d'ancrage en remplaçant ce dernier par l'application d'une charge équivalente au niveau de l'alvéole. Cette stratégie, quoique que très audacieuse, implique l'indéformabilité du système toron-mors d'ancrage et ne permet pas de représenter correctement l'effet de la pénétration du mors d'ancrage dans l'alvéole conique. De ce fait, on a rapidement constaté que l'influence particulière du système toron-mors d'ancrage

(enfouissement des encoches dans le toron), jumelée à la plastification potentielle de certaines composantes ainsi qu'à la nature tridimensionnelle du problème rendent d'une extrême délicatesse la détermination de son comportement global. Encore aujourd'hui, certaines de ces sociétés ne se basent que sur l'expérimentation et ce, en raison de l'absence de modèles numériques permettant une représentation adéquate de l'ensemble des phénomènes physiques rencontrés dans un dispositif d'ancrage multitorons.

1.3 État actuel des connaissances

Compte tenu de la problématique préalablement établie à la section précédente, on en conclut que la principale difficulté associée à la modélisation numérique du comportement des dispositifs d'ancrage multitorons réside dans la prise en compte du transfert des efforts aux diverses interfaces candidates au contact. De ce fait, la réalisation de ce projet de recherche implique donc une revue exhaustive de l'état actuel des connaissances en ce qui a trait, dans un premier temps, à la modélisation proprement dite de tels dispositifs et finalement, à la modélisation du problème de contact avec frottement.

1.3.1 Dispositifs d'ancrage multitorons

Dans le domaine de la précontrainte, la grande majorité des publications se limitent presque exclusivement à l'étude du comportement au voisinage des zones d'ancrage (Stone et Breen, 1984; Fenwick et Lee, 1986). On retrouve également quelques publications traitant des propriétés mécaniques des torons (Chabert, 1983; Preston, 1985; RILEM, 1990; Dolan, 1990; Reda *et al.*, 1997). Cependant, très peu de publications abordent l'étude théorique du comportement des dispositifs d'ancrage associés à la précontrainte. Ce fait, est entre autres imputable à la grande complexité des phénomènes en cause, ainsi qu'à la nature confidentielle des caractéristiques associées à chacun de ces dispositifs ayant fait l'objet de brevet. Citons tout particulièrement les travaux de Leonhardt (1964) sur l'étude du transfert des efforts de précontrainte d'un vérin à un dispositif d'ancrage tel que ceux étudiés dans le présent ouvrage.

Pour ce qui est de la modélisation numérique, l'un des premiers ouvrages retrouvés est celui de Pecknold et Presswalla (1983) présentant les résultats d'une analyse axisymétrique d'un dispositif d'ancrage à fils. Pour ce faire, les auteurs ont littéralement éliminé l'ouverture (alvéole conique) du bloc d'ancrage par l'entremise de certaines propriétés équivalentes. Les résultats numériques obtenus ne sont cependant pas corroborés par des données expérimentales.

Ce n'est qu'une dizaine d'années plus tard, avec les travaux de Bastien (1992) basés sur une étude à la fois expérimentale et numérique du comportement des dispositifs d'ancrage mono- et multitorons, qu'il devient possible de se prononcer sur l'intensité ainsi que sur l'étendue de la plasticité dans un tel dispositif. Entre autres, on y présente de nombreuses données expérimentales (flèches, déformations, enfouissement du ou des mors d'ancrage, etc.) établies

sur les dispositifs LH1T15 et LH19T15 du procédé LH de la société Spie-Batignolles (Spie-Batignolles, 1986). Pour ce qui est du volet numérique, toute une série d'analyses est présentée sur les dispositifs déjà mentionnés et permet de corroborer certaines observations expérimentales. Cependant, la nature même du modèle permettant la prise en compte du problème de contact tridimensionnel avec frottement n'a permis, en aucun moment, l'utilisation de coefficients de frottement autres que $\mu = 0$ (glissement parfait) et $\mu = \infty$ (frottement parfait) pour le dispositif LH19T15. Dans cette optique, il devenait impossible de vérifier le comportement de ce dispositif sous des conditions de frottement intermédiaires. Dans l'ensemble, cette étude, considérée comme étant une première dans le domaine, a permis de faire ressortir les points suivants sur le dispositif multitorons:

- On remarque un évasement important des alvéoles coniques situées en périphérie du bloc d'ancrage;
- Il y a présence de grandes déformations élastoplastiques dans le bloc d'ancrage. Cependant, cette donnée expérimentale n'a pu être vérifiée numériquement en raison de l'utilisation d'une formulation en petites déformations;
- Grande influence des coefficients de frottement et en particulier, celui à l'interface clavette-alvéole conique;
- Il survient un décollement entre le bloc d'ancrage et la plaque près de la zone périphérique du bloc d'ancrage;
- Présence de déplacements relatifs allant de modérés à grands se produisant aux interfaces clavette-alvéole conique.

Également basée sur les résultats de Bastien (1992), une formulation bidimensionnelle et axisymétrique du problème de contact avec frottement en grands déplacements relatifs est présentée par Marceau (1993), permettant ainsi une meilleure représentation du comportement des dispositifs d'ancrage monotoron. En particulier, on y présente une calibration des coefficients de frottement aux interfaces clavette-alvéole conique et bloc d'ancrage-plaque d'ancrage basée sur les résultats expérimentaux obtenus par Bastien (1992), ainsi qu'une étude de l'influence de l'angle du mors d'ancrage sur le comportement global du dispositif LH1T15 du procédé LH (Marceau *et al.*, 1996).

Quelques années plus tard, une nouvelle étude, subséquente à celle menée par Bastien (1992) sur les dispositifs d'ancrage multitorons est présentée par Bastien *et al.* (1996). Le but principal de cette étude fut de vérifier le comportement d'un tel dispositif pour des coefficients de frottement autres que $\mu = 0$ et $\mu = \infty$. Pour ce faire, les auteurs utilisent une formulation du problème de contact en petits déplacements relatifs (de type nœud à nœud) avec une linéarisation consistante du résidu d'équilibre.

Plus récemment, une première étude comparative, basée sur la méthode des élément finis, du dispositif d'ancrage LH19T15S² du procédé LH et A19K15S du procédé K fut menée par Odobasic (1998). Nonobstant l'aspect comparatif de cette étude, celle-ci présente une étude

2. La lettre «S» signifie SUPER, faisant ainsi référence à un toron de diamètre nominal de 15.7 mm contrairement à un toron standard de 15.2 mm.



Photo: José Bastien

Figure 1.5 – Distinction entre système toron-mors d'ancrage et plot tronconique

de convergence de la solution en fonction de la densité de maillage et ce, selon la présence ou non de non-linéarités matérielles.

À ce stade-ci, il importe de noter que l'ensemble des études présentées ont soit exclu l'effet du transfert d'efforts aux interfaces candidates au contact, ou encore, modélisé le phénomène en question par l'entremise d'une formulation du problème de contact avec frottement de type nœud à nœud. Cette méthode, dans un contexte où les grands déplacements relatifs entre les composantes deviennent non négligeables, mène à divers problèmes de convergence et de précision.

On constate également qu'aucune publication ne fait mention de la prise en compte du système toron-mors d'ancrage dans les analyses. En effet, ces études furent menées en considérant ce dernier système comme étant un solide monolithique, élastique isotrope. Dans cette optique, le système toron-mors d'ancrage est littéralement substitué par une pièce massive, appelée «plot tronconique» tel que montré à la Figure 1.5. Cette façon de faire permet de simplifier grandement la modélisation du comportement global du dispositif d'ancrage et ainsi, le calage du modèle, lorsque de tels plots sont utilisés en laboratoire. Cependant, un tel contexte ne permet pas d'obtenir une représentation fidèle des conditions réelles d'utilisation.

Depuis longtemps, de nombreux chercheurs se sont intéressés à l'étude du comportement des câbles et torons (Hruska, 1964; Costello, 1990; Jolicoeur, 1993; Sekouri, 1996). En contrepartie, il n'existe, encore aujourd'hui, aucune publication traitant de l'étude du comportement du système toron-mors d'ancrage, exception faite de Renault (2000). Ce dernier aborde le problème en considérant l'utilisation de propriétés orthotropes équivalentes pour les clavettes composant le mors d'ancrage ainsi qu'une loi de comportement pour le toron, telle que proposée par Jolicoeur (1993). De plus, Renault (2000) fait l'hypothèse qu'aucun déplacement relatif circonférentiel et radial ne peut se produire à l'interface toron-mors d'ancrage. Cette procédure implique donc le calage, par essais et erreurs, au moyen des résultats expérimentaux fournis par Bastien (1992), d'un grand nombre de paramètres associés aux diverses lois utilisées.

1.3.2 Problème de contact avec frottement

Dans toute sa complexité, la modélisation du problème de contact avec frottement implique la prise en compte de divers aspects nécessaires à l'élaboration d'un modèle permettant la bonne représentation des phénomènes en cause.

Aspect mathématique

Associé de près aux phénomènes d'interaction à l'interface des solides, le problème de contact est, d'un point de vue purement mathématique, un exemple typique de système physique gouverné par une inégalité variationnelle (Duvaut et Lions, 1972). De plus, la prise en compte des effets de frottement dans l'écriture du modèle théorique ajoute une difficulté mathématique due, principalement, au caractère dissipatif du phénomène (Campos *et al.*, 1982; Oden et Pires, 1983a,b; Kikuchi et Oden, 1988). Dans ces dernières références, on considère, le cas particulier du problème de contact avec frottement d'un solide élastique linéaire contre une paroi rigide (i.e. problème de Signorini). Ce cas est d'ailleurs traité en détails et semble bien caractérisé. Une extension au cas d'un matériau inélastique et tout particulièrement, dans un contexte de grandes déformations, constitue une opération complexe et demeure, encore aujourd'hui, non résolu mathématiquement (Ciarlet, 1988). Finalement, le fait de remplacer la paroi rigide par un second solide déformable implique une autre difficulté majeure, dont l'influence sur la validité du modèle mathématique (description fondamentale du problème de contact), n'est pas encore entièrement élucidée.

Malgré ces faits, on peut conclure sur l'admissibilité des lois de frottement dans l'écriture des formes variationnelles associées au problème de mécanique. En effet, il est bien connu (Duvaut et Lions, 1972; Duvaut, 1980) que l'utilisation d'une loi de frottement de Coulomb, appliquée au problème de Signorini mène à une définition erronée de la contrainte développée dans la direction normale à la surface de contact. À l'exception de quelques cas particuliers (Necas *et al.*, 1980), la question fondamentale liée à l'existence ainsi qu'à l'unicité de la solution du problème de contact avec frottement demeure, encore aujourd'hui, un défi mathématique de taille. Dans le but de lever ces indéterminations, certains auteurs ont proposé des variantes non locales de la loi de Coulomb tout en préservant sa structure de base (Oden et Pires, 1983a,b). Cependant, il n'en demeure pas moins que les lois de type Coulomb, jouent un rôle déterminant dans la modélisation du phénomène de frottement en mécanique des solides.

Formulation à l'interface

Les premiers travaux ayant pour objectif la modélisation numérique des problèmes de contact excluent systématiquement les effets liés au frottement ainsi que les diverses non-linéarités matérielles (Francavilla et Zienkiewicz, 1975; Hughes *et al.*, 1976). Ces travaux ont permis de conclure quant à la possibilité de pouvoir considérer de tels aspects dans le traitement des problèmes de mécanique classique. Quant à la prise en compte des phénomènes

liés au frottement, les premières modélisations numériques (Fredriksson, 1975) furent aussi limitées aux cas des solides élastiques linéaires en petites déformations. C'est en raison des besoins grandissants du milieu industriel quant à la modélisation numérique des problèmes de contact avec frottement dans un contexte de grandes transformations, que plusieurs modèles furent proposés (Bathe et Chaudhary, 1985; Cheng et Kikuchi, 1985; Ju et Taylor, 1988; Rebelo, 1988; Bathe et Mijailovich, 1988; Benson et Hallquist, 1990; Wriggers *et al.*, 1990; Rebelo *et al.*, 1990; Alart et Curnier, 1991; Heegaard et Curnier, 1993; Zong, 1993) et cela, sur une période d'environ huit ans. Malgré le fait que ces travaux constituaient, à l'époque, la fine pointe de la technologie en matière de modélisation des problèmes de contact avec frottement, ceux-ci furent développés dans un contexte spécifique de modélisation (i.e. discrétisation particulière, évolution incrémentale admissible, contact sur frontière rigide).

Ce manque de généralité, émane principalement de l'absence de lien entre chacune de ces modélisations et le milieu continu. En effet, l'écriture des équations gouvernant le problème de contact avec frottement sur le milieu continu permet de faire abstraction de l'aspect géométrique des surfaces candidates au contact, de maintenir le principe d'objectivité aux interfaces, de vérifier la validité et la robustesse des modèles développés ainsi que la possibilité de formuler divers estimateurs d'erreur, fonction des conditions aux interfaces. Dans cette optique, d'importants travaux furent réalisés (Laursen et Simo, 1993; Laursen, 1994) dans lesquels on propose une formulation très générale du problème de contact avec frottement dans un contexte de grandes déformations tridimensionnelles. Ces travaux prônent l'utilisation d'une base convective dans la définition de la cinématique au point de contact. En plus de permettre une écriture aisée des quantités objectives, cette formulation mène à une définition naturelle du problème de contact sur le milieu continu. En complément, Laursen et Simo (1993) présentent les aspects justificatifs liés à l'utilisation d'une telle base dans l'écriture d'une loi de frottement de type Coulomb. Entre autres, on traite de la définition de la base convective, de sa signification physique ainsi que des composantes cinématique et cinétique associées, tels que les taux de glissement et de frottement.

On notera cependant que dans Laursen et Simo (1993), certaines simplifications, au niveau de la contribution au principe du travail virtuel (PTV) des efforts de contact et de frottement proviennent de l'hypothèse selon laquelle un transfert d'effort à l'interface devient possible seulement sous la condition physique exacte de contact (aucune pénétration permise). Cette hypothèse implique donc une perte d'objectivité lorsque les particules candidates au contact ne respectent pas cette condition. En effet, l'expression du PTV se doit d'être valide non seulement sous les conditions exactes, mais aussi, dans les conditions où les particules candidates au contact sont soit séparées ou encore interpénétrées. Selon ces dernières considérations, Klarbring (1995) propose une formulation générale de la cinématique de contact permettant le respect de l'objectivité peu importe les conditions à l'interface.

Régularisation des lois de contact et de frottement

Un des aspects importants de la modélisation du problème de contact est la conversion de l'inégalité variationnelle en une égalité variationnelle nécessaire à l'établissement des formes

discrètes. Dans l'ensemble, on peut subdiviser ces méthodes en deux grandes classes, soit les méthodes de pénalisation et les méthodes utilisant des multiplicateurs de Lagrange.

La méthode de pénalité est généralement obtenue par la régularisation des lois de contact et de frottement à l'aide d'un paramètre de pénalité afin de rendre celles-ci différentiables. Cette régularisation implique donc une approximation des efforts à l'interface qui deviennent exacts dans le cas où le paramètre de pénalité tend vers l'infini. Dans cette optique, on admet donc une erreur de modélisation correspondant à une interpénétration résiduelle dans la direction normale ainsi qu'un glissement réversible dans le cas d'une loi de frottement de type Coulomb. De nombreux exemples d'applications numériques de cette méthode sont présentés dans la littérature: Oden et Pires (1984); Cheng et Kikuchi (1985); Hallquist *et al.* (1985); Wriggers *et al.* (1985); Simons et Bergan (1986); Bohm (1987); Ju et Taylor (1988); Wriggers *et al.* (1990). Les principaux avantages de la méthode sont sa grande simplicité d'implantation, le maintien du nombre d'équations initialement établi ainsi que la facilité d'interprétation de son utilisation. Un autre avantage non négligeable de la méthode est qu'elle permet d'obtenir une expression incrémentale de la loi de frottement, permettant l'utilisation de schémas d'intégration en temps similaires à ceux utilisés en plasticité (Giannakopoulos, 1989). Les travaux de Michalowski et Mroz (1978) montrent effectivement l'analogie physique et mathématique entre le frottement et la plasticité. Cependant, il est bien connu que la stabilité de la méthode est grandement influencée par le choix du paramètre de pénalité. En effet, la proportionnalité, dans la direction normale, entre la pression de contact et la pénétration implique donc que le champ de pression sur le domaine discrétisé doit être du même ordre que le champ de déplacement. Ce constat implique donc, pour certains paramètres de pénalité, une violation de la condition essentielle de stabilité locale de Babuska-Brezzi (Carey et Oden, 1983) impliquant, par le fait même, des phénomènes oscillatoires lors de la résolution globale des équations d'équilibre. La méthode de pénalité est, aujourd'hui, largement utilisée dans les codes commerciaux et dans la littérature pour l'analyse transitoire avec intégration explicite des équations d'équilibre. Dans ce contexte, l'apport des termes d'inertie a pour effet de stabiliser la méthode et permettre ainsi une meilleure représentation des conditions de contact au niveau local par l'utilisation de paramètres de pénalité plus sévères.

Pour ce qui est de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, les conditions d'admissibilité sont directement satisfaites par introduction des multiplicateurs dans la formulation variationnelle. Dans cette approche, les efforts de contact et de frottement représentés par les multiplicateurs, ainsi que les composantes du champ de déplacement sont considérés comme étant des variables indépendantes. Les premières utilisations de cette technique à la résolution du problème de contact furent présentées par Hughes *et al.* (1978) ainsi que par Sackman *et al.* (1982). Une extension de la méthode à l'analyse du problème de contact entre plaques minces fut proposée par Stein et Wriggers (1982). On retrouve également une procédure permettant la résolution du problème de contact bi- et tridimensionnel proposée par Bathe et Chaudhary (1985) dans laquelle le potentiel total des efforts à l'interface fut inclus dans les expressions variationnelles et ce, afin de renforcer d'avantage le respect des conditions d'admissibilité. Dans l'article proposé par Chen et Tsai (1986), on traite le problème de contact avec frottement dans un contexte élastodynamique par l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange. Plus récemment, Taylor *et al.* (1991) propose une toute nouvelle approche permettant la bonne

représentation des contraintes de contact et de frottement aux interfaces en dynamique non linéaire. Un des principaux désavantages de cette dernière méthode est l'augmentation de la dimension du système à résoudre due à l'ajout des multiplicateurs de Lagrange au nombre des inconnus. Finalement, il importe de noter que la matrice tangente résultant d'une telle méthode est généralement singulière et nécessite, par le fait même, l'utilisation de certaines techniques particulières permettant ainsi la résolution du système linéarisé.

Dans le but de contrer l'effet néfaste d'une pénalisation excessive sur le conditionnement du système à résoudre ainsi que les désavantages associés à la méthode des multiplicateurs de Lagrange, plusieurs auteurs proposent l'utilisation d'une méthode de lagrangien augmenté constituant ainsi un compromis entre la méthode des multiplicateurs de Lagrange et la méthode de pénalité. En fait, la méthode du lagrangien augmenté, fut initialement proposée par Hestenes (1969) et Powell (1969) dans un contexte de programmation mathématique associé à un problème avec contraintes d'égalité. Une extension aux problèmes avec contraintes d'inégalité fut introduite par Rockefeller (1974). Plus récemment, la méthode fut utilisée pour la résolution par la méthode des éléments finis, des problèmes en grandes déformations élastiques incompressibles (Simo et Taylor, 1991), des problèmes de viscoplasticité (Glowinski et Le Tallec, 1984), des problèmes de contact sans frottement (Wriggers *et al.*, 1985) et avec frottement (Simo et Laursen, 1992). Le grand avantage de cette méthode est sans contredit la possibilité d'obtenir une excellente représentation des conditions de contact et de frottement et ce, à faible pénalité. Puisque l'évaluation des multiplicateurs est effectuée dans un contexte non linéaire, résolu par un schéma implicite de type Newton-Raphson, l'augmentation peut donc être effectuée soit à l'intérieur même de la boucle sur les itérations d'équilibre global, ou encore, un fois l'équilibre atteint à multiplicateurs constants. La première option fut utilisée initialement par Fortin et Fortin (1985) pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles et puis par Wriggers *et al.* (1985) pour la résolution du problème de contact sans frottement. Quant à la deuxième option, elle fut employé par Simo et Laursen (1992) pour la résolution du problème de contact avec frottement en petites déformations. Bien que les deux options présentent des avantages, il importe de noter que la deuxième permet de préserver le taux de convergence associé à la méthode de résolution utilisée.

Détermination des points de contact

Concernant la détermination des points de contact, la grande majorité des algorithmes existants sont, en fait, des variantes de la stratégie de recherche «global-local» initialement proposée par Hallquist *et al.* (1985) et modifiée par la suite par Benson et Hallquist (1990) et Simo et Laursen (1992). Cette méthode consiste, suite à l'établissement d'une discrétisation de type esclave-maître, à effectuer une première recherche, au niveau global, permettant la détection du nœud maître le plus près d'une particule esclave donnée. Par la suite, on procède à la recherche du segment attaché au nœud maître sélectionné permettant la projection orthogonale de la particule esclave. Cette méthode, développée dans un contexte bidimensionnel, demande un effort de calcul considérable. Par la suite, de nombreuses modifications de cette méthode furent proposées, afin d'en améliorer l'efficacité informatique. On note, entre autres,

l'algorithme communément appelé «pinball algorithm» proposé par Belytschko et Neal (1991) avec une attention toute particulière de l'aspect vectorisation permettant ainsi une accélération optimale du code de recherche sur les «super ordinateurs».

On retrouve également certains algorithmes de recherche ne nécessitant pas *a priori*, une distinction entre les surfaces candidates au contact. Dans cette optique, les notions d'unités de contact ainsi que de super-élément furent introduites par Schreppers *et al.* (1992). Pour chaque nœud reposant sur une surface candidate au contact, une unité de contact est définie en considérant ce même nœud ainsi que tous ceux susceptibles d'entrer en contact avec le nœud de départ. Considérant qu'un nœud participe, en général, dans plus d'une unité, on en vient rapidement à la création d'un système global de très grande taille et ce, en raison de la présence des couplages potentiels entre les nœuds présents à l'interface de contact.

Finalement, un nouvel algorithme de recherche global a été développé et implanté dans le programme DYNA3D par Oldenburg et Nilsson (1994) et connu sous le nom de «position code». Cette méthode simplifie le problème de recherche tridimensionnel à une stratégie de recherche dans un vecteur unidimensionnel. Dans ce contexte, le coût informatique associé à une telle recherche est de l'ordre de $N \log_2 N$ où N est le nombre de nœuds dans le système. Toujours selon les auteurs, il s'agit là d'un algorithme d'une grande simplicité dont l'implantation dans un code d'analyse par éléments finis s'effectue de façon tout à fait naturelle.

1.4 Objectifs et contenu de la thèse

À la lumière de la problématique et de l'état actuel des connaissances, on se propose donc, dans le cadre de cette thèse, de développer un modèle numérique permettant de simuler adéquatement le comportement déformationnel d'un dispositif d'ancrage multitorons en considérant simultanément l'ensemble des interactions possibles entre les diverses composantes du dispositif et ce, sous différents contextes d'utilisation. Dans le but d'atteindre ces objectifs, on se propose donc de prendre en compte les points suivants:

- Considérer une cinématique permettant une représentation objective des quantités tensorielles dans un contexte de grandes transformations;
- Considérer un comportement élastoplastique des composantes afin d'avoir une bonne représentation de l'état de contrainte ainsi que du niveau de plastification du dispositif;
- Développer un modèle général permettant la prise en compte du problème de contact tridimensionnel avec frottement dans un contexte de grandes transformations permettant ainsi une représentation réaliste du transfert d'efforts aux diverses interfaces du dispositif d'ancrage;
- Développer un modèle permettant une représentation réaliste du comportement à l'interface toron-mors d'ancrage;
- Proposer un contexte de résolution adapté au traitement des problèmes tridimensionnels de grande taille.

Pour ce faire, et avec le souci de ne pas confondre les aspects mathématiques et numériques, nous avons choisi de présenter le contenu de cette thèse en huit chapitres.

Le Chapitre 2 présente les détails relatifs à la formulation tridimensionnelle des équations de la mécanique dans un contexte de grandes transformations. C'est notamment dans ce chapitre que se retrouve la description des diverses quantités tensorielles relatives à la description de la cinématique en grandes transformations ainsi qu'à l'équilibre du milieu déformable. On présente ensuite une description de la loi de comportement élastoplastique utilisée et finalement, la formulation variationnelle associée au principe du travail virtuel exprimée sur la configuration déformée.

Le Chapitre 3, quant à lui, expose le cœur même de l'ouvrage et est subdivisé en deux parties. La première partie présente la formulation mathématique du problème de contact tridimensionnel avec frottement en grandes transformations. On y retrouve, entre autres, l'ensemble des détails relatifs à l'écriture d'une cinématique exprimée dans la base convective, permettant ainsi, une représentation objective de la loi de frottement considérée. Par la suite, on présente l'ensemble des conditions d'admissibilité, la régularisation des lois de contact et de frottement et finalement, la formulation variationnelle associée au terme de contour obtenu au Chapitre 2, permettant ainsi la prise en compte du problème de contact dans l'expression du travail virtuel. Quant à la deuxième partie, celle-ci présente une spécialisation du modèle de contact préalablement défini au cas de l'interface toron-mors d'ancrage. En particulier, on y montre la possibilité de simuler la rentrée des encoches d'une clavette dans le toron par l'entremise d'une loi hyperbolique.

Pour ce qui est du Chapitre 4, celui-ci a comme principal objectif la présentation des formes discrètes des expressions variationnelles obtenues aux Chapitres 2 et 3. En particulier, on procède à la discrétisation en temps des lois de comportement élastoplastique et de frottement par un schéma d'intégration de type Euler implicite. Quant à la discrétisation spatiale, celle-ci est effectuée à l'aide de la méthode des éléments finis en considérant une description isoparamétrique générique. C'est dans cette section que l'on introduit la notion d'élément de contact. On conclut ce chapitre par la présentation, sous forme compacte, de l'expression nécessaire à la résolution non linéaire.

C'est au Chapitre 5 que sont présentés les divers aspects associés à la stratégie de résolution du problème de contact tridimensionnel avec frottement dans un contexte de grandes transformations. Plus spécifiquement, on met l'accent sur la présentation de diverses techniques permettant d'améliorer le taux de convergence de la méthode de Newton-Raphson lorsqu'utilisée en présence de lois non différentiables, de diminuer la mémoire nécessaire à la création du système linéarisé ainsi que les temps de calcul associés à la résolution de ce même système. C'est d'ailleurs dans cette partie que sont présentés les divers algorithmes associés à la prise en compte des zones candidates au contact. Finalement, on présente certains détails concernant la mise en œuvre informatique ainsi que les divers logiciels utilisés dans le cadre de cette étude.

Le Chapitre 6 met l'emphase sur la procédure de validation du modèle développé. Plusieurs exemples sont présentés afin de démontrer les performances ainsi que les possibilités du modèle

sous chacune de ces facettes. En parallèle à chacun de ces exemples, est menée une étude de sensibilité permettant de vérifier la stabilité du modèle sous différentes conditions.

Quant au Chapitre 7, celui-ci est dédié intégralement à l'étude du comportement déformationnel des dispositifs d'ancrage multitorons. Dans un premier temps, on présente une étude comparative des dispositifs d'ancrage LH19T15S du procédé LH de la société Spie-Batignolles (Spie-Batignolles, 1986), A19K15S du procédé K de la société Freyssinet (Freyssinet, 1988) ainsi que le CS 6-31 du procédé CS de la société VSL (VSL, 2000). En particulier, on s'attarde à l'évaluation de la flèche du bloc d'ancrage ainsi qu'à l'étendue de la plastification dans ce dernier. Finalement, afin de permettre une éventuelle vérification de l'influence de la prise en compte d'un système toron-mors d'ancrage dans les alvéoles coniques du dispositif LH19T15 comparativement à l'utilisation de simples plots tronconiques, on présente le calage, par réseau neuromimétique, des paramètres associés à la loi de comportement développée à l'interface toron-mors d'ancrage permettant ainsi, une représentation réaliste de l'enfoncement des encoches d'une clavette dans un toron.

Les conclusions et recommandations ainsi que les perspectives de recherche sont finalement présentées au Chapitre 8.

À ces chapitres s'ajoutent quatre annexes, venant ainsi compléter l'ensemble des notions présentées. En particulier, l'annexe A présente une méthode de décomposition polaire tridimensionnelle sans évaluation explicite des vecteurs propres. L'annexe B, quant à elle, présente les détails associés à l'évaluation des termes nécessaires à l'écriture de la formulation variationnelle associée au problème de contact avec frottement. Dans l'annexe C, on présente la prise en compte d'une méthode de lagrangien augmenté dans la formulation du problème de contact avec frottement défini au Chapitre 3. Pour ce qui est de l'annexe D, celle-ci présente la mise en équation du problème de projection d'une particule matérielle sur une surface quelconque discrétisée.

1.5 Aspects originaux

L'atteinte des objectifs associés à ce projet de recherche a mené à la réalisation de divers travaux que l'on peut qualifier d'originaux. Pour ce qui est de l'aspect modélisation du problème de contact avec frottement en grandes transformations, cette thèse constitue un ouvrage complet, regroupant l'ensemble des détails associés à la modélisation mathématique, à la discrétisation par éléments finis, à la résolution numérique ainsi qu'à la mise en œuvre informatique du problème. Plus spécifiquement, on peut noter les points originaux suivant:

- Généralisation et développement des formes discrètes proposées par Laursen et Simo (1993) permettant ainsi les discrétisations d'ordres supérieurs aux interfaces de contact;
- Modélisation du comportement à l'interface toron-mors d'ancrage à l'aide d'une spécialisation du modèle précédent;
- Développement d'un algorithme de recherche des points de contact basé sur la notion maître-esclave, pour des problèmes incluant plusieurs frontières candidates au contact;

- Apport de quelques éléments de réponses quant à la résolution des systèmes de grandes tailles non symétriques (tels que ceux générés dans cette thèse) à l'aide de méthodes itératives;
- Développement d'un module orienté objet, permettant la prise en compte du problème de contact avec frottement en grandes transformations.

Pour ce qui est de l'étude du comportement déformationnel des dispositifs d'ancrage multitorons, cette thèse présente bon nombre d'éléments de réponses originaux tels que:

- Présentation d'une étude comparative de trois dispositifs d'ancrage multitorons permettant de vérifier leur comportement en service et à l'ultime. La comparaison est essentiellement basée sur la déflexion du bloc d'ancrage, l'intensité et la distribution des efforts dans le dispositif ainsi que sur le volume plastifié;
- Calage des divers paramètres associés à la loi de comportement à l'interface toron-mors d'ancrage par une méthode de réseau neuromimétique appliquée à un dispositif d'ancrage monotoron.

Chapitre 2

Formulation tridimensionnelle des équations de la mécanique en grandes transformations

2.1 Généralités

L'objectif premier de ce chapitre est de présenter, et ce, de façon succincte, l'ensemble des équations régissant le comportement mécanique des solides massifs. Dans cette optique, nous présentons les quatre grands aspects liés à la mécanique des milieux continus, soit la cinématique, la cinétique, la formulation variationnelle ainsi que la loi de comportement. Chacun de ces thèmes est développé sans limitation permettant ainsi la représentation rigoureuse des grandes transformations. Il existe actuellement de nombreux ouvrages traitant des divers aspects de la mécanique des milieux continus. Ceux utilisés lors de l'élaboration de ce chapitre sont: Fafard (1998); Crisfield (1997, 1991); Batoz et Dhatt (1990); El Mouatassim (1989); Chung (1988); Charlier (1987); Malvern (1969).

2.2 Description des grandes transformations

Lorsqu'apparaissent, dans un solide quelconque, de grands déplacements (translations et rotations) et possiblement de grandes déformations, il n'est plus possible, comme dans le cas des petites transformations¹, de confondre les configurations non déformée et déformée. Un tel contexte est généralement présent dans l'ensemble des problèmes traités par l'industrie mécanique (emboutissage, étirage, filage, pliage, etc.), ainsi qu'en mécanique des sols (enfouissement de pieux). Cependant, il existe des situations dans lesquelles la justification de l'hypothèse des

1. On entend par transformation, l'ensemble des changements géométriques d'un corps solide résultant de l'application d'une sollicitation quelconque sur ce même corps.

grandes déformations semble difficilement justifiable en raison de l'amplitude modérée de la transformation (ex. dispositifs d'ancrage). Dans cette optique, il importe de se reporter à des observations expérimentales afin de porter un jugement pertinent quant à la prise en compte des grandes transformations dans la formulation.

Dès lors, il importe de porter une attention particulière quant au mécanisme de repérage des particules ainsi qu'au choix des diverses quantités tensorielles telles les déformations et les contraintes. Plus précisément, il importe d'utiliser des quantités permettant la bonne représentation quantitative des divers phénomènes agissant sur le solide et ce, indépendamment de l'ordre de grandeur de la transformation.

Au cours des années, plusieurs définitions quant à l'écriture des grandes transformations furent proposées et celles-ci peuvent être subdivisées en deux classes distinctes: soit celle définie en fonction de la configuration non-déformée appelée formulation lagrangienne ou matérielle et celle, fonction de la configuration déformée appelée formulation eulérienne ou encore spatiale.

Dans cette section, on met l'emphase sur le choix ainsi que l'aspect justificatif de l'écriture des diverses quantités tensorielles utilisées dans le cadre de cette thèse.

2.2.1 Cinématique d'un point matériel

La description géométrique des grandes transformations d'un solide quelconque implique le suivi de l'évolution de la position de chacune des particules le constituant et ce, tout au long de son mouvement noté φ fonction du temps.

2.2.1.1 Description géométrique du champ de déplacement

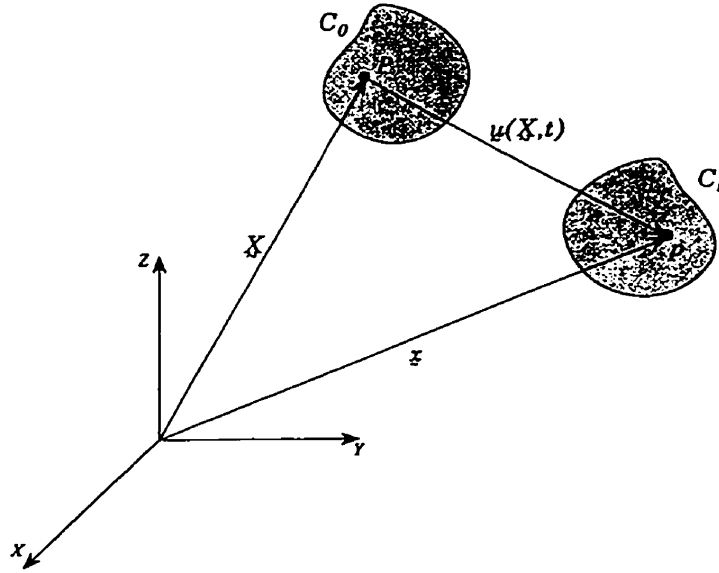
Soit une configuration de référence notée C_0 obtenue au temps t_0 dont on connaît la position de chacune des particules constituant le solide. Au temps t , le solide, sous sollicitation, adopte une seconde configuration, différente de la précédente, notée C_t . La description de la coordonnée actuelle (au temps t) de chacune des particules en fonction de sa coordonnée de référence \underline{X} est donnée par:

$$\underline{x} = \varphi(\underline{X}, t) \quad (2.1)$$

où φ donne la position globale \underline{x} à l'instant t d'une particule qui occupait la position \underline{X} à l'instant t_0 dans la configuration correspondante. Tel que mentionné précédemment, les grandes transformations impliquent des configurations C_0 et C_t *a priori* très différentes. Dès lors, la distinction entre les coordonnées matérielle \underline{X} et spatiale \underline{x} de chaque particule devient nécessaire.

Dans cette optique, définissons, tel que montré à la Figure 2.1, une particule occupant la position P dans C_0 et la position p dans C_t . La fonction φ définie par la relation (2.1) peut s'écrire sous la forme:

$$\varphi(\underline{X}, t) = \underline{X} + \underline{u}(\underline{X}, t) \quad (2.2)$$


 Figure 2.1 - Définition des configurations C_0 et C_t

où $\underline{u}(\underline{X}, t)$ représente le champ de déplacement associé à la dite particule sur l'intervalle $[0, t]$.

Pour décrire la transformation géométrique infinitésimale au voisinage de P , on introduit le tenseur gradient de déformation noté \mathbf{F} obtenu par différentiation de l'équation (2.2) évaluée à l'instant t tel que montré à la Figure 2.2. Sous formes indicelle et matricielle, ce tenseur s'écrit:

$$\mathbf{F}_{ij}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \varphi_i(\underline{X}, t)}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial Z} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \frac{\partial w}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial Y} & 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \end{bmatrix} = \mathbf{I} + \nabla \underline{u} \quad (2.3)$$

où \mathbf{I} représente le tenseur identité et $\nabla \underline{u}$, le tenseur gradient de déplacement obtenu par rapport aux coordonnées matérielles.

Selon (2.3), les relations biunivoques de transport de C_0 vers C_t s'écrivent:

$$d\underline{x} = \mathbf{F}(\underline{X}, t) d\underline{X} \quad \text{pour un vecteur} \quad (2.4a)$$

$$d\underline{s} = J(\underline{X}, t) \mathbf{F}^{-T}(\underline{X}, t) d\underline{S} \quad \text{pour une surface} \quad (2.4b)$$

$$dV = J(\underline{X}, t) dV \quad \text{pour un volume} \quad (2.4c)$$

avec $J(\underline{X}, t) = \det \mathbf{F}(\underline{X}, t)$.

On remarque, selon l'expression (2.3), que le tenseur \mathbf{F} recèle des informations à la fois sur les déformations et sur la rotation du solide au voisinage de la particule. Les lois de

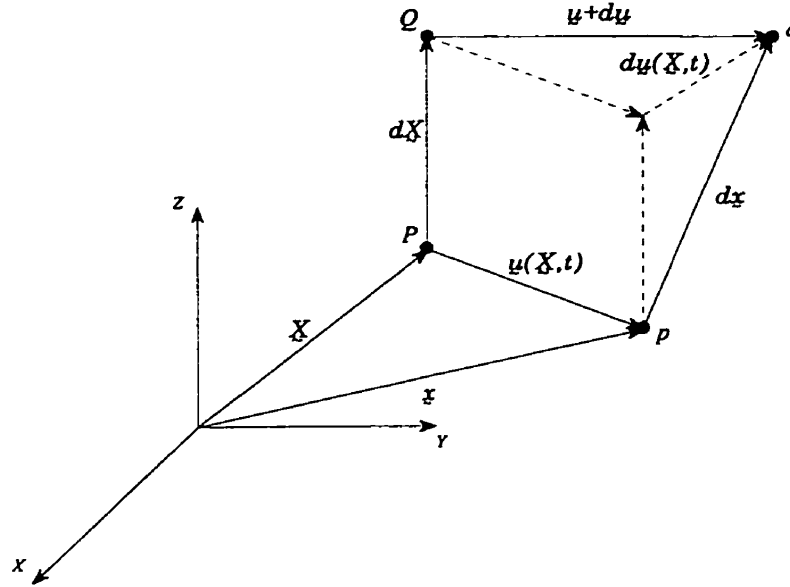


Figure 2.2 – Différentiation de la fonction φ au voisinage du point P

comportement définies en fonction de \mathbf{F} doivent donc l'être de manière à ce qu'une rotation de corps rigide n'engendre aucune modification de l'état de contrainte du solide en cause. De ce fait, il importe de construire des mesures de déformation permettant la bonne représentation d'un état à déformations nulles et ce, dans le cas d'une simple rotation de corps rigide.

2.2.1.2 Mesures de déformation

D'un point de vue pratique, on peut intuitivement définir une mesure de déformation par comparaison de la longueur du vecteur $d\tilde{X}$ du point P à celle du vecteur $d\tilde{x}$ de son homologue au point p après déformation. Pour ce faire, effectuons, dans un premier temps, la projection du vecteur $d\tilde{x}$ (Figure 2.2) sur lui-même; le carré de la longueur actuelle est ainsi défini par:

$$ds^2 = d\tilde{x} \cdot d\tilde{x} = d\tilde{X}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\tilde{X} = d\tilde{X}^T \mathbf{C} d\tilde{X} \quad (2.5)$$

où \mathbf{C} représente le tenseur des dilatations ou encore tenseur de Cauchy-Green droit. On remarque aisément qu'il s'agit d'un tenseur lagrangien puisque celui-ci opère sur des quantités vectorielles définies sur C_0 . En contrepartie, l'expression de la longueur du vecteur \tilde{X} en fonction de quantités vectorielles dans C_t permet d'obtenir l'expression du tenseur eulérien \mathbf{B}^{-1} tel que:

$$dS^2 = d\tilde{X} \cdot d\tilde{X} = d\tilde{x}^T \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} d\tilde{x} = d\tilde{x}^T \mathbf{B}^{-1} d\tilde{x} \quad (2.6)$$

où $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ représente le tenseur de Cauchy-Green gauche.

L'expressions (2.5) permet ainsi l'évaluation de la variation de longueur dans un contexte lagrangien par la relation:

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= d\tilde{X}^T(\mathbf{C} - \mathbf{I}) d\tilde{X} \\ &= 2 d\tilde{X}^T \mathbf{E} d\tilde{X} \end{aligned} \quad (2.7)$$

où

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.8)$$

représente le tenseur de Green-Lagrange. L'homologue eulérien du tenseur \mathbf{E} est obtenu de façon similaire par la relation:

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= d\tilde{x}^T(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) d\tilde{x} \\ &= 2 d\tilde{x}^T \mathbf{A} d\tilde{x} \end{aligned} \quad (2.9)$$

où

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (2.10)$$

représente le tenseur d'Almansi. Il importe de noter que le coefficient 2 apparaissant dans les expressions (2.7) et (2.9) est lié à l'obtention d'une définition standard des composantes du tenseur de déformation. De plus, dans un contexte de petits déplacements, on se doit de retrouver les formes usuelles associées aux hypothèses simplificatrices des termes de deuxième ordre.

Une autre façon d'éliminer les rotations de corps rigide de la mesure de déformation est d'effectuer une décomposition polaire du tenseur \mathbf{F} en une rotation de corps rigide orthogonale \mathbf{R} et un tenseur de déformation pure symétrique et défini positif tel que montré à la Figure 2.3.

La décomposition polaire est très largement utilisée dans la modélisation des problèmes en grandes transformations car dans un tel contexte, les parties symétrique et anti-symétrique du tenseur gradient de déplacement ne permettent plus la décomposition additive de $\nabla \tilde{u}$ en une rotation et une déformation pure due aux dimensions finies du gradient de déplacement. Dans cette optique, on peut démontrer (Crisfield, 1991) que si la rotation \mathbf{R} permet la rotation des axes principaux du tenseur \mathbf{C} dans \mathbf{C}_0 vers le repère principal lié à \mathbf{B}^{-1} dans \mathbf{C}_t , il existe deux tenseurs notés \mathbf{U} et \mathbf{V} permettant de satisfaire la relation:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (2.11)$$

où \mathbf{U} et \mathbf{V} représentent respectivement les tenseurs de déformation pure droit et gauche. Selon la relation (2.11), on s'aperçoit aisément que les tenseurs \mathbf{E} et \mathbf{A} représentent de bonnes mesures de déformation car ceux-ci sont strictement définis en fonction des tenseurs \mathbf{U} et \mathbf{V} .

La méthode associée au calcul du tenseur \mathbf{U} et éventuellement \mathbf{V} demande l'évaluation des valeurs et vecteurs propres de \mathbf{C} car celui-ci possède les mêmes directions principales que le

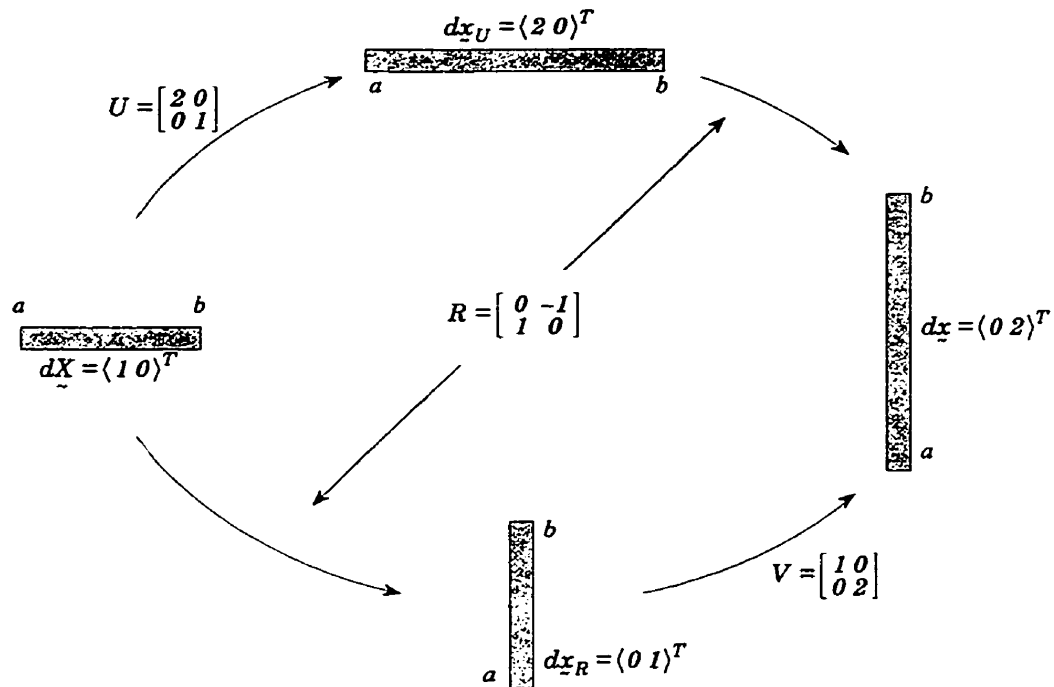


Figure 2.3 – Décomposition polaire du tenseur F

tenseur U . Il peut donc s'avérer très coûteux et risqué² d'effectuer un tel calcul. Dans le cadre de cette thèse, on utilise une méthode de calcul du tenseur U sans évaluation des directions principales de C . Celle-ci est présentée en détail à l'Annexe A.

2.2.1.3 Expression du taux de variation de la déformation

Jusqu'à présent, la définition des divers tenseurs de déformation fut présentée en termes des composantes du champ de déplacement \underline{u} entre les configurations C_0 et C_t . Tel que montré sur la Figure 2.1, ce vecteur est constitué d'une droite joignant les points P et p et ce, peu importe l'expression exacte du champ \underline{u} sur l'intervalle $[0, t]$. Il s'agit là d'une hypothèse tout à fait justifiée dans le cadre d'analyses linéaires ou encore, lorsque l'intervalle de temps est suffisamment petit permettant ainsi de respecter cette linéarité de comportement.

Dans un contexte de grandes transformations dans lequel le solide subit de grandes rotations et de grandes déformations, couplées à l'utilisation de lois de comportement de nature incrémentale, il importe de définir des quantités de type «taux de variation» permettant leur intégration dans le temps.

2. Le risque émane principalement du calcul des vecteurs propres dans le contexte où les composantes du tenseur C sont très faibles.

Pour ce faire, considérons la variation par rapport au temps de l'expression (2.9) ayant menée au tenseur \mathbf{A} tel que:

$$\frac{d}{dt}(ds^2 - dS^2) = \frac{d}{dt}(ds^2) = d\dot{\underline{x}} \cdot d\underline{x} + d\underline{x} \cdot d\dot{\underline{x}} \quad (2.12)$$

où $d\dot{\underline{x}}$ est obtenue par l'évaluation du taux de variation de l'équation (2.4a) tel que:

$$d\dot{\underline{x}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{F} d\underline{X}) = \dot{\mathbf{F}} d\underline{X} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} d\underline{x} = \mathbf{L} d\underline{x} \quad (2.13)$$

où \mathbf{L} représente le tenseur gradient de vitesse de déformation. En injectant la relation (2.13) dans (2.12), on obtient l'expression:

$$\frac{d}{dt}(ds^2) = d\underline{x}^T (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) d\underline{x} = 2 d\underline{x}^T \mathbf{D} d\underline{x} \quad (2.14)$$

où \mathbf{D} constitue le tenseur taux de déformation³ sur l'intervalle $[0,t]$ et est défini par:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T). \quad (2.15)$$

Comme on peut le voir, le tenseur \mathbf{D} , de nature eulérienne, représente la partie symétrique du tenseur \mathbf{L} . En contre partie, il est possible de définir un tenseur correspondant à la partie anti-symétrique de \mathbf{L} tel que:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T). \quad (2.16)$$

où \mathbf{W} constitue le tenseur taux de rotation. En utilisant les relations (2.11) et (2.13), l'expression (2.15) devient:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \mathbf{R} (\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-T}\dot{\mathbf{U}}^T) \mathbf{R}^T \quad (2.17)$$

permettant de constater sa bonne représentation du taux de déformation face à une rotation de corps rigide. Pour ce qui est de \mathbf{W} , (2.16) devient:

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \frac{1}{2} \mathbf{R} (\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} - \mathbf{U}^{-T}\dot{\mathbf{U}}^T) \mathbf{R}^T \quad (2.18)$$

montrant ainsi sa décomposition en une vitesse de rotation de corps rigide $\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T$ et d'une partie due au cisaillement. Comme on le verra plus loin, \mathbf{W} , tout comme la rotation de corps rigide \mathbf{R} obtenue de (2.11) sont largement utilisés dans l'intégration des lois de comportement en grandes transformations pour la définition des repères corotationnels nécessaires à l'intégration des lois de comportement.

3. On peut voir dans Malvern (1969) que \mathbf{D} s'apparente à la déformation naturelle (ou logarithmique) car il définit sa vitesse d'élongation par unité de longueur dans C_t .

Intuitivement, il peut paraître intéressant de construire un tenseur taux de déformation en évaluant directement la variation des tenseurs \mathbf{E} et \mathbf{A} . L'utilisation du tenseur \mathbf{E} permet effectivement d'obtenir le pendant lagrangien du tenseur \mathbf{D} lié par la relation:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F}. \quad (2.19)$$

Cependant, la nature lagrangienne de $\dot{\mathbf{E}}$ rend moins intéressante son utilisation dans un contexte incluant de grandes transformations. Pour ce qui est du tenseur \mathbf{A} , le calcul de son taux de variation mène à l'expression:

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{D} - (\mathbf{A}\mathbf{L} + \mathbf{L}^T \mathbf{A}) \quad (2.20)$$

fournissant, tout comme \mathbf{D} , une mesure eulérienne du taux de déformation. Cependant, celui-ci ne constitue pas une bonne mesure car il ne s'annule pas dans le cas d'une rotation de corps rigide précédée d'une pré-déformation.

Compte-tenu de son caractère eulérien (qui se prête bien à une modélisation des problèmes en grandes transformations), il paraît justifié d'arrêter notre choix sur le tenseur taux de déformation \mathbf{D} . Dans cette optique, la déformation totale, notée ϵ , est obtenue en intégrant sur l'intervalle $[0, t]$ tel que:

$$\epsilon_{ij} = \int_0^t D_{ij} dt \quad (2.21)$$

2.2.2 Cinétique au voisinage d'un point matériel

Tout comme les déformations, les contraintes présentent dans un solide peuvent être exprimées en fonction de diverses configurations. Il importe donc, compte tenu du contexte d'utilisation, d'effectuer un choix judicieux permettant leur bonne représentation.

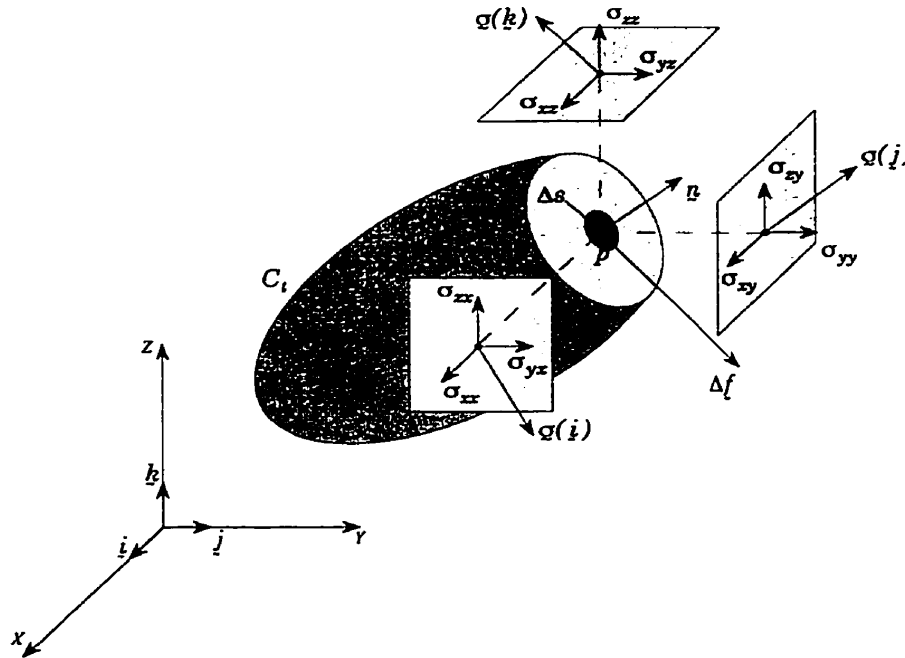
2.2.2.1 Description du tenseur des contraintes

Considérons, tel que montré à la Figure 2.4, un vecteur force Δf agissant sur un élément de surface Δs de normale \tilde{n} au point p dans C_t . Le vecteur contrainte agissant en ce même point est défini par le postulat de Cauchy tel que:

$$\tilde{\sigma}(p, \tilde{n}) = \tilde{\sigma}(\tilde{n}) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{f}}{\Delta s}. \quad (2.22)$$

Il existe donc une infinité de vecteurs contraintes agissant au point p . De ce fait, évaluons les vecteurs contraintes s'exerçant sur les facettes de normale \tilde{i} , \tilde{j} et \tilde{k} , du repère cartésien usuel (Figure 2.4). Leurs composantes sont définies par:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}(\tilde{i}) &= \sigma_{xx}\tilde{i} + \sigma_{yx}\tilde{j} + \sigma_{zx}\tilde{k} \\ \tilde{\sigma}(\tilde{j}) &= \sigma_{xy}\tilde{i} + \sigma_{yy}\tilde{j} + \sigma_{zy}\tilde{k} \\ \tilde{\sigma}(\tilde{k}) &= \sigma_{xz}\tilde{i} + \sigma_{yz}\tilde{j} + \sigma_{zz}\tilde{k} \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$


 Figure 2.4 – Facette de normale \underline{n} dans C_t

ou encore, sous forme tensorielle telle que:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

où σ est le tenseur des contraintes de Cauchy⁴. Selon (2.23) et (2.24), il est maintenant possible de définir tout vecteur contraintes s'appliquant sur une facette quelconque de normale \underline{n} par la relation:

$$\underline{\sigma}(\underline{n}) = \sigma \underline{n}. \quad (2.25)$$

Écrire l'égalité des relations (2.22) et (2.25) permet d'obtenir la force agissant sur la facette telle que:

$$d\underline{f} = \sigma \underline{n} ds. \quad (2.26)$$

Par un transport, à l'aide des relations (2.4) de l'élément de surface orienté $\underline{n} ds$ sur la configuration C_0 , on définit le tenseur de Piola-Kirchhoff de première espèce tel que:

$$d\underline{f} = J \sigma \mathbf{F}^{-T} \underline{N} dS = \underline{\Pi} \underline{N} dS \quad (2.27)$$

4. Notons que ce tenseur est aussi appelé tenseur des contraintes vraies car on réfère à la surface actuelle.

représentant la force agissant sur $d\tilde{s}$ par unité de surface exprimée dans C_0 . Finalement, en transportant le vecteur $d\tilde{f}$ dans \tilde{C}_0 , on obtient le tenseur de Piola-Kirchhoff de seconde espèce défini par:

$$d\tilde{F} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{\Pi} N d\tilde{S} = \mathbf{S} N d\tilde{S}. \quad (2.28)$$

Les équations (2.26), (2.27) et (2.28) permettent de définir la relation entre les divers tenseurs présentés par:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{\Pi} \mathbf{F}^T = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T. \quad (2.29)$$

On constate aisément que dans un contexte de petites déformations ($\mathbf{F} \approx \mathbf{R} \Rightarrow J \approx 1$), l'ensemble des tenseurs définis en (2.29) permettent une bonne mesure de la contrainte agissant sur le solide car ceux-ci sont tous équivalents à une rotation près. Cependant, dans un contexte de grandes transformations, l'amplitude du gradient de déplacement nécessite l'utilisation de tenseurs eulériens permettant, la véritable définition de l'état de contraintes en tout point par l'entremise de la loi de comportement.

2.2.2.2 Équilibre du milieu déformable

Considérons, dans la configuration C_t , un solide dans \mathfrak{R}^3 , de domaine intérieur ω et de surface extérieure γ tel que montré à la Figure 2.5. Le solide, contraint à un champ de déplacement cinématiquement admissible, est soumis à diverses sollicitations extérieures telles les forces volumiques f_y , appliquées sur ω , surfaciques f_σ , appliquées sur γ_σ ainsi que les déplacements imposés \tilde{u} appliqués sur γ_u . Sous l'action de ces efforts, apparaissent des efforts à l'interne du solide permettant à celui-ci de s'équilibrer.

À partir du principe de la conservation de la quantité de mouvement appliqué à un élément de volume dv au voisinage du point p (Figure 2.1) et en faisant abstraction des forces d'accélération, on obtient, en coordonnées cartésiennes:

$$\left. \begin{array}{ll} (\text{div } \boldsymbol{\sigma}^T)^T + f_y = 0 & \text{dans } \omega \\ \boldsymbol{\sigma} \tilde{n} = f_\sigma & \text{sur } \gamma_\sigma \\ \tilde{u} = \tilde{u} & \text{sur } \gamma_u \end{array} \right\} \quad (2.30)$$

où div représente l'opérateur de divergence. L'équilibre des moments autour des axes passant par le point p , en l'absence de couples répartis dans ω conduit à la symétrie du tenseur de Cauchy tel que $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$.

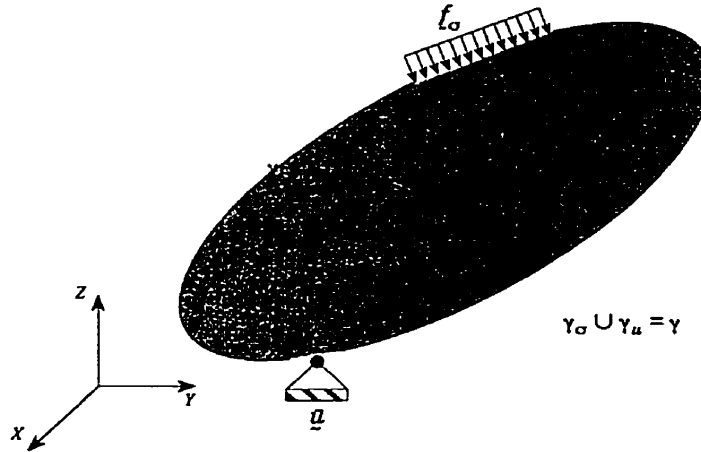


Figure 2.5 – Représentation schématique d'un solide à l'équilibre

2.3 Écriture de la loi de comportement

Tel que décrit dans la section précédente, l'équilibre d'un solide soumis à des sollicitations extérieures, implique la détermination des efforts se développant à l'interne. Ces efforts, obtenus de l'intégration du tenseur des contraintes sur l'intervalle $[0, t]$, dépendent des lois de comportement traduisant le comportement physique du solide.

Pour être valides, ces lois doivent satisfaire diverses exigences découlant principalement de considérations physiques et thermodynamiques. Entre autres, la loi de comportement doit relier des quantités tensorielles et satisfaire le principe de l'indifférence matérielle.

Dans cette section, nous nous limitons à la présentation des lois de comportement associées aux milieux isothermes et pour lesquelles la cinématique est entièrement définie par le tenseur gradient de déformation \mathbf{F} telle que (Malvern (1969)):

$$\sigma(t) = \mathcal{G}_{t \leq \tau}(\mathbf{F}(\tau)) \quad (2.31)$$

où \mathcal{G} représente la fonctionnelle de réponse du matériau. L'expression générale (2.31) couvre l'ensemble des matériaux usuels incluant les lois dépendantes de l'histoire du chargement.

2.3.1 Objectivité des quantités tensorielles

Considérons deux repères R et R' rattachés respectivement aux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' et $\mathbf{Q}(t)$, la rotation permettant le passage de R à R' . Les relations associées au changement de

référentiel s'écrivent ⁵:

$$\underline{p}' = g(t) + Q(t)\underline{p} \quad \text{position} \quad (2.32a)$$

$$\underline{x}' = Q(t)\underline{x} \quad \text{vecteur} \quad (2.32b)$$

$$\underline{T}' = Q(t)\underline{T}Q^T(t) \quad \text{tenseur du 2e ordre} \quad (2.32c)$$

$$\underline{F}' = Q(t)\underline{F} \quad \text{tenseur bi-points} \quad (2.32d)$$

Par les relations (2.32c) et (2.32d), il est aisé d'exprimer, dans un référentiel tournant, les diverses quantités tensorielles définies dans les sections précédentes. Les tenseurs respectant les relations (2.32) sont, par définition des tenseurs objectifs et peuvent donc être utilisés directement dans l'écriture d'une loi de comportement. Pour les tenseurs non objectifs, l'apport de termes correctifs, tenant compte de la rotation du solide devient nécessaire afin d'éviter qu'une rotation de corps rigide n'entraîne une modification de l'état de contraintes.

Par définition, les tenseurs lagrangiens sont objectifs car ceux-ci sont exprimés sur la configuration de référence. Cependant, aucun de ces tenseurs n'entre dans l'écriture de la formulation proposée, qui est constituée exclusivement de tenseurs eulériens nécessitant, par le fait même, quelques vérifications quant à leur objectivité.

Tenseur taux de déformation D :

Considérons le tenseur D exprimé dans R' à l'aide de (2.15) tel que:

$$D' = \frac{1}{2}(L' + L'^T).$$

En remplaçant L' par $\dot{F}'F'^{-1}$, F' par (2.32d) et considérant l'orthogonalité de Q tel que:

$$QQ^T = I \implies \dot{Q}Q^T + Q\dot{Q}^T = 0,$$

on obtient:

$$D' = QDQ^T$$

démontrant ainsi l'objectivité du tenseur D .

Tenseur des contraintes de Cauchy σ :

À l'aide de (2.29), le tenseur de Cauchy s'écrit dans \mathcal{R}' :

$$\sigma' = \frac{1}{J}F'S'F'^T.$$

La nature lagrangienne de S' implique: $S' = S$. En remplaçant F' par (2.32d), on obtient:

$$\sigma' = Q\sigma Q^T \quad (2.33)$$

démontrant ainsi l'objectivité du tenseur σ .

5. Ces relations sont simples à obtenir et sont présentées en détail dans El Mouatassim (1989)

Tenseur taux de contraintes de Cauchy $\dot{\sigma}$:

En effectuant la variation de (2.33) par rapport au temps, on obtient:

$$\dot{\sigma}' = \overline{\dot{Q}\sigma Q^T} = \dot{Q}\sigma Q^T + Q\dot{\sigma}Q^T + Q\sigma\dot{Q}^T = Q(\dot{\sigma} + Q^T\dot{Q}\sigma + \sigma\dot{Q}^TQ)Q^T$$

On voit donc que $\dot{\sigma}'$ est différent de $Q\dot{\sigma}Q^T$ et par le fait même, non objectif.

Cette dernière constatation implique donc l'application d'une stratégie permettant l'obtention d'un tenseur taux de contrainte objectif. Dans ce contexte, ces dérivées rotationnelles⁶ permettent la bonne représentation du taux de contraintes et s'expriment selon un repère orthonormé tournant par rapport au repère d'observation (avec la matière) animé d'une vitesse de rotation Ω tel que:

$$\dot{\sigma}^{obj} = \dot{\sigma} + \sigma\Omega - \Omega\sigma. \quad (2.34)$$

2.3.2 Principe de l'indifférence matérielle

Selon le principe de l'indifférence matérielle, la fonctionnelle obtenue de la relation (2.31) doit être invariante et cela, pour tout changement de référentiel utilisé pour observer le mouvement du solide. Dans cette optique, une simple rotation de (2.31) doit permettre d'écrire:

$$\dot{\sigma}' = \mathcal{G}(F') = \mathcal{G}(QF) = Q\mathcal{G}(F)Q^T. \quad (2.35)$$

En considérant $Q = R^T$, R étant la rotation propre provenant de (2.11), la relation (2.35) devient:

$$\sigma = R^T\mathcal{G}(U)R. \quad (2.36)$$

Le principe de l'indifférence matérielle exige donc que la définition d'une loi de comportement utilisant la contrainte de Cauchy s'écrive sous forme d'une fonctionnelle arbitraire fonction du tenseur U et d'une rotation propre comme le montre l'expression (2.36). Cette dernière constatation montre bien qu'une rotation de corps rigide «entraîne» avec elle les contraintes de Cauchy et que selon la relation (2.17), le tenseur σ est bel et bien conjugué au tenseur taux de déformation D .

2.3.3 Loi de comportement élastoplastique

La grande majorité des matériaux considérés dans les problèmes que nous nous proposons de traiter dans cette thèse, possèdent un comportement élastoplastique avec écrouissage isotrope. On dit qu'un matériau entre en phase plastique lorsqu'apparaissent des déformations permanentes après avoir retiré toute sollicitation externe de la pièce. Ces déformations irréversibles sont en fait, des déformations plastiques.

6. Bien qu'il existe une grande variété de dérivées objectives, nous nous en tenons aux dérivées de type rotationnel.

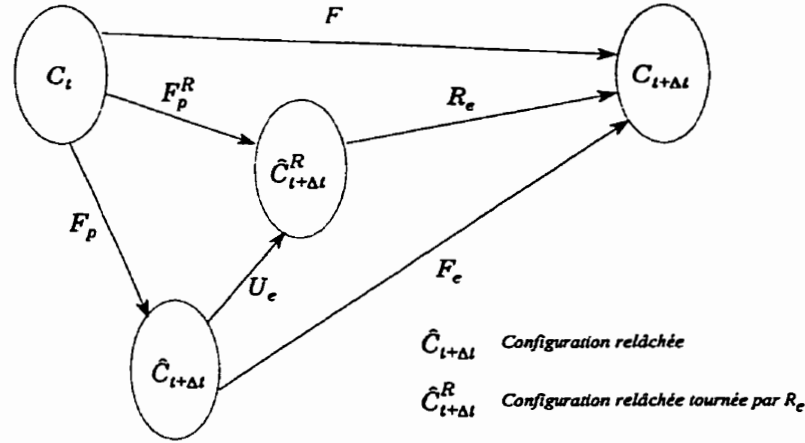


Figure 2.6 – Définition de la configuration relâchée

2.3.3.1 Contexte d'utilisation de la loi

Lors de la description d'une loi de comportement élastoplastique, la difficulté majeure réside dans la description conforme de la cinématique des grandes déformations élastoplastiques. En effet, la décomposition additive du tenseur taux de déformation D en une partie élastique D_e et plastique D_p n'est rigoureusement plus valable en grandes déformations. Cependant, l'utilisation d'une configuration localement relâchée, telle que montrée à la Figure 2.6, permet, en partie, de lever cette restriction car celle-ci ne permet pas de découpler le taux de déformation plastique de la rotation élastique R_e .

On peut démontrer cette dernière constatation en décomposant le taux de déformation F en une partie élastique F_e et plastique F_p (2.6), permettant ainsi d'exprimer (2.13) tel que:

$$\begin{aligned} L &= \dot{F}F^{-1} = \left(\dot{F}_e F_p + F_e \dot{F}_p \right) F_p^{-1} F_e^{-1} \\ &= \dot{F}_e F_e^{-1} + F_e \dot{F}_p F_p^{-1} F_e^{-1} \\ &= L_e + F_e L_p F_e^{-1}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Selon (2.37), le tenseur D s'écrit:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} (L_e + L_e^T) + \frac{1}{2} \left((F_e L_p F_e^{-1}) + (F_e L_p F_e^{-1})^T \right) \\ &= D_e + \frac{1}{2} \left((F_e L_p F_e^{-1}) + (F_e L_p F_e^{-1})^T \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

On constate donc que, même dans un contexte de petites déformations élastiques⁷ ($F_e \approx R_e$), la configuration relâchée ne permet toujours pas l'additivité des tenseurs taux de déformation. Dans cette optique, Sidoroff (1985) propose d'imposer une condition d'invariance par

7. Il s'agit là d'une hypothèse tout à fait acceptable compte tenu des matériaux utilisés dans le cadre de cette thèse.

changement de référentiel à la configuration relâchée. Cette condition implique nécessairement l'invariance de la loi de comportement dans tout changement de la configuration relâchée. Dès lors, le gradient de déformation élastique devient égal au tenseur identité permettant ainsi d'écrire (2.38) sous la forme:

$$\underline{D} = \underline{D}_e + \frac{1}{2} (\underline{L}_p + \underline{L}_p^T) = \underline{D}_e + \underline{D}_p. \quad (2.39)$$

2.3.3.2 Description vectorielle de la loi

L'expression usuelle d'une loi de comportement du type (2.35) est obtenue par une relation du 4^e ordre entre le tenseur taux de contrainte objectif et le tenseur taux de déformation élastique (expression incrémentale de la loi de Hooke généralisée) tel que:

$$(\dot{\sigma})_{ij}^{obj} = \mathcal{C}_{ijkl}(\underline{D}_e)_{kl}. \quad (2.40)$$

où \mathcal{C} est le tenseur constitutif d'élasticité d'ordre 4. Quoique très compacte, cette forme se prête mal à l'écriture des formes matricielles nécessaires à la résolution numérique. De ce fait, exprimons les tenseurs σ et \underline{D} sous la forme vectorielle:

$$\underline{\underline{D}} = \langle D_{xx}, D_{yy}, D_{zz}, 2D_{xy}, 2D_{yz}, 2D_{xz} \rangle^T \quad (2.41a)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \langle \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz} \rangle^T \quad (2.41b)$$

permettant ainsi la réécriture de (2.40) sous la forme:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{obj} = \underline{\underline{C}} \underline{\underline{D}}_e \quad (2.42)$$

où $\underline{\underline{C}}$ est le tenseur constitutif d'élasticité d'ordre 2 usuel en mécanique des solides⁸.

Selon les dernières définitions, et exprimant le taux de déformation plastique en accord avec la loi d'écoulement de Prandtl-Reuss sur un matériau à potentiel associé⁹ selon laquelle:

$$\underline{\underline{D}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\underline{\underline{\sigma}}, \sigma_e(k))}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}, \quad (2.43)$$

l'expression (2.42) permet d'écrire:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{obj} = \underline{\underline{C}} \left(\underline{\underline{D}} - \dot{\lambda} \frac{\partial f(\underline{\underline{\sigma}}, \sigma_e(k))}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right) \quad (2.44a)$$

$$f(\underline{\underline{\sigma}}, \sigma_e(k)) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} f(\underline{\underline{\sigma}}, \sigma_e(k)) = 0 \quad (2.44b)$$

$$\dot{f}(\underline{\underline{\sigma}}, \sigma_e(k)) = \frac{\partial f(\underline{\underline{\sigma}}, \sigma_e(k))}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \frac{\partial f(\underline{\underline{\sigma}}, \sigma_e(k))}{\partial \sigma_e} \frac{\partial \sigma_e(k)}{\partial k} \dot{k} = 0 \quad (2.44c)$$

8. Les définitions standards de $\underline{\underline{C}}$ sont présentées en détail dans Batoz et Dhett (1990).

9. Un matériau est à potentiel associé lorsque son potentiel plastique correspond au critère d'écoulement f .

où λ représente le multiplicateur plastique, f , la fonction scalaire définissant le critère d'écoulement plastique fonction de l'état de contrainte et σ_e , la limite d'écoulement qui elle, est fonction d'un paramètre quelconque k , représentant l'évolution de l'écrouissage. Dans un contexte sans écrouissage, $\sigma_e(k) = cste$. Finalement, la condition (2.44c), dite de persistance, est une conséquence de (2.44b) permettant de vérifier que l'état de contrainte demeure bel et bien sur la surface d'écoulement lorsqu'il y a plastification.

Comme on peut le constater, aucune précaution, quant au respect de l'indifférence matérielle, n'a été prise dans l'écriture des équations différentielles (2.44). En effet, l'écriture de la loi dans le repère tournant permet, entre autres, de faire abstraction de l'intensité ainsi que de la nature des transformations.

2.3.3.3 Spécialisation au critère de von Mises

La loi (2.44) permet la bonne représentation de tout matériau isotrope à potentiel associé. Dans le contexte actuel d'utilisation d'une telle loi, considérons les matériaux de type «métaux» tels l'acier, l'aluminium, etc. Il a été démontré expérimentalement que les déformations plastiques liées aux métaux se produisent à volume constant. Cette incompressibilité plastique se traduit par l'utilisation de critères d'écoulement fonction du tenseur déviateur des contraintes. En particulier, considérons le critère de von Mises¹⁰ défini par:

$$f(\underline{\sigma}, \sigma_e(k)) = \sqrt{3II_{\sigma^d}} - \sigma_e(\varepsilon_{ps}) = \sigma_{vm} - \sigma_e(\varepsilon_{ps}) \quad (2.45)$$

où II_{σ^d} représente le second invariant du tenseur déviateur des contraintes de Cauchy $\underline{\sigma}^d$ tel que:

$$II_{\sigma^d} = \frac{1}{6} ((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)), \quad (2.46)$$

et ε_{ps} , la déformation plastique équivalente totale sur l'intervalle $[0, t]$ telle que:

$$\varepsilon_{ps} = \int \dot{\varepsilon}_{ps} dt \quad (2.47)$$

où $\dot{\varepsilon}_{ps}$ représente le taux de déformation plastique équivalente et est obtenu, au sens de von Mises, par la relation:

$$\dot{\varepsilon}_{ps} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\mathbf{D}_p : \mathbf{D}_p)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.48)$$

En se reportant sur les conditions d'un essai uniaxial et selon l'expression (2.43), on obtient $\dot{\varepsilon}_{ps} = D_{p_{xx}} = \dot{\lambda}$ permettant ainsi de réécrire la condition de persistance (2.44c) selon laquelle:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \dot{\underline{\sigma}} - H \dot{\lambda} = \underline{a}^T \dot{\underline{\sigma}} - H \dot{\lambda} = 0 \quad (2.49)$$

10. En résumé, le critère de von Mises stipule que la plastification d'un matériau survient lorsque l'énergie de distorsion devient égale à l'énergie de distorsion maximale obtenue d'un essai de traction sur une éprouvette constituée de ce matériau.

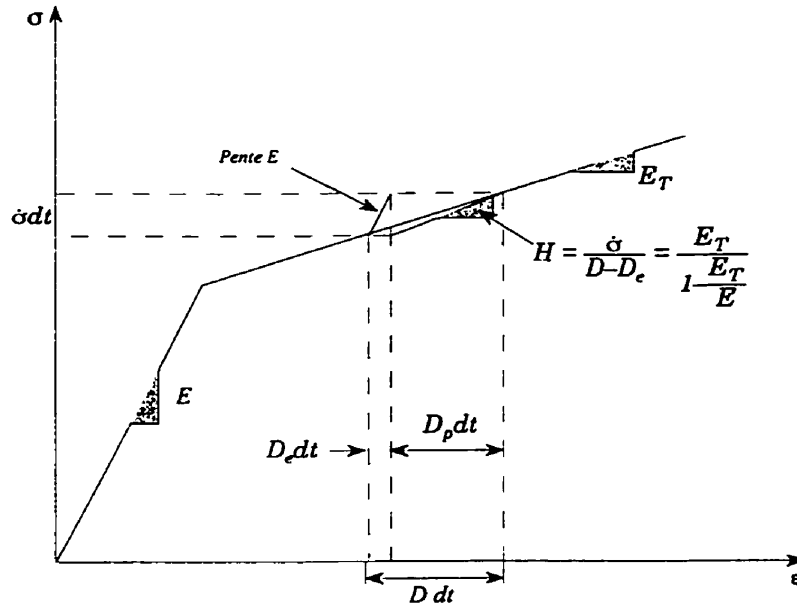


Figure 2.7 – Courbe contrainte-déformation

où H représente la pente d'écroissage sur la courbe uniaxiale $\sigma - \varepsilon_p$ tel que montré à la Figure 2.7. En éliminant λ de (2.44a) à l'aide de (2.49), on obtient la version finale de la forme incrémentale de la loi de comportement telle que :

$$\tilde{\dot{\sigma}}^{obj} = \mathbf{C} \left(\mathbf{I} - \frac{\underline{a} \underline{a}^T \mathbf{C}}{\underline{a}^T \mathbf{C} \underline{a} + H} \right) \underline{D} = \mathbf{C}_{ep} \underline{D} \quad (2.50)$$

2.4 Principe des travaux virtuels (PTV)

L'ensemble des mesures tensorielles définies dans les sections précédentes permettent l'établissement de diverses formulations du principe variationnel associé aux problèmes de la mécanique des solides. Cependant, certaines restrictions liées au contexte des grandes transformations ainsi qu'à la nature eulérienne des lois de comportement non linéaires que nous projetons d'utiliser, favorisent l'adoption d'une écriture impliquant le tenseur des contraintes de Cauchy.

2.4.1 Expression de la forme intégrale

Le point de départ de cette formulation variationnelle est la méthode des résidus pondérés pour laquelle, le résidu est associé aux équations d'équilibre (2.30) tel que:

$$\underline{R} = (\operatorname{div} \sigma)^T + f_y = \underline{0}. \quad (2.51)$$

En utilisant, comme pondération, un champ de déplacement virtuel $\delta \varphi$, cinématiquement admissible ($\delta \varphi = \underline{0}$ sur γ_u), on obtient, comme expression du principe des travaux virtuels dans C_t , l'expression:

$$W(\delta \varphi, \varphi_t) = \int_{\omega} \delta \varphi \cdot (\operatorname{div} \sigma) d\omega + \int_{\omega} \delta \varphi \cdot f_y d\omega = 0. \quad (2.52)$$

Après intégration par parties du premier terme de (2.52) et application du théorème de Green¹¹, on obtient la forme intégrale:

$$W(\delta \varphi, \varphi_t) = W_{int}(\delta \varphi, \varphi_t) + W_{ext}(\delta \varphi, \varphi_t) = 0 \quad (2.53)$$

où

$$W_{int}(\delta \varphi, \varphi_t) = \int_{\omega} \operatorname{tr}(\sigma \delta \mathbf{D}) d\omega \quad (2.54)$$

$$W_{ext}(\delta \varphi, \varphi_t) = W_v(\delta \varphi, \varphi_t) + W_{\sigma}(\delta \varphi, \varphi_t) \quad (2.55)$$

représentent respectivement les contributions interne et externe au travail virtuel. Dans (2.54), $\delta \mathbf{D}$ représente le tenseur taux de déformation associé au champ de déplacement virtuel $\delta \varphi$. Pour ce qui est de (2.55), celle-ci exprime à la fois les contributions volumiques et surfaciques définies par:

$$W_v(\delta \varphi, \varphi_t) = - \int_{\omega} \delta \varphi \cdot f_y d\omega \quad (2.56a)$$

$$W_{\sigma}(\delta \varphi, \varphi_t) = - \int_{\gamma_{\sigma}} \delta \varphi \cdot f_{\sigma} d\gamma_{\sigma}. \quad (2.56b)$$

Comme on peut le constater, l'intégrale de surface (2.56b) recèle l'ensemble des efforts appliqués sur la surface du solide. Par conséquent, il semble naturel d'y extraire le travail virtuel provenant des efforts engendrés par la mise en contact du solide ω avec un autre solide en un point de la frontière $\gamma_c \in \gamma_{\sigma}$ des efforts usuels appliqués sur $\gamma_s \in \gamma_{\sigma}$. L'intégrale de surface peut donc être réécrite telle que:

$$W_{\sigma}(\delta \varphi, \varphi_t) = W_s(\delta \varphi, \varphi_t) + W_c(\delta \varphi, \varphi_t) \quad (2.57)$$

11. Le théorème de Green permet le passage d'une intégrale de volume en une intégrale volume jumelée à une intégrale de contour.

avec

$$W_s(\delta \varphi, \varphi_t) = - \int_{\gamma_s} \delta \varphi \cdot f_s d\gamma_s \quad (2.58a)$$

$$W_c(\delta \varphi, \varphi_t) = - \int_{\gamma_c} \delta \varphi \cdot f_c d\gamma_c \quad (2.58b)$$

et où f_s et f_c représente respectivement les efforts de surface¹² et de contact.

Finalement, les formes vectorielles des tenseurs σ et D définis par (2.41), permettent de réécrire (2.54) selon un formalisme bien adapté à la résolution numérique tel que:

$$W_{int}(\delta \varphi, \varphi_t) = \int_{\omega} \delta \tilde{D} \cdot \tilde{\sigma} d\omega \quad (2.59)$$

2.4.2 Taux de variation de la forme intégrale

La forme générale des équations de la mécanique en grandes transformations se caractérise par deux types de non-linéarités. Les non-linéarités de type géométrique sont dues à la forte dépendance au champ de déplacement, de la forme variationnelle (2.53). Par exemple, on peut citer les problèmes de contact où les projections sont, à priori, inconnues. Finalement, il y a les non-linéarités de type matériel présentent lorsque la réponse du ou des matériaux en cause dépend de l'histoire des déformations. Ces non-linéarités impliquent donc une linéarisation de la forme intégrale (2.53) permettant ainsi la résolution complète du problème. D'un point de vue rigoureux, on se doit d'établir le taux de variation de la forme intégrale W , noté \dot{W} et l'intégrer sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$ afin d'établir l'équilibre au temps $t + \Delta t$. Dans cette optique, effectuons un développement en série de Taylor du premier ordre au voisinage de t tel que:

$$W(\delta \varphi, \varphi_{t+\Delta t}) = W(\delta \varphi, \varphi_t) + \Delta W(\delta \varphi, \varphi_t) = 0 \quad (2.60)$$

où

$$\Delta W(\delta \varphi, \varphi_t) = \int_t^{t+\Delta t} \dot{W}(\delta \varphi, \varphi_t) dt \quad (2.61)$$

représente la linéarisation de W sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$.

Dans ce qui suit, on s'attarde à l'écriture de \dot{W} qui, appliqué à (2.53), peut être réécrit sous la forme:

$$\dot{W}(\delta \varphi, \varphi_t) = \dot{W}_{int}(\delta \varphi, \varphi_t) + \dot{W}_{ext}(\delta \varphi, \varphi_t). \quad (2.62)$$

Dans un premier temps, il importe de mentionner qu'en l'absence de sollicitations non conservatives, le terme \dot{W}_{ext} n'apporte aucune contribution à la forme linéarisée et ce, en

12. Dans ce qui suit, le terme effort de surface exclut la contribution provenant du contact.

raison de son invariance sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$. Cependant, la présence d'efforts de contact dans (2.55), par l'entremise de (2.58b), implique une telle contribution due à l'évolution des conditions de contact à l'interface. La prise en compte de ce terme sera traitée de façon particulière au Chapitre 4.

L'évaluation de \dot{W}_{int} nécessite le transport, à l'aide de (2.4), de (2.54) vers C_0 afin de faire apparaître toutes les composantes fonction du temps. L'expression (2.54) devient:

$$W_{int}(\delta \varrho, \varrho_t) = \int_{\Omega} \text{tr}(\sigma \delta D) J d\Omega. \quad (2.63)$$

La variation de (2.63) s'écrit donc:

$$\dot{W}_{int}(\delta \varrho, \varrho_t) = \int_{\Omega} \left(\text{tr}(\dot{\sigma} \delta D) J + \text{tr}(\sigma \delta \dot{D}) J + \text{tr}(\sigma \delta D) \dot{J} \right) d\Omega. \quad (2.64)$$

En appliquant les manipulations appropriées (voir Fafard (1998)), on obtient l'expression (2.64) exprimée sur C_t tel que:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{int}(\delta \varrho, \varrho_t) &= \int_{\omega} (\text{tr}(\dot{\sigma} \delta D)) d\omega \\ &+ \int_{\omega} (\text{tr}(\sigma \delta L) \text{tr}(D) - \text{tr}(\delta L^T \sigma L^T)) d\omega. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Considérant la forme vectorielle $\underline{\underline{L}}$ du tenseur gradient de vitesse de déformation L , définie par:

$$\underline{\underline{L}} = \langle \dot{\varphi}_{x,x}, \dot{\varphi}_{x,y}, \dot{\varphi}_{x,z}, \dot{\varphi}_{y,x}, \dot{\varphi}_{y,y}, \dot{\varphi}_{y,z}, \dot{\varphi}_{z,x}, \dot{\varphi}_{z,y}, \dot{\varphi}_{z,z} \rangle^T \quad (2.66)$$

ainsi que celles des tenseurs σ et D telles que définies par (2.41), l'expression (2.65) devient:

$$\dot{W}_{int}(\delta \varrho, \varrho_t) = \int_{\omega} \delta D^T \underline{\underline{\sigma}} d\omega + \int_{\omega} \delta \underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{L}} d\omega \quad (2.67)$$

avec

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} & 0 & \sigma_{xx} & 0 & 0 & 0 & \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} & 0 & 0 & -\sigma_{xx} & 0 & -\sigma_{xz} & 0 & 0 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} & 0 & 0 & 0 & \sigma_{xz} & 0 & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & 0 \\ 0 & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} & 0 & \sigma_{xy} & 0 & 0 & 0 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} & 0 & 0 & -\sigma_{xy} & 0 & -\sigma_{yz} & 0 & 0 & \sigma_{yy} \\ \sigma_{yz} & 0 & 0 & 0 & \sigma_{yz} & 0 & -\sigma_{xy} & -\sigma_{yy} & 0 \\ 0 & -\sigma_{yz} & -\sigma_{zz} & 0 & \sigma_{xz} & 0 & 0 & 0 & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} & 0 & 0 & -\sigma_{xz} & 0 & -\sigma_{zz} & 0 & 0 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} & 0 & 0 & 0 & \sigma_{zz} & 0 & -\sigma_{xz} & -\sigma_{yz} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

Finalement, en remplaçant $\tilde{\sigma}$ par l'expression de la loi de comportement (2.50) dans (2.67), on obtient l'expression finale du taux de travail virtuel interne tel que:

$$\dot{W}_{int}(\delta \varphi, \varrho_t) = \int_{\omega} \delta \underline{D}^T \underline{C}_{ep} \underline{D} d\omega \quad (2.69a)$$

$$+ \int_{\omega} \delta \underline{L}^T \underline{\bar{\sigma}} \underline{L} d\omega. \quad (2.69b)$$

Comme on peut le constater, les non-linéarités présentent dans (2.69a) sont strictement liées à l'intégration de la loi de comportement sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$. La forte dépendance de cette loi aux quantités cinématiques rend son évaluation très délicate. Pour ce qui est de l'expression (2.69b), celle-ci reflète les non-linéarités dues à l'influence des contraintes initiales ainsi qu'à la variation de volume du solide exprimée par le tenseur \underline{L} . Une fois l'état de contraintes connu, on peut évaluer ce terme sans difficulté particulière. On note que la non-symétrie présente dans \dot{W} , émane exclusivement de ce terme.

Chapitre 3

Formulation du problème de contact tridimensionnelle avec frottement en grandes transformations

3.1 Généralités

La modélisation du problème de mécanique des solides en grandes transformations implique la distinction entre les diverses configurations que peuvent prendre chacune des particules en fonction du temps. Dans le contexte où deux de ces particules entre en contact, il devient nécessaire de prendre en compte les grands déplacements relatifs que celles-ci peuvent subir l'une par rapport à l'autre. Finalement, la présence de grandes transformations, implique l'utilisation, dans l'écriture des lois de contact et de frottement, de quantités tensorielles objectives afin d'éviter, pour un simple mouvement de corps rigide, des modifications dans les conditions de contact à l'interface.

Dans cette optique, ce chapitre présente les divers aspects liés à la modélisation tridimensionnelle du problème de contact avec frottement dans un contexte de grandes transformations. Plus spécifiquement, on s'attarde à l'écriture d'une formulation permettant la bonne représentation du comportement physique et mécanique à l'interface de deux particules candidates au contact et pouvant subir, l'une par rapport à l'autre, de grands déplacements relatifs. Il importe de noter que les développements présentés furent grandement inspirés des travaux de Laursen et Simo (1993); Klarbring (1995); Simo et Laursen (1992) et Laursen (1994). Ceux-ci proposent, entre autres, une écriture de la formulation du problème de contact avec frottement sur le milieu continu. Ce choix permet l'obtention d'une formulation indépendante de l'aspect discrétisation spatiale et ainsi, d'obtenir une perspective d'implémentation informatique beaucoup plus générale. De plus, le respect de l'objectivité est maintenu par une écriture de la cinématique liée au frottement dans une base convective (transportée avec la transformation). En plus d'être directement applicable à la discrétisation, cette dernière

stratégie permet d'éviter la construction de taux de frottement compliqués. Finalement, on présente, une spécialisation de la formulation proposée, dans le cas d'un comportement en petits déplacements relatifs avec lois de contact et de frottement particulières, adaptée à la modélisation des interfaces toron-mors d'ancrage.

3.2 Notation utilisée

Considérons, dans la configuration C_0 , deux solides¹ déformables dans \mathfrak{R}^3 , de domaine Ω^1 et Ω^2 et bornés par les surfaces extérieures Γ^1 et Γ^2 telles que montrées à la Figure 3.1. On admet que les deux solides sont dans un état tel qu'aucun effort dû à la présence de contact ne prévaut sur Γ^1 et Γ^2 . Contraint à des champs de déplacements cinématiquement admissibles du type (2.1) et définis par:

$$\varphi^i : \Omega^i \times \mathcal{I} \rightarrow \mathfrak{R}^3, \quad i = 1, 2, \quad (3.1)$$

les deux solides se retrouvent éventuellement dans une configuration C_t avec $t \in \mathcal{I} = [0, T]$, telle qu'une portion de leur frontière respective entre en contact, générant par le fait même un champ de contraintes à l'interface des deux frontières concernées. Dans C_0 , l'ensemble des dites particules candidates au contact, forment respectivement les frontières $\Gamma_c^1 \in \Gamma^1$ et $\Gamma_c^2 \in \Gamma^2$. Dans C_t , la position de chacune des frontières est donnée par:

$$\gamma_c^i = \varphi^i(\Gamma_c^i, t), \quad i = 1, 2. \quad (3.2)$$

où $(\cdot)^i$ réfère au solide i . Dans ce qui suit, on limite notre attention à l'ensemble des particules matérielles $P^1 \in \Gamma_c^1$ et $P^2 \in \Gamma_c^2$ définies respectivement par les vecteurs position $\underline{\underline{X}}^1$ et $\underline{\underline{X}}^2$. Dans C_t , la position de ces mêmes particules, notées $p^1 \in \gamma_c^1$ et $p^2 \in \gamma_c^2$, est donnée par les vecteurs:

$$\underline{\underline{x}}^i = \varphi^i(\underline{\underline{X}}^i, t), \quad i = 1, 2. \quad (3.3)$$

Plus spécifiquement, la formulation proposée implique un statut non symétrique des frontières Γ_c^i . En effet, un des deux solides étant considéré comme l'obstacle, contraint, de façon unilatérale, le comportement déformationnel de l'autre solide par l'intermédiaire de sa surface candidate au contact. Un tel contexte mène directement à l'utilisation d'une gestion des interfaces de type maître-esclave dans laquelle la frontière définissant l'obstacle fait office de frontière maître. Dans ce qui suit, désignons Γ_c^2 et Γ_c^1 comme étant respectivement les frontières maître et esclave. Le point de départ de la formulation implique donc un suivi du mouvement relatif de l'ensemble des particules esclaves P^1 par rapport à la surface maître Γ_c^2 .

Cette particularité, dans la définition de Γ_c^2 , implique la connaissance d'informations supplémentaires quant à sa définition géométrique ainsi qu'à son évolution dans le temps. Pour ce

1. Bien que l'on ne s'attarde qu'au cas de deux solides distincts, les développements qui suivent permettent la prise en compte du contact multi-corps ainsi que de l'auto-contact.

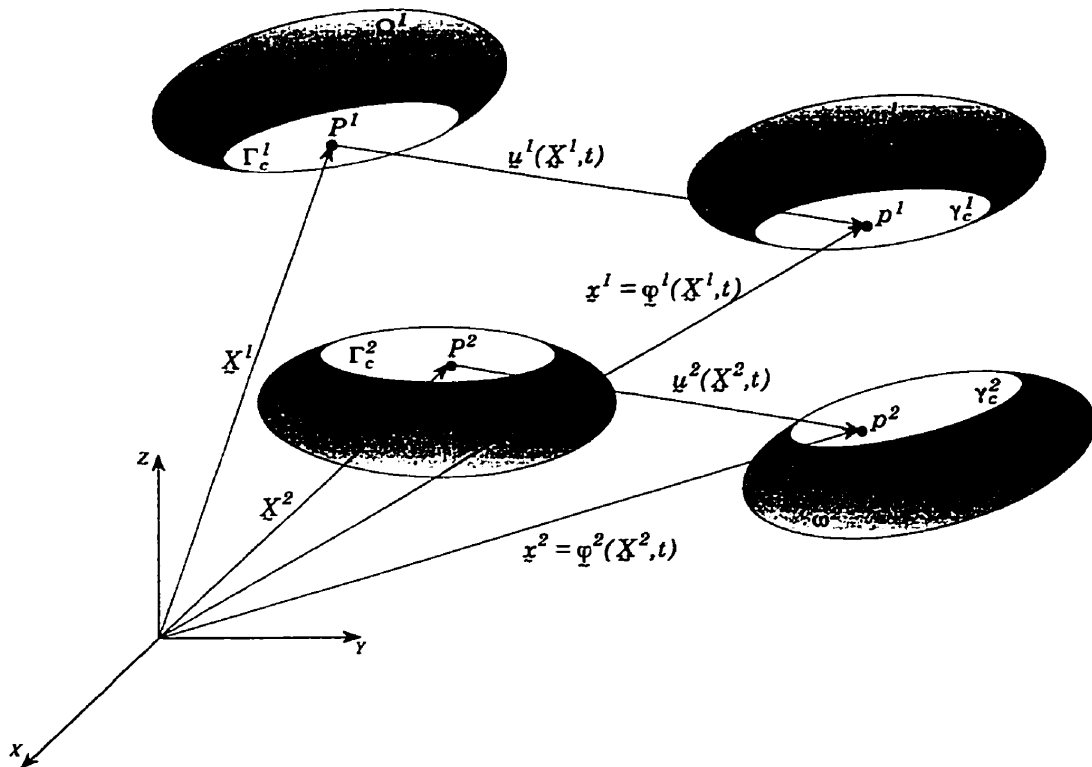


Figure 3.1 – Notation utilisée pour le problème de contact avec frottement

faire, on introduit la notion de surface paramétrée telle que montrée à la Figure 3.2 et définie par:

$$\underline{\Psi}_0(\xi) : \mathcal{A} \rightarrow \Gamma_c^2, \quad (3.4)$$

où \mathcal{A} constitue un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 . Toute particule exprimée dans \mathcal{A} est définie par le vecteur position $\xi = (\xi^1, \xi^2)$. Un transport convectif de la paramétrisation dans C_t permet d'exprimer la frontière $\gamma_c^2 = \varphi^2(\Gamma_c^2, t)$ par la fonction composite:

$$\underline{\Psi}(\xi, t) = \varphi^2(\underline{X}^2, t) \circ \underline{\Psi}_0(\xi). \quad (3.5)$$

En particulier, tous les vecteurs position \underline{X}^2 et \underline{x}^2 peuvent s'exprimer selon cette paramétrisation sous la forme:

$$\underline{X}^2 = \underline{\Psi}_0(\xi) \quad (3.6a)$$

$$\underline{x}^2 = \underline{\Psi}(\xi, t). \quad (3.6b)$$

Finalement, on admet que cette paramétrisation est suffisamment régulière permettant l'obtention de toutes les dérivées nécessaires à l'écriture de la formulation. Au Chapitre 5, on discute de cette hypothèse, des conditions d'admissibilité ainsi que des conséquences relatives à sa violation.

3.3 Cinématique d'une particule candidate au contact

La description de la cinématique à l'interface de deux solides candidats au contact comprend deux éléments distincts, nécessaires à l'obtention d'une écriture consistante des conditions d'admissibilité.

Le premier élément fait appel à la notion d'impénétrabilité de la matière. D'un point de vue mathématique, l'impénétrabilité implique l'écriture d'une quantité permettant la bonne représentation de la distance entre deux particules candidates au contact. Une certaine analogie peut être établie avec la mécanique classique des solides compressibles dans laquelle la fonction écart fait office de déformation équivalente.

Le deuxième élément implique directement la loi de frottement. Une description des phénomènes liés à cet aspect implique une évaluation des vitesses tangentielles relatives entre les diverses particules définissant l'interface de contact. À priori, une telle description peut paraître seulement nécessaire dans le contexte où les particules sont mécaniquement² en contact. Cependant, certains modèles rendent nécessaire l'évaluation de ces vitesses tangentielles dans le contexte où les particules sont soit en contact imminent, soit en état de violation des conditions d'impénétrabilité. En comparaison avec la fonction écart, la vitesse tangentielle relative peut être vue comme un taux de déformation.

² Le terme mécaniquement en contact relève des conditions physiques et implique des conditions de contact et de frottement exactes.

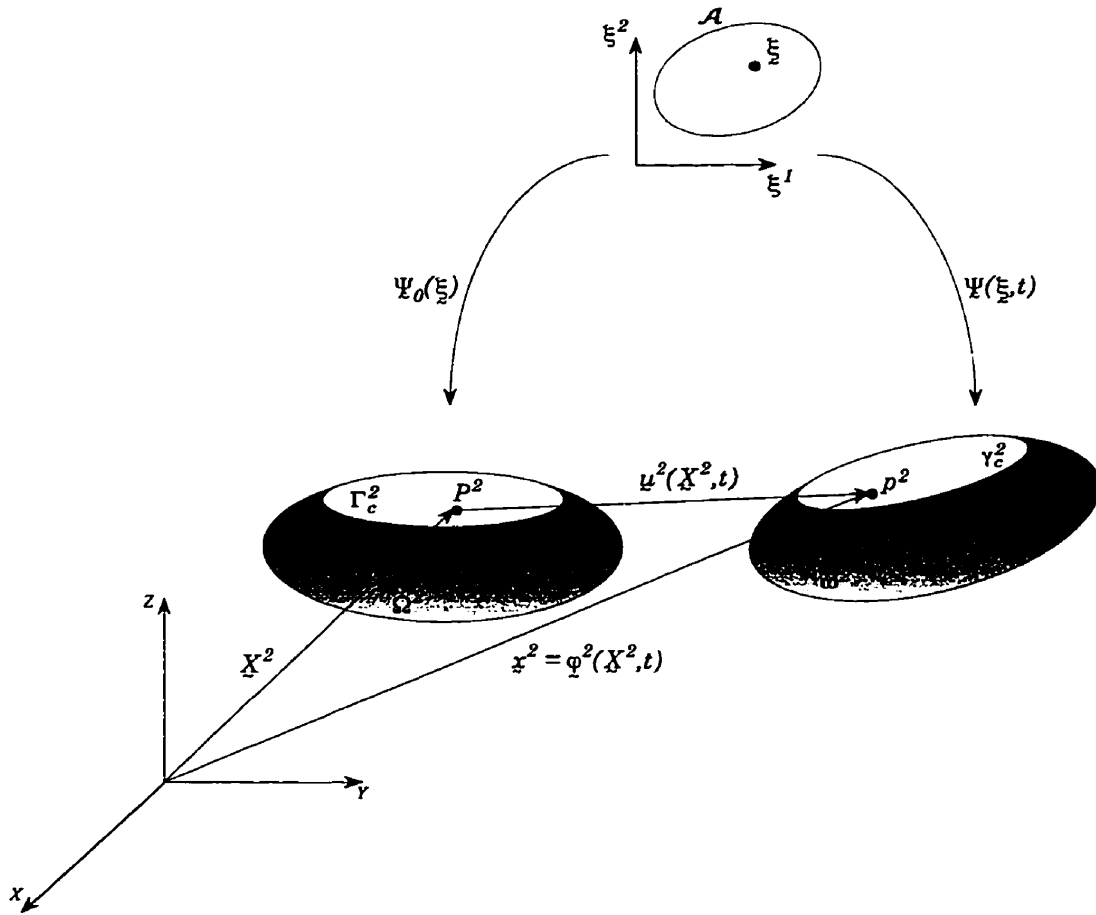


Figure 3.2 - Paramétrisation des surfaces Γ_c^2 et γ_c^2

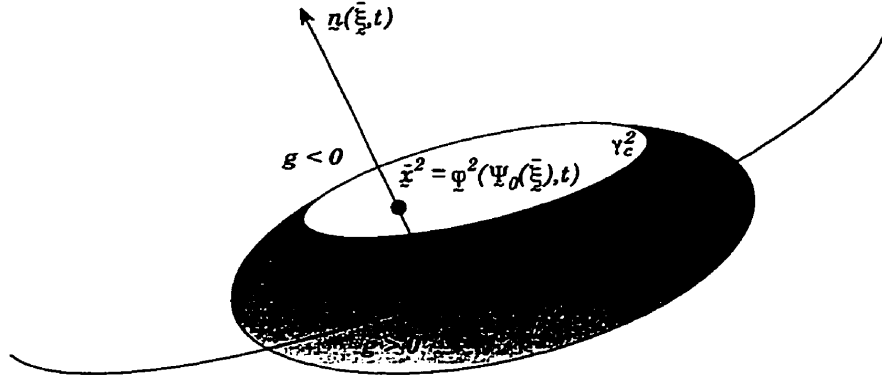


Figure 3.3 – Représentation schématique de la fonction $g(\tilde{X}^1, t)$

3.3.1 Définition de la fonction écart

La définition de la fonction écart, notée $g(\tilde{X}^1, t)$, est obtenue en fonction des champs $\varphi^1(\cdot, t)$ et $\varphi^2(\cdot, t)$ pour tout $P^1 \in \Gamma_c^1$ tel que:

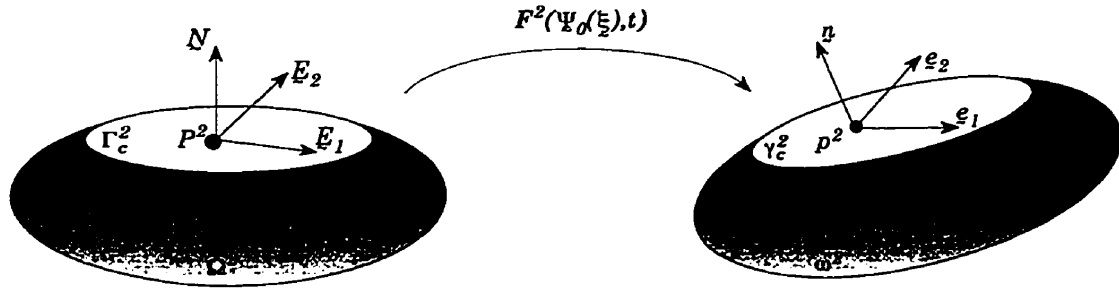
$$g(\tilde{X}^1, t) = S(g(\tilde{X}^1, t)) \left| g(\tilde{X}^1, t) \right| \quad (3.7a)$$

avec

$$\left| g(\tilde{X}^1, t) \right| = \min_{P^2 \in \Gamma_c^2} \left\| \varphi^1(\tilde{X}^1, t) - \varphi^2(P^2, t) \right\| \quad (3.7b)$$

$$S(g(\tilde{X}^1, t)) = \begin{cases} -1 & \text{si } \varphi^1(\tilde{X}^1, t) \text{ est admissible} \\ 1 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (3.7c)$$

Il est clair que la définition de $g(\tilde{X}^1, t)$ constitue un problème de minimisation et représente, par (3.7b), la plus petite distance entre la position de la particule p^1 définie par $\varphi^1(\tilde{X}^1, t)$ et la surface maître γ_c^2 , telle que montrée à la Figure 3.3. À ce stade-ci, on admet que p^1 est suffisamment près de γ_c^2 pour permettre l'obtention d'une solution unique, notée $\tilde{x}^2 = \varphi^2(\Psi_0(\tilde{\xi}), t)$. On remarque aisément que \tilde{x}^2 est une fonction du vecteur position $\varphi^1(\tilde{X}^1, t)$, ainsi que de la représentation géométrique de la frontière maître $\varphi^2(\Gamma_c^2)$.


 Figure 3.4 – Représentation des vecteurs de base \underline{E}_α et \underline{e}_α

3.3.2 Définition de la base convective

Comme on peut le constater, les deux éléments présents dans l'écriture de la cinématique à l'interface impliquent la distinction entre les composantes normales et tangentielles au point de contact. Pour ce faire, définissons une base convective permettant une telle distinction.

L'expression, dans un contexte tridimensionnel, des vecteurs de base associés aux frontières Γ_c^2 et γ_c^2 est obtenue par évaluation de la dérivée directionnelle des relations (3.6) par rapport aux coordonnées paramétriques (3.4) telle que:

$$\underline{E}_\alpha(\xi) = \underline{\Psi}_{0,\alpha}(\xi) \quad (3.8a)$$

$$\underline{e}_\alpha(\xi, t) = \frac{\partial \varphi^2}{\partial X^2}(\underline{\Psi}_0(\xi), t) \underline{\Psi}_{0,\alpha}(\xi) = \underline{F}^2(\underline{\Psi}_0(\xi), t) \underline{E}_\alpha(\xi) \quad (3.8b)$$

pour $\alpha = 1, 2$ et où \underline{F}^2 représente le tenseur gradient de déformation correspondant au champ φ^2 défini par la relation (3.1), et $(\cdot)_{,\alpha}$, la dérivée par rapport à la coordonnée paramétrique³ ξ^α .

De façon plus spécifique, la solution du problème de minimisation (3.7b) dans l'espace paramétrique \mathcal{A} , peut être obtenue en imposant la condition d'orthogonalité entre le vecteur défini par les positions $\varphi^1(X^1, t)$ et $\varphi^2(\underline{\Psi}_0(\xi), t)$ et les vecteurs de base telle que:

$$\left[\varphi^1(X^1, t) - \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\xi), t) \right] \cdot \underline{e}_\alpha(\xi, t) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad (3.9)$$

permettant ainsi la détermination du vecteur $\bar{\xi} = (\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2)$ associé à la condition d'orthogonalité. Dans ce contexte, et selon la définition donnée à la Figure 3.4, les vecteurs de base (3.8) deviennent:

$$\underline{T}_\alpha = \underline{E}_\alpha(\bar{\xi}) \quad (3.10a)$$

$$\underline{\tau}_\alpha = \underline{e}_\alpha(\bar{\xi}, t). \quad (3.10b)$$

3. Dans la suite de ce document, les lettres grecques (indices et exposants) réfèrent aux composantes de la base paramétrique.

Il importe de noter que dans l'écriture des relations (3.10), on omet d'expliciter la dépendance des vecteurs \tilde{T}_α et $\tilde{\tau}_\alpha$ envers \tilde{X}^1 et t . Cependant, cette dernière existe en raison de l'opération de minimisation (3.7b) permettant ainsi d'écrire: $\tilde{\xi}(\tilde{X}^1, t)$. Par exemple, les vecteurs \tilde{T}_α constituent une base qui est convectée en raison du déplacement relatif du point P^1 par rapport à Γ_c^2 .

Utilisant la relation (3.10b), on obtient l'expression spatiale de la normale en $\tilde{\xi}$ telle que définie par:

$$\tilde{n}(\tilde{\xi}, t) = \frac{\tilde{\tau}_1 \times \tilde{\tau}_2}{\|\tilde{\tau}_1 \times \tilde{\tau}_2\|}. \quad (3.11)$$

Il importe de mentionner que l'orientation du vecteur \tilde{n} est entièrement conditionnée par la nature de la paramétrisation $\tilde{\Psi}_0$ et $\tilde{\Psi}$. Dans les développements à venir, on admet que la paramétrisation choisie permet d'obtenir une normale sortante à γ_c^2 telle que montrée à la Figure 3.4. L'expression (3.11) permet donc d'exprimer la fonction écart (3.7a) en fonction du vecteur normal au point $\tilde{\xi}$ tel que:

$$\left[\varphi^1(\tilde{X}^1, t) - \varphi^2(\tilde{\Psi}_0(\tilde{\xi}), t) \right] = -g(\tilde{X}^1, t) \tilde{n}(\tilde{\xi}, t). \quad (3.12)$$

En complément aux vecteurs de base (3.10), on définit les vecteurs de base duale \tilde{T}^β tels que:

$$\tilde{T}_\alpha \cdot \tilde{T}^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (3.13)$$

où δ_α^β représente le symbole de Kronecker. Les vecteurs \tilde{T}^α sont généralement obtenus de la relation:

$$\tilde{T}^\alpha = \mathbf{M}^{\alpha\beta} \tilde{T}_\beta \quad (3.14)$$

où $\mathbf{M}^{\alpha\beta}$ représente la métrique associée à la base duale et définie comme étant l'inverse de la métrique $\mathbf{M}_{\alpha\beta}$ définie par:

$$\mathbf{M}_{\alpha\beta} = \tilde{T}_\alpha \cdot \tilde{T}_\beta. \quad (3.15)$$

Tout comme pour la définition des vecteurs de base (3.10b), les expressions (3.13), (3.14) et (3.15) peuvent être réécrites sur la frontière γ_c^2 en considérant la même notation.

Finalement, on réfère le lecteur aux ouvrages de Chung (1988) et Malvern (1969) pour de plus amples détails sur les diverses propriétés associées aux vecteurs de base.

3.3.3 Expression du champ de vitesses relatives

Conséquent à la définition de la base convective, l'écriture des mesures de déformation à l'interface implique la prise en compte de la vitesse relative entre la particule esclave p^1 et la surface maître γ_c^2 , au point $\bar{\xi}$ obtenu de l'expression (3.9). Pour ce faire, considérons la variation par rapport au temps de la relation (3.12) tel que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^1}{\partial t}(X^1, t) - \frac{\partial \varphi^2}{\partial t}(\Psi_0(\bar{\xi}), t) - \frac{\partial \varphi^2}{\partial X^2}(\Psi_0(\bar{\xi}), t) \Psi_{0,\alpha}(\bar{\xi}) \frac{\partial \bar{\xi}^\alpha}{\partial t} = \\ - \frac{\partial g}{\partial t} n(\bar{\xi}, t) - g \left(\frac{\partial n}{\partial t}(\bar{\xi}, t) + \frac{\partial n}{\partial \bar{\xi}^\alpha} \frac{\partial \bar{\xi}^\alpha}{\partial t} \right), \quad \alpha = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

avec la convention de sommation usuelle. Dans (3.16),

$$\underline{V}^1(X^1, t) = \frac{\partial \varphi^1}{\partial t}(X^1, t) \quad (3.17a)$$

$$\underline{V}^2(\bar{\xi}, t) = \frac{\partial \varphi^2}{\partial t}(\Psi_0(\bar{\xi}), t) \quad (3.17b)$$

représentent respectivement la vitesse, des particules p^1 et p^2 au point $\bar{\xi}$. Utilisant la définition des vecteurs de base (3.10), l'expression (3.16) peut être réécrite sous la forme:

$$\underline{V}^1(X^1, t) - \left(\underline{V}^2(\bar{\xi}, t) - g \frac{\partial n}{\partial t}(\bar{\xi}, t) \right) = \frac{\partial \bar{\xi}^\alpha}{\partial t} \tau'_\alpha - \frac{\partial g}{\partial t} n(\bar{\xi}, t). \quad (3.18)$$

où τ'_α est défini par:

$$\tau'_\alpha = \tau_\alpha - g \frac{\partial n}{\partial \bar{\xi}^\alpha} \quad (3.19)$$

et représente une nouvelle définition des vecteurs de base en associant à la définition actuelle τ_α , la composante convective associée à l'évolution de la position de la normale. Il importe de noter que cette base possède les mêmes propriétés de transformation que les vecteurs τ_α , permettant ainsi la même définition du vecteur normal n .

Pour une interprétation correcte du terme de gauche de (3.18), il importe de noter que le terme $g \frac{\partial n}{\partial t}(\bar{\xi}, t)$ représente la vitesse à l'extrémité libre d'une barre de longueur g alignée selon la direction $n(\bar{\xi}, t)$ et attachée à la surface maître au point p^2 . Dans cette optique, le terme de gauche représente donc la vitesse relative entre la particule p^1 et l'extrémité de cette barre où le terme entre parenthèse implique à la fois la vitesse de la particule p^2 et la vitesse de rotation de la barre, tel que montré à la Figure 3.5.

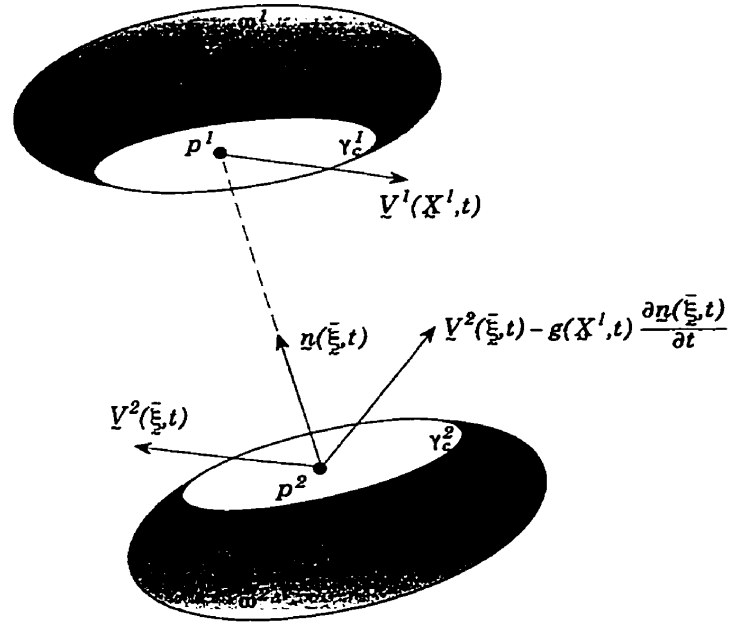


Figure 3.5 – Représentation du champ de vitesse à l'interface de contact

3.3.4 Écriture des mesures de déformation

Tel que mentionné précédemment, l'expression des conditions d'admissibilité requiert la définition d'une quantité possédant les caractéristiques intrinsèques d'une déformation. Comme on peut le constater, la fonction écart $g(\underline{X}^1, t)$ constitue une telle mesure et peut être obtenue directement par application du produit scalaire de l'expression (3.12) avec le vecteur normal $\underline{n}(\bar{\xi}, t)$ tel que:

$$g(\underline{X}^1, t) = -\underline{n}(\bar{\xi}, t) \cdot \left[\varphi^1(\underline{X}^1, t) - \varphi^2(\Psi_0(\bar{\xi}), t) \right]. \quad (3.20)$$

L'expression du taux de (3.20) est obtenue en prenant le produit scalaire de (3.18) avec $\underline{n}(\bar{\xi}, t)$. Considérant l'orthogonalité des vecteurs τ'_{α} et $\frac{\partial \underline{n}}{\partial t}(\bar{\xi}, t)$ avec $\underline{n}(\bar{\xi}, t)$, on obtient l'expression:

$$\frac{\partial g}{\partial t}(\underline{X}^1, t) = -\underline{n}(\bar{\xi}, t) \cdot \left[\underline{V}^1(\underline{X}^1, t) - \underline{V}^2(\bar{\xi}, t) \right]. \quad (3.21)$$

Finalement, la vitesse tangentielle relative est obtenue en considérant la partie tangentielle de (3.18). Cette évaluation est réalisée en deux opérations distinctes. La première consiste à projeter le vecteur vitesse (3.18) dans la base covariante permettant l'obtention de l'expression

covariante de la vitesse tangentielle relative. Finalement, on ramène cette dernière dans le repère orthonormé par une dernière transformation à l'aide de la base duale. Après quelques simplifications, on obtient l'expression de la vitesse tangente relative à l'interface tel que:

$$\begin{aligned} \underline{v}_T(\underline{X}^1, t) &= \left(\underline{\tau}'_\alpha \otimes \underline{\tau}'^\alpha \right) \left[\underline{V}^1(\underline{X}^1, t) - \left(\underline{V}^2(\underline{\xi}, t) - g \frac{\partial n}{\partial t}(\underline{\xi}, t) \right) \right] \\ &= \frac{\partial \bar{\xi}^\alpha}{\partial t} \underline{\tau}'_\alpha \end{aligned} \quad (3.22)$$

où \otimes représente le produit tensoriel.

Une autre façon d'obtenir (3.22) consiste à évaluer la variation par rapport au temps de la relation (3.9) sous l'hypothèse d'un contact mécaniquement établi, selon laquelle la fonction écart (3.20) est identiquement nulle: $g(\underline{X}^1, t) = 0$. Cette hypothèse, exploitée par Laursen et Simo (1993), permet de poser une condition de persistance selon laquelle:

$$\dot{g}(\underline{X}^1, t) = 0. \quad (3.23)$$

Appliquée à la relation (3.20) sous la forme:

$$\frac{d}{dt} \left[\varphi^1(\underline{X}^1, t) - \varphi^2(\Psi_0(\underline{\xi}), t) \right] = 0, \quad (3.24)$$

cette hypothèse permet d'obtenir un champ de vitesse relative exempt de composantes normales correspondant, par le fait même, à la composante tangentielle recherchée et définie par:

$$\underline{v}_T(\underline{X}^1, t) = \frac{\partial \bar{\xi}^\alpha}{\partial t} \underline{\tau}'_\alpha \quad (3.25)$$

D'un point de vue mathématique, on constate aisément que cette stratégie comporte certaines lacunes au niveau du respect de l'objectivité. En effet, on remarque que l'application de la condition de persistance élimine le terme $g \frac{\partial n}{\partial t}(\underline{\xi}, t)$ de l'expression (3.22) ainsi que la composante $g \frac{\partial n}{\partial \xi^\alpha}$ de (3.19). Par conséquent, l'objectivité n'est obtenue que pour la condition $g(\underline{X}^1, t) = 0$. On verra, à la section suivante, que cette hypothèse est tout à fait justifiée compte tenu du contexte d'utilisation des lois de contact et de frottement.

3.4 Conditions d'admissibilité

La définition des conditions d'admissibilité du problème de contact avec frottement est essentiellement basée sur l'obtention, en tout temps, d'une configuration cinématiquement et cinétiquement admissible à l'interface de contact. En effet, l'absence d'interpénétration de la

matière ainsi que le respect de la loi de frottement, nécessitent, en plus des considérations cinématiques de la section précédente, la prise en compte de quantités tensorielles permettant de déterminer complètement la cinétique à l'interface.

En tout premier lieu, il importe de considérer le fait que les mesures de déformation définies en (3.20) et (3.25), quoiqu'associées à la particule matérielle P^1 , sont exprimées en fonction de quantités écrites dans la configuration spatiale C_t . Dans ce contexte, il est d'usage d'associer, à la définition des conditions à l'interface, une mesure de contrainte de même nature. Pour ce faire, considérons, dans C_t , le vecteur des contraintes nominales, défini par la projection du tenseur de Piola-Kirchhoff de première espèce sur la normale sortante à Γ_c^1 au point P^1 . Par la relation (2.27), on obtient:

$$\underline{\underline{t}}^1(\underline{X}^1, t) = \Pi^1(\underline{X}^1, t) \underline{N}^1(\underline{X}^1, t). \quad (3.26)$$

L'expression (3.26) démontre que le vecteur des contraintes nominales, malgré le fait qu'il résulte d'une projection en C_0 , repose au point p^1 , défini par $\varphi^1(\underline{X}^1, t)$ tel que montré à la Figure 3.6. Utilisant les vecteurs associés à la base convective, l'expression (3.26) est décomposée selon les directions normale et tangentielle tel que:

$$\underline{\underline{t}}^1(\underline{X}^1, t) = t_N(\underline{X}^1, t) \underline{n}(\underline{\xi}, t) + \mathcal{P} \underline{\underline{t}}^1(\underline{X}^1, t) \quad (3.27)$$

où t_N représente la contrainte normale de contact, et $\mathcal{P} \underline{\underline{t}}^1$, la projection de $\underline{\underline{t}}^1$ sur le plan tangent associé au point $\underline{\xi}(\underline{X}^1, t)$.

3.4.1 Condition de contact unilatéral

L'écriture de la condition de contact unilatéral découle directement de l'impossibilité d'une interpénétration de la matière. Au niveau de l'interface de contact, les conditions cinématiques doivent permettre le développement d'un champ de contrainte normale t_N , tel qu'aucune particule matérielle $P^1 \in \Gamma_c^1$ ne puisse pénétrer la surface maître Γ_c^2 . Une telle restriction peut tout aussi bien être appliquée aux particules matérielles $X^2 \in \Gamma_c^2$ par rapport à la frontière Γ_c^1 mais demeure superflue, en raison de sa définition sur le milieu continu. Cependant, la biunivocité de cette restriction sur le milieu discret demande certains traitements particuliers, comme on le verra, au Chapitre 5.

Selon la convention établie sur la direction de la normale (Figure 3.4), la contrainte t_N doit demeurer positive afin d'éviter le développement d'efforts dans le cas où il y a perte de contact entre les frontières. De plus, cette contrainte doit physiquement se développer uniquement lorsque l'écart entre la particule p^1 et la frontière γ_c^2 devient nul: $g(\underline{X}^1, t)$. Dans cette optique, on définit les conditions de Kuhn-Tucker pour le contact unilatéral par les

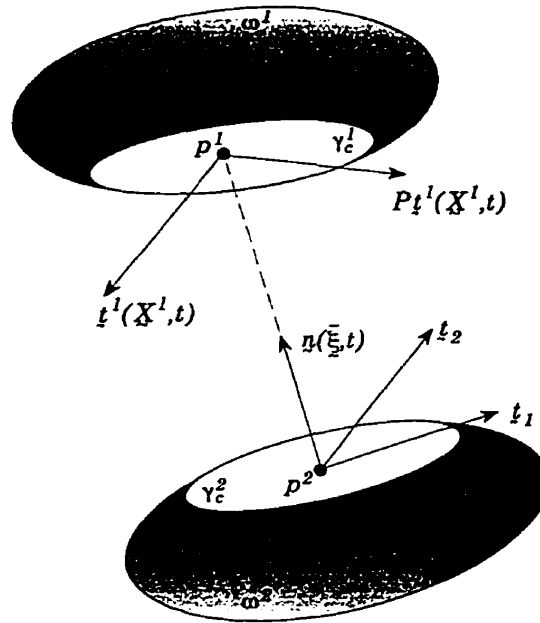


Figure 3.6 – Représentation du vecteur des contraintes nominales \underline{t}^1 à l'interface

relations:

$$g(\underline{X}^1, t) \leq 0 \quad (3.28a)$$

$$t_N(\underline{X}^1, t) \geq 0 \quad (3.28b)$$

$$t_N(\underline{X}^1, t)g(\underline{X}^1, t) = 0 \quad (3.28c)$$

$$t_N(\underline{X}^1, t)\dot{g}(\underline{X}^1, t) = 0. \quad (3.28d)$$

On remarque, dans la relation (3.28d) l'introduction de la condition de persistance stipulant un taux de variation nul de la fonction écart lorsqu'il y a apparition d'un champ de contrainte normal entre la particule p^1 et la frontière γ_c^2 . Les conditions (3.28) sont représentées graphiquement à la Figure 3.7(a).

3.4.2 Introduction de la loi de frottement

Dans le contexte actuel, l'écriture de la loi de frottement nécessite l'utilisation de quantités cinématique et cinétique exprimées dans la même base convective. Pour ce faire, et considérant le fait que la contrainte nominale (3.26) constitue une représentation spatiale de l'état de contrainte à l'interface, exprimons la composante tangentielle $\mathcal{P}\underline{t}^1$ dans la base duale $\underline{\tau}^\alpha$ tel que

$$\mathcal{P}\underline{t}^1(\underline{X}^1, t) = -\underline{t}_T^1(\underline{X}^1, t) = -t_{T_\alpha}(\underline{X}^1, t)\underline{\tau}^\alpha \quad (3.29)$$

où le signe (-) permet de représenter correctement une contrainte de frottement exercée par la particule esclave p^1 sur la surface maître γ_c^2 . Le choix d'utiliser la base duale dans la représentation de la contrainte tangentielle relève du fait que la contrainte nominale est considérée comme étant un covecteur (Marsden et Hughes, 1983).

Ce choix de la cinétique tangentielle définie par la relation (3.29), implique une légère modification dans l'écriture de la vitesse tangentielle relative (3.25) afin d'obtenir une expression relative à la base τ^α . Cela dit, effectuons un transport des vecteurs de base τ_α dans la configuration matérielle tel que:

$$\underline{v}_T(\underline{X}^1, t) = \mathbf{F}^2(\Psi_0(\bar{\xi}), t) \underline{\mathcal{V}}_T(\underline{X}^1, t) \quad (3.30)$$

où

$$\underline{\mathcal{V}}_T(\underline{X}^1, t) = \frac{\partial \bar{\xi}^\alpha}{\partial t} \tau_\alpha \quad (3.31)$$

représente la vitesse tangentielle relative dans la description convective. Exprimant (3.31) dans la base duale et en transportant le résultat dans la configuration spatiale, l'expression complémentaire de (3.30) s'écrit:

$$\underline{v}_T^b(\underline{X}^1, t) = \frac{\partial \bar{\xi}^\alpha}{\partial t} \mathbf{M}_{\alpha\beta} \tau^\beta. \quad (3.32)$$

On remarque qu'en dépit du fait que les expressions matérielle et spatiale du champ de vitesses tangentielles relatives soient non objectives, le vecteur $\underline{v}_T^b(\underline{X}^1, t)$ constitue une représentation objective de ce champ. Cette propriété provient du fait que $\underline{v}_T^b(\underline{X}^1, t)$ est exprimé dans la base convective. De plus, il importe de mentionner qu'une autre écriture de la vitesse tangentielle relative peut être obtenue en exprimant simplement la relation (3.30) dans la base duale. Cette dernière stratégie fait cependant apparaître la métrique $\mathbf{m}_{\alpha\beta}$ en remplacement de $\mathbf{M}_{\alpha\beta}$ dans (3.32) constituant, par le fait même, une mesure différente de la vitesse tangentielle relative. En effet, la métrique $\mathbf{M}_{\alpha\beta}$ dépend uniquement de la déformation en raison de la modification du point de projection $\bar{\xi}(\underline{X}^1, t)$. Pour ce qui est de la métrique $\mathbf{m}_{\alpha\beta}$, celle-ci, en plus d'avoir la même dépendance que $\mathbf{M}_{\alpha\beta}$, est fonction du gradient de déformation $\mathbf{F}^2(\Psi_0(\bar{\xi}), t)$ et par le fait même, de la distorsion relative des vecteurs τ_α . Selon ce constat, il importe de mentionner que le choix quant à l'écriture de $\underline{v}_T^b(\underline{X}^1, t)$ relève exclusivement de considérations constitutives selon lesquelles la vitesse tangentielle relative utilisée dans la loi de frottement est quantifiée par le transport spatial du dual de $\underline{\mathcal{V}}_T$ plutôt que celui de $\underline{\mathcal{V}}_T$ (Laursen et Simo, 1993).

Les vecteurs $\underline{v}_T^b(\underline{X}^1, t)$ et $\underline{t}_T^b(\underline{X}^1, t)$ permettent donc de définir complètement la description convective des équations de frottement à l'interface de contact. Considérant une loi de frottement de Coulomb⁴ telle que montrée à la Figure 3.7(b), les conditions d'admissibilité liées à

4. Le choix quant à l'utilisation d'une loi de Coulomb est essentiellement basé sur le type de problèmes traités dans le cadre de cette thèse.

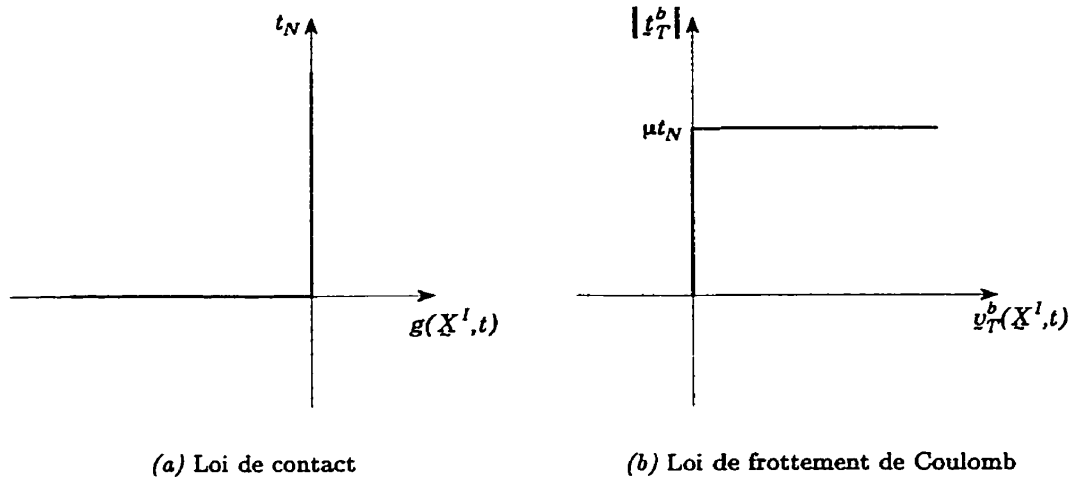


Figure 3.7 – Représentation des lois de contact et de frottement

l'évolution du frottement s'écrivent:

$$\Phi = \|\underline{t}_T^b\| - \mu t_N \leq 0 \tag{3.33a}$$

$$v_T^b - \zeta \frac{\underline{t}_T^b}{\|\underline{t}_T^b\|} = 0 \tag{3.33b}$$

$$\zeta \geq 0 \tag{3.33c}$$

$$\Phi \zeta = 0 \tag{3.33d}$$

où μ est le coefficient de frottement de Coulomb⁵ et ζ , le taux de glissement absolu. Malgré la grande simplicité de la loi de frottement utilisée, la description présentée ne porte aucune hypothèse restrictive quant à l'utilisation de lois de frottement plus complexes incluant les lois locales et non locales, avec coefficient de frottement évolutifs, etc.

3.4.3 Régularisation des conditions d'admissibilité

Les discontinuités présentes dans les lois de contact (Figure 3.7(a)) et de frottement (Figure 3.7(b)) rendent celles-ci non différentiables et par le fait même, inaptées à l'écriture de la forme variationnelle associée au problème de contact avec frottement. Heureusement, cette limitation peut être levée par diverses méthodes proposées dans la littérature et telles que discutées dans le Chapitre 1. Dans le contexte actuel, on propose une régularisation des conditions d'admissibilité (3.28) et (3.33) par la méthode classique de pénalisation. Cette

5. Compte-tenu du contexte d'utilisation, on ne fait aucune distinction entre les coefficients de frottement statique et dynamique.

méthode est encore aujourd'hui, la méthode la plus utilisée pour la régularisation des lois non différentiables et permet, dans le contexte du problème de contact avec frottement, d'établir la notion de loi de comportement à l'interface. En effet, la pénalisation permet de définir complètement les relations entre les composantes cinétiques et cinématiques. Dans la direction normale, une pénalisation des conditions (3.28) est obtenue par la relation:

$$t_N = \epsilon_N \langle g \rangle \quad (3.34)$$

où ϵ_N est le paramètre de pénalisation et $\langle \cdot \rangle$, les crochets de Macauley, définissent la partie positive de son opérande. Une comparaison des relations (3.34) et (3.28) permet de constater que la pénalisation permet une représentation exacte de la loi de contact seulement pour $\epsilon_N \rightarrow \infty$. Dans le cas contraire, la méthode implique une violation de la condition $g \leq 0$. Une représentation graphique de la loi normale régularisée se retrouve à la Figure 3.8(a).

Dans la direction tangentielle, une régularisation des conditions (3.33) à l'aide du paramètre ϵ_T , permet d'écrire:

$$\Phi = \|\underline{t}_T^b\| - \mu t_N \leq 0 \quad (3.35a)$$

$$\underline{v}_T^b - \zeta \frac{\underline{t}_T^b}{\|\underline{t}_T^b\|} = \frac{1}{\epsilon_T} \mathcal{L}_v \underline{t}_T^b \quad (3.35b)$$

$$\zeta \geq 0 \quad (3.35c)$$

$$\Phi \zeta = 0 \quad (3.35d)$$

où $\mathcal{L}_v \underline{t}_T^b$ représente le taux de variation convectif (dérivée de Lie) de la contrainte tangentielle \underline{t}_T^b et définie par:

$$\mathcal{L}_v \underline{t}_T^b = \dot{t}_{T\alpha} \underline{T}^\alpha. \quad (3.36)$$

Les détails relatifs à l'évaluation de $\mathcal{L}_v \underline{t}_T^b$ sont présentés dans Laursen (1994). On note que l'unique différence entre les relations (3.35) et (3.33) provient du remplacement du 0 par une pénalisation de la dérivée de Lie. Comme dans le cas de la régularisation normale, celle-ci devient exacte seulement lorsque $\epsilon_T \rightarrow \infty$ dans quel cas, le taux de glissement $\zeta(\underline{t}_T^b/\|\underline{t}_T^b\|)$ devient égal à la vitesse relative \underline{v}_T^b . Dans le cas contraire, on admet, par la pénalisation, un glissement tangential réversible allant ainsi à l'encontre de la physique du problème pour lequel le frottement est un phénomène dissipatif et donc irréversible. On remarque également que l'introduction du taux $\mathcal{L}_v \underline{t}_T^b$ dans (3.33) fournit un mécanisme permettant l'obtention d'une expression de la contrainte tangentielle \underline{t}_T^b en fonction de la vitesse tangentielle relative \underline{v}_T^b tout en préservant l'objectivité de la loi de frottement. Finalement, on remarque que cette stratégie permet un traitement de la loi de frottement similaire à celui utilisé dans le traitement de la plasticité. Une représentation graphique de la loi de frottement régularisée se retrouve à la Figure 3.8(b).

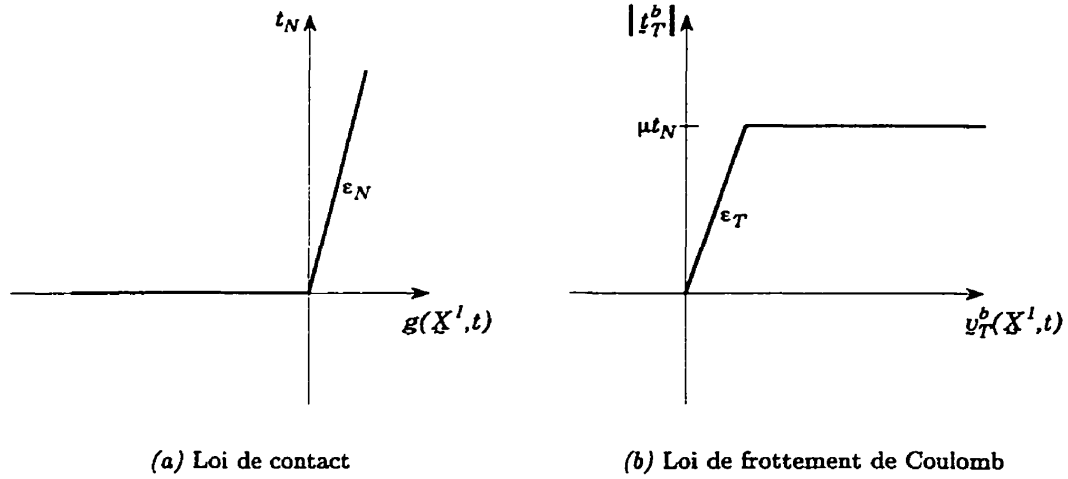


Figure 3.8 – Représentation des lois de contact et de frottement régularisées

3.5 Formulation et linéarisation du travail virtuel associé

La prise en compte, dans la formulation variationnelle, du travail virtuel associé aux efforts de contact et de frottement, est obtenue par l'entremise du terme (2.58b). Cependant, cette expression fut établie en considérant une définition des équations d'équilibre basée sur le tenseur des contraintes de Cauchy. Ce constat implique donc un transport du domaine d'intégration sur la configuration C_0 afin de retrouver une expression du travail virtuel W_c basée sur le tenseur de Piola-Kiochhoff de première espèce Π et défini par la relation:

$$W_c(\delta \varphi, \varphi_t) = - \int_{\gamma_c} \delta \varphi \cdot \underline{f}_c \, d\gamma_c = - \int_{\Gamma_c} \delta \varphi \cdot \underline{t}_c \, d\Gamma_c \quad (3.37)$$

où \underline{t}_c représente le vecteur des contraintes nominales de contact obtenu du tenseur Π . On remarque qu'une telle modification de l'expression (2.58b) ne perturbe en rien la quantité de travail virtuel effectué par les efforts de contact. Cette quantité est simplement exprimée en fonction d'un champ tensoriel de nature différente. Selon (3.37), on anticipe aisément que l'évaluation du travail virtuel effectué sur l'ensemble des frontières candidates au contact peut être obtenue par sommation du travail effectué sur chacune des dites frontières. Substituant \underline{t}_c par sa représentation sur chacune des frontières, noté \tilde{t}^i , l'expression (3.37) devient:

$$W_c^i(\delta \varphi, \varphi_t) = - \int_{\Gamma_c^i} \delta \varphi^i \cdot \tilde{t}^i \, d\Gamma_c^i. \quad (3.38)$$

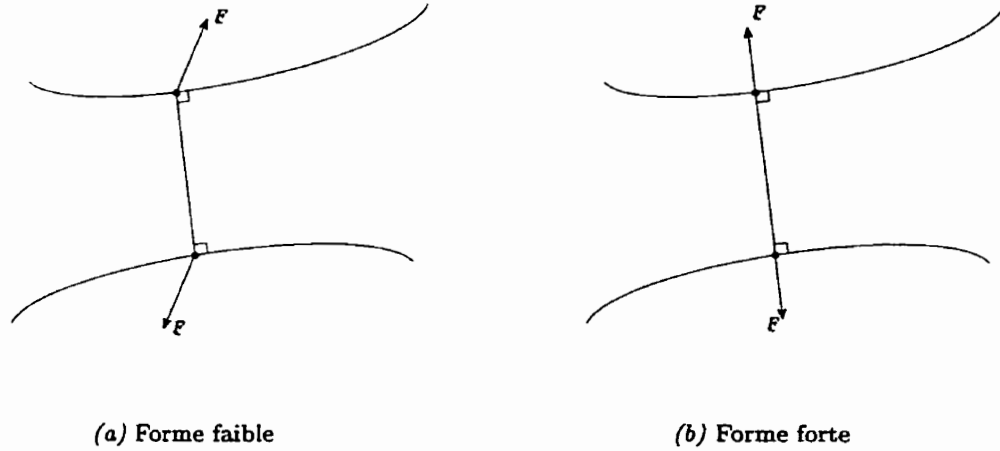


Figure 3.9 – Représentation schématique des lois d'action et réaction

3.5.1 Expression de la forme intégrale

Considérant l'interface définie par les surfaces Γ_c^1 et Γ_c^2 telles que montrées à la Figure 3.1, l'expression (3.38) devient:

$$W_c(\delta \varrho, \varrho_t) = - \int_{\Gamma_c^1} \delta \varrho^1 \cdot \underline{t}^1 d\Gamma_c^1 - \int_{\Gamma_c^2} \delta \varrho^2 \cdot \underline{t}^2 d\Gamma_c^2 \quad (3.39)$$

et représente donc la contribution, au travail virtuel, des efforts de contact s'exerçant le long des frontières Γ_c^1 et Γ_c^2 . Cette intégrale implique donc, pour toute particule $P^1 \in \Gamma_c^1$, une réciprocité des efforts entre ce même point et celui correspondant à sa projection sur Γ_c^2 noté $\underline{\Psi}_0(\bar{\xi})$. En mécanique classique, cette réciprocité des efforts, aussi appelée principe d'action-réaction, se présente sous deux formes distinctes (Goldstein, 1980). La première, appelée forme faible du principe d'action-réaction stipule que les forces qu'exercent deux particules sur chacune d'elle doivent être d'intensité égale et de directions opposées. Pour ce qui est de la forme forte, celle-ci stipule que les forces qu'exercent deux particules sur chacune d'elle doivent être d'intensité égale, et de directions opposées, parallèles à la droite joignant les deux particules. Ces deux versions de la loi d'action-réaction sont telles que montrées à la Figure 3.9.

Selon les dernières considérations, on obtient une expression de la forme faible du principe d'action-réaction en posant, sous la particule P^1 :

$$\underline{t}^1(\underline{X}^1, t) d\Gamma_c^1 = -\underline{t}^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) d\Gamma_c^2. \quad (3.40)$$

Pour ce qui est de la forme forte, celle-ci est obtenue en considérant la relation (3.40) avec

$$g(\underline{X}^1, t) t_{\mathcal{T}}^b(\underline{X}^1, t) = 0 \quad \forall P^1 \in \Gamma_c^1 \quad (3.41)$$

où $t_{\mathcal{T}}^b$ est défini par (3.29). La relation (3.41) stipule donc, qu'aucun travail ne peut être effectué par le champ de contrainte tangentiel pour un déplacement orienté selon la direction normale. Cette condition, physiquement nécessaire, est bien naturellement prise en compte dans notre modèle puisqu'aucune contribution au travail virtuel n'est admise dans des conditions de non contact. Dans cette optique, la relation (3.40) permet une réécriture de (3.39) en une seule intégrale sur Γ_c^1 définie par:

$$W_c(\delta \varphi, \varphi_t) = - \int_{\Gamma_c^1} t^1(\underline{X}^1, t) \cdot \left[\delta \varphi^1(\underline{X}^1, t) - \delta \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right] d\Gamma_c^1. \quad (3.42)$$

En remplaçant t^1 par ses composantes normale et tangentielle définie respectivement par (3.27) et (3.29), l'expression (3.42) devient:

$$W_c(\delta \varphi, \varphi_t) = - \int_{\Gamma_c^1} \left[t_N \underline{n} - t_{\mathcal{T}_\alpha} \underline{\tau}^\alpha \right] \cdot \left[\delta \varphi^1(\underline{X}^1, t) - \delta \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right] d\Gamma_c^1. \quad (3.43)$$

Finalement, en utilisant la définition des expressions virtuelles de g et $\bar{\xi}^\alpha$ notées respectivement δg et $\delta \bar{\xi}^\alpha$ et définies à l'Annexe B, par les expressions (B.36) et (B.42) on obtient la version compacte du travail virtuel exercé par les efforts de contact et de frottement telle que:

$$W_c(\delta \varphi, \varphi_t) = \int_{\Gamma_c^1} \left[t_N \delta g + t_{\mathcal{T}_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha \right] d\Gamma_c^1. \quad (3.44)$$

On note que l'expression (3.44) a été obtenue en considérant l'expression (B.42) plutôt que (B.40) dans la définition de $\delta \bar{\xi}^\alpha$. Ce choix est essentiellement conditionné par le fait qu'à une régularisation près, la contribution au travail virtuel (3.44) devient non nulle seulement lorsque $g = 0$.

3.5.2 Linéarisation de la forme intégrale

Tel que spécifié précédemment, la résolution implicite de l'expression non linéaire (2.60) implique une linéarisation des équations d'équilibre. Plus spécifiquement, la linéarisation de W_c est obtenue en appliquant l'opérateur Δ à (3.44). Cette opération est grandement facilitée principalement au fait que l'intégrale est évaluée sur la configuration de référence C_0 . Dans ces conditions, seul l'intégrande varie avec le champ φ . Dans cette optique, le hessien associé au problème de contact avec frottement est donné par:

$$\begin{aligned} \Delta W_c(\delta \varphi, \varphi_t) &= \Delta \left\{ \int_{\Gamma_c^1} \left[t_N \delta g + t_{\mathcal{T}_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha \right] d\Gamma_c^1 \right\} \\ &= \int_{\Gamma_c^1} \left[\Delta t_N \delta g + t_N \Delta \delta g + \Delta t_{\mathcal{T}_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha + t_{\mathcal{T}_\alpha} \Delta \delta \bar{\xi}^\alpha \right] d\Gamma_c^1 \end{aligned} \quad (3.45)$$

où les termes Δt_N , $\Delta(\delta g)$ et $\Delta(\delta \bar{\xi}^\alpha)$ sont définis en Annexe B par les expressions (B.44), (B.51) et (B.62) respectivement. Pour ce qui est du terme Δt_{T_α} , celui-ci demeure non évalué en raison de sa dépendance au schéma d'intégration de la loi de frottement. À ce stade-ci, aucune non-symétrie n'apparaît dans la linéarisation de W_c . La non-symétrie émane exclusivement du terme $\Delta t_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha$.

3.6 Spécialisation au cas de l'interface toron-mors d'ancrage

La formulation présentée dans les sections précédentes permet une représentation générale du problème de contact avec frottement de Coulomb, dans un contexte de grandes transformations. Comme on a pu le constater, cette généralité est obtenue au prix d'une écriture fort complexe de la forme variationnelle associée, et ce, en raison de la grande variabilité des conditions cinétique et cinématique en fonction du temps. Cependant, le respect des conditions d'admissibilité telles que prescrites par les relations (3.28) et (3.33) ne permet pas la bonne représentation du comportement à l'interface du système toron-mors d'ancrage tel que montré à la Figure 1.5. Cette section présente donc une spécialisation de la formulation générale du problème de contact avec frottement, adaptée à une telle représentation.

3.6.1 Comportement à l'interface toron-mors d'ancrage

De façon générale, la mise sur pied d'un modèle permettant la bonne représentation d'un phénomène physique implique principalement la prise en compte d'observations obtenues d'essais expérimentaux. Ces observations permettent, entre autres, de poser les hypothèses de base du modèle menant ainsi à une spécialisation des équations générales de la mécanique des milieux continus, d'établir les lois de comportement associées et finalement, de caler l'ensemble du modèle.

Dans le contexte actuel, les considérations ayant mené à la modélisation du comportement à l'interface toron-mors d'ancrage proviennent exclusivement de résultats obtenus d'essais en laboratoire sur divers dispositifs d'ancrages monotoron et se retrouvent dans Bastien (1989, 1992); Michaud et Bastien (1996). Ces résultats permettent de faire ressortir les faits suivants quant au comportement du système toron-mors d'ancrage:

Intensité des déformations: Malgré la présence de déformations plastiques importantes dans le bloc d'ancrage, aucune déformation permanente ne paraît subsister dans les composantes clavette et toron. Ce constat, concorde bien avec la haute limite élastique des torons utilisés ainsi qu'avec la grande dureté de surface des clavettes composant le mors d'ancrage.

Déplacements relatifs à l'interface: Dans le contexte d'une modélisation du comportement de ce type d'interface, il importe de considérer l'intensité des déplacements absolus

et relatifs qui y agissent. De plus, on note que les hypothèses retenues émanent principalement d'observations post-essai sur les torons, ainsi que des courbes charge-enfoncement obtenues expérimentalement.

Direction radiale: Le déplacement relatif radial semble conditionné directement par la rentrée progressive des encoches dans le toron, tel que montré à la Figure 3.10. En effet, on observe sur les courbes charge-enfoncement, une progression, en début de chargement, de la pénétration des encoches. Cette pénétration, engendrée par la grande rigidité de surface des clavettes, provoque, une fois terminée, une augmentation importante de rigidité formant ainsi un système toron-mors d'ancrage quasi-monolithique tout à fait assimilable à un plot tronconique (voir Figure 1.5).

Direction axiale: Aucun déplacement relatif significatif ne semble se produire dans cette direction. La pénétration progressive des encoches dans le toron en est d'ailleurs à l'origine du blocage. Ce constat a pour effet d'éliminer toute possibilité de glissement dans cette direction.

Direction circonférentielle: Contrairement à la situation rencontrée dans la direction axiale, il semble justifiée de permettre un certain glissement dans cette direction. En effet, la composition du mors d'ancrage par des clavettes séparées, permet, par effet de Poisson, une dilatation dans cette direction. Cependant, la pénétration des encoches dans le toron tend inévitablement à réduire cette dilatation. Ce constat implique donc une certaine dépendance du glissement circonférentiel sur cette pénétration. Dans cette optique, on peut s'imaginer que la dilatation circonférentielle à l'interface se produit presque totalement en début de chargement et cesse subitement avec la fin de la pénétration des encoches correspondant ainsi au comportement quasi-monolithique.

En résumé, l'ensemble de ces considérations permet de faire ressortir les diverses particularités associées au comportement à l'interface toron-mors d'ancrage. Celles-ci se situent principalement au niveau de la nature unidirectionnelle du glissement ainsi que dans l'augmentation progressive de la rigidité radiale produite par la pénétration des encoches dans le toron. Ces deux aspects, couplés à la présence de petits déplacements et petites déformations, permettent de préciser les modifications à apporter à la formulation générale du problème de contact avec frottement.

3.6.2 Présentation du modèle proposé

Comme on peut le constater, la modélisation du comportement à l'interface toron-mors d'ancrage est tout à fait similaire à celle d'un problème de contact classique dans un contexte de petits déplacements et petites déformations, exception faite des particularités associées aux lois de contact et de frottement nécessitant une réécriture des conditions d'admissibilité ainsi que d'une légère modification de la définition de la fonction écart g .

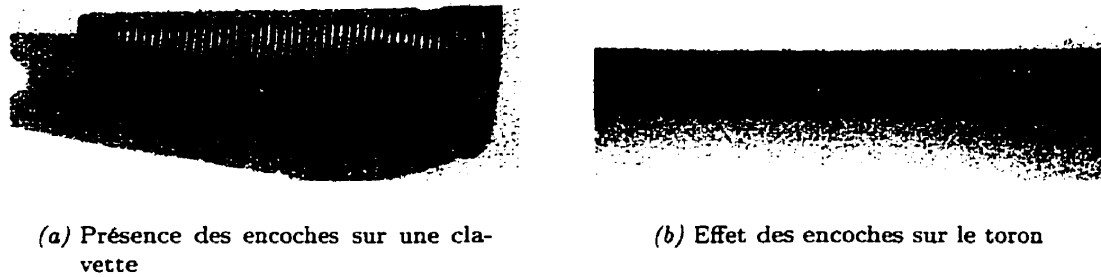


Figure 3.10 – Représentation schématique du comportement au voisinage d'une encoche

3.6.2.1 Cinématique à l'interface toron-mors d'ancrage

Considérant la convention déjà établie, désignons par Γ_c^1 , la surfaces interne d'une clavette (zone avec les encoches), et Γ_c^2 , celle associée à la périphérie du toron tel que montré à la Figure 3.11. Une telle représentation permet donc de procéder à deux simplifications majeures quant à la définition de la cinématique au voisinage du point P^2 , résultant de la projection du point P^1 sur Γ_c^2 . En tout premier lieu, l'hypothèse de petits déplacements permet de fixer définitivement la coordonnée paramétrique $\tilde{\xi}$ au voisinage du point de projection en fonction du temps. Dans cette optique, il paraît judicieux de considérer constante la projection initiale de P^1 sur Γ_c^2 notée $\tilde{\xi}(\tilde{X}^1, 0)$. Ce choix permet donc d'établir définitivement le siège des vecteurs de base et d'éliminer toute variation de ces derniers envers la variable paramétrique $\tilde{\xi}$. Finalement, l'hypothèse des petites déformations permet une écriture cartésienne orthonormée des vecteurs de base $\tilde{\tau}^\alpha$ et \tilde{n} , éliminant ainsi toutes distinctions entre les composantes covariantes, contravariantes et spatiales. Il importe de noter que l'utilisation de la notation duale dans la description de la base cartésienne orthonormée demeure toute à fait arbitraire.

Considérant la nature découplée des lois tangentielles, exprimons les vecteurs de base selon lesquelles les vecteurs $\tilde{\tau}^1$ et $\tilde{\tau}^2$ représentent respectivement les directions axiale et circonférentielle, tel que montré à la Figure 3.11. On note qu'une telle restriction sur les directions $\tilde{\tau}^1$ et $\tilde{\tau}^2$ implique de fixer, *a priori*, une des deux directions afin d'en venir à une détermination complète du trièdre. Considérant le fait que la direction axiale est constante en tout point de l'interface, il semble judicieux d'arrêter notre choix sur ce vecteur. Définissant le vecteur normal en fonction des vecteurs positions \tilde{X}^1 et \tilde{X}^2 associés aux points P^1 et P^2 tel que:

$$\tilde{n} = \frac{1}{\|\tilde{X}^1 - \tilde{X}^2\|} \langle X_1 - X_2, Y_1 - Y_2, Z_1 - Z_2 \rangle^T, \quad (3.46)$$

le vecteur $\tilde{\tau}^2$ est obtenu par le produit vectoriel:

$$\tilde{\tau}^2 = \tilde{n} \times \tilde{\tau}^1 \quad (3.47)$$

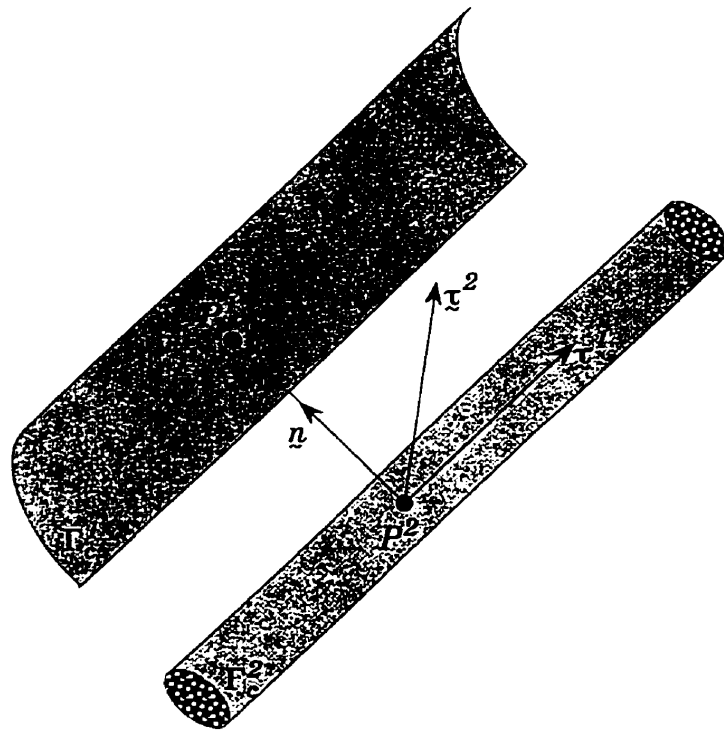


Figure 3.11 – Représentation géométrique à l'interface toron-mors d'ancrage

définissant ainsi le trièdre local en tout point P^2 . Selon ces dernières définitions, il est maintenant possible de définir la fonction écart g par la relation:

$$g = g_0 - g_u \quad (3.48)$$

où g_0 représente la distance initiale entre les points P^1 et P^2 et g_u , la portion évolutive de la fonction écart définie par:

$$g_u = -\underline{n} \cdot \left[\underline{u}^1(\underline{X}^1, t) - \underline{u}^2(\underline{\Psi}_0(\underline{\xi}), t) \right] \quad (3.49)$$

avec \underline{u}^1 et \underline{u}^2 , correspondant aux champs de déplacements globaux associés respectivement aux particules P^1 et P^2 tel que définis par (2.2). On remarque aisément qu'un rapprochement des frontières Γ_c^1 et Γ_c^2 implique que $g_u \rightarrow g_0$ et qu'en cas contraire, $g_u \rightarrow \infty^-$. Le cas limite, où $g_u = g_0$ reflète nécessairement les conditions exactes de contact. Comme on le verra plus loin, cette caractéristique de la fonction g , par l'entremise de g_0 et g_u , présente de nombreux avantages. En particulier, il est maintenant possible, par (3.48), de définir des lois de contact normale (radiale) continue assurant la bonne représentation de la pénétration des encoches dans le toron. Finalement, la prise en compte de g_0 constitue un outil d'un grand intérêt dans la procédure de calage du modèle.

Pour ce qui est de l'écriture de la cinématique tangentielle, celle-ci est obtenue en appliquant les mêmes hypothèses de petits déplacements et petites déformations à la relation (3.32). Dès lors, la métrique \mathbf{M} devient l'identité, conduisant ainsi à l'expression:

$$\underline{v}_T^b(\underline{X}^1, t) = \dot{\underline{\xi}}^\alpha \underline{\tau}^\alpha, \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.50)$$

où $\dot{\underline{\xi}}^\alpha$ représentent les vitesses tangentielles relatives associées aux directions $\underline{\tau}^\alpha$ et définies par:

$$\dot{\underline{\xi}}^\alpha = \underline{\tau}^\alpha \cdot \left[\dot{\underline{u}}^1(\underline{X}^1, t) - \dot{\underline{u}}^2(\underline{\Psi}_0(\underline{\xi}), t) \right]. \quad (3.51)$$

On note que l'expression (3.51) est rendue possible en raison de l'hypothèse d'orthonormalité des vecteurs de base. Dans ces conditions, le terme $\dot{\underline{\xi}}^\alpha$ ne peut être engendré que par la vitesse matérielle relative des particules P^1 et P^2 projetée dans le plan tangent.

3.6.2.2 Conditions d'admissibilités

Dans le cas présent, la mise en place des conditions d'admissibilité s'effectue en considérant les diverses restrictions associées à l'interface toron-mors d'ancrage à partir des définitions cinétiques et cinématiques préalablement établies. Dans la direction normale, on propose d'utiliser une loi hyperbolique similaire à celle présentée par Hussein et Damil (1998) telle que:

$$t_N = \frac{\eta g_u}{g} \quad (3.52)$$

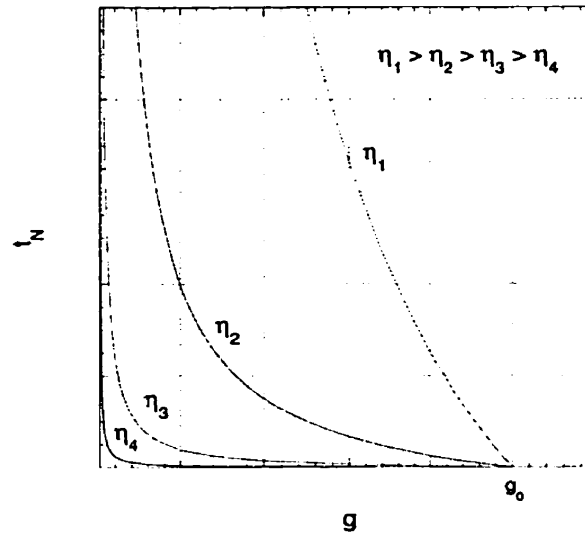


Figure 3.12 – Représentation de la loi normale spécialisée à l'interface toron-mors d'ancrage

avec g et g_u définies par (3.48) et (3.49) et η , un paramètre positif à déterminer. Telle que montrée à la Figure 3.12, cette représentation, à l'aide du paramètre η , permet la prise en compte de l'augmentation progressive de rigidité associée à la pénétration des encoches. Dans ce contexte, les conditions d'admissibilité dans la direction normale s'écrivent:

$$g \geq 0 \quad (3.53a)$$

$$g \leq g_0 \quad (3.53b)$$

$$t_N \geq 0 \quad (3.53c)$$

$$t_N(X^1, t)g(X^1, t) \geq 0 \quad (3.53d)$$

Selon (3.53), il importe de remarquer que pour des valeurs de $g > g_0$, la fonction t_N devient négative et n'a plus aucune signification physique.

Dans le plan tangent, la possibilité de glissement dans la direction circonférentielle mène directement à l'utilisation d'une loi de frottement de Coulomb dans la direction τ^2 . Pour ce qui est de la restriction au glissement selon la direction axiale, on impose directement une vitesse tangentielle relative nulle entre les deux particules candidates au contact. Dès lors, les conditions tangentielles d'admissibilité s'écrivent, à partir de (3.33):

$$\Phi = \|t_{T_2}\| - \mu_{tm} t_N \leq 0 \quad (3.54a)$$

$$\dot{\xi}^2 - \zeta \frac{t_{T_2}}{\|t_{T_2}\|} = 0 \quad (3.54b)$$

$$\dot{\xi}^1 = 0 \quad (3.54c)$$

$$\zeta \geq 0 \quad (3.54d)$$

$$\Phi \zeta = 0 \quad (3.54e)$$

où t_{T_2} représente la contrainte de frottement associée au point P^1 agissant selon la direction τ^2 . Il importe de remarquer que (3.54) constitue une spécialisation de (3.33) en considérant une évolution de la loi de frottement selon une direction préférentielle prescrite par la formulation et ce, dans un contexte de petits déplacements et petites déformations.

Finalement, on remarque que les relations (3.53) ne nécessitent aucune régularisation en raison de la continuité de t_N . Cependant, il importe de noter que l'utilisation de cette même expression, dans un contexte usuel de contact, constitue en soit une régularisation des conditions (3.28). Pour ce qui est des conditions (3.54), celles-ci nécessitent une régularisation, similaire à celle utilisée pour (3.35). Par pénalisation des relations (3.54b) et (3.54c), on obtient la forme finale des conditions d'admissibilité dans le plan tangent définies par:

$$\Phi = \|t_{T_2}\| - \mu_{tm} t_N \leq 0 \quad (3.55a)$$

$$\dot{\xi}^2 - \zeta \frac{t_{T_2}}{\|t_{T_2}\|} = \frac{1}{\epsilon_{T_2}} \dot{t}_{T_2} \quad (3.55b)$$

$$\dot{\xi}^1 = \frac{1}{\epsilon_{T_1}} \dot{t}_{T_1} \quad (3.55c)$$

$$\zeta \geq 0 \quad (3.55d)$$

$$\Phi \zeta = 0 \quad (3.55e)$$

où t_{T_α} représente les taux de contraintes tangentielles associées aux directions τ^α .

3.6.2.3 Expression et linéarisation du PTV

L'écriture de la forme variationnelle associée à la contribution des efforts développés à l'interface toron-mors d'ancrage, s'obtient directement à partir de l'expression (3.43). Considérant la nouvelle définition de la fonction écart g , le terme δg , donné par:

$$\begin{aligned} \delta g &= \delta g_0 - \delta g_u \\ &= 0 - \delta g_u \\ &= \underline{n} \cdot \left[\delta \underline{u}^1(\underline{X}^1, t) - \delta \underline{u}^2(\underline{\Psi}_0(\underline{\xi}), t) \right], \end{aligned} \quad (3.56)$$

permet de réécrire (3.43) sous la forme:

$$W_c(\delta \varphi, \varphi_t) = \int_{\Gamma_c^1} [-t_N \delta g + t_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha] d\Gamma_c^1 \quad (3.57)$$

où $\delta \bar{\xi}^\alpha$ est donné directement par (B.42) et raison de l'invariance des vecteurs de base.

Pour ce qui est de la forme linéarisée ΔW_c , celle-ci s'obtient par application de l'opérateur Δ sur l'expression (3.57) telle que:

$$\Delta W_c(\delta \varphi, \varphi_t) = \Delta \left\{ \int_{\Gamma_c^1} [-t_N \delta g + t_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha] d\Gamma_c^1 \right\}. \quad (3.58)$$

En raison des conditions d'invariance associées aux vecteurs de base \underline{n} et $\underline{\tau}^\alpha$ ainsi qu'au point de projection $\bar{\xi}$, il est donc justifier de poser $\Delta \delta(\cdot) = 0$. Ce constat permet donc une simplification majeure dans l'expression linéarisée (3.58) qui prend la forme:

$$\Delta W_c(\delta \varrho, \varrho_t) = \int_{\Gamma_c^1} [-\Delta t_N \delta g + \Delta t_{T_\alpha} \delta \bar{\xi}^\alpha] d\Gamma_c^1 \quad (3.59)$$

avec Δt_N , obtenu de la simple linéarisation du terme (3.52) donnée par:

$$\begin{aligned} \Delta t_N &= \Delta \left\{ \frac{\eta g_u}{g} \right\} \\ &= -\frac{\eta g_0}{g^2} \Delta g. \end{aligned} \quad (3.60)$$

avec Δg , représentant la linéarisation de la fonction écart (3.48) obtenue en remplaçant dans (3.56), l'opérateur δ par Δ . Pour ce qui est des termes Δt_{T_α} , ceux-ci sont évalués après introduction du schéma d'intégration en temps nécessaire à l'évaluation de (3.55). Il importe de noter que contrairement à (3.45) et ce, en raison des conditions d'admissibilité associées au plan tangent, la non-symétrie est essentiellement produite par le terme $\Delta t_{T_2} \delta \bar{\xi}^2$.

Chapitre 4

Discrétisation des équations d'équilibre couplées aux inéquations de contact et de frottement

4.1 Généralités

Jusqu'à présent, les formulations présentées aux chapitres 2 et 3 nous ont permis d'établir les expressions nécessaires à l'étude des divers problèmes que nous envisageons traiter dans le cadre de cette thèse. Cependant, la présence des non-linéarités intrinsèques à la formulation ainsi que la grande complexité des géométries en cause ne permettent pas, *a priori*, de préciser, à partir de ces mêmes expressions, une solution analytique appropriée. En effet les solutions généralement présentées dans la littérature, permettent le traitement de certains types de problèmes pour lesquels les géométries sont relativement simples et où les diverses non-linéarités sont considérées négligeables par rapport aux termes du premier ordre (linéaires). Dans ce contexte, il paraît donc justifié, compte tenu du type de problèmes à traiter, de se pencher vers l'utilisation de méthodes numériques afin d'en venir à une résolution rigoureuse des expressions établies.

Pour ce faire, on se propose d'établir la formulation semi-discrète associée aux expressions variationnelles ainsi qu'à leur linéarisations, préalablement établies sur le milieu continu. Plus spécifiquement, on utilise une discrétisation temporelle permettant, par l'entremise de schémas d'intégration appropriés, de procéder à la détermination implicite des lois de comportement élastoplastique et de frottement nécessaires à la résolution incrémentale des équations d'équilibre couplées aux inéquations de contact et de frottement.

Par la suite, on introduit la discrétisation spatiale par éléments finis, selon laquelle, le champ de déplacement aux nœuds est considéré comme étant une fonction continue du temps. Le résultat d'une telle discrétisation permet, entre autres, l'obtention d'un système d'équations

non linéaires pour lequel les composantes nodales du champ de déplacement représentent les inconnues du problème à résoudre. Les expressions ainsi obtenues peuvent alors être directement traduites sous une forme matricielle générique, indépendante du niveau d'interpolation.

Finalement, on présente une vue d'ensemble du système global discrétisé, bien adaptée au contexte de résolution numérique et démontrant ainsi, la nature fortement couplée de la formulation choisie.

4.2 Discrétisation temporelle

La résolution complète du système (2.60) nécessite la détermination de l'état de contrainte dans les solides ainsi que les conditions de frottement aux interfaces. La nature incrémentale de ces lois de comportement implique donc un suivi de leur évolution dans le temps afin de permettre leur intégration en cours de résolution. En effet, la recherche de la configuration d'équilibre du solide, dont le comportement global est fortement non linéaire, s'effectue généralement à l'aide de techniques de résolution numérique impliquant la subdivision du temps complet de résolution en sous-intervalles $[t, t + \Delta t]$. Connaissant les conditions d'équilibre en C_t , ces lois sont dès lors intégrées sur l'intervalle spécifiée permettant ainsi une évaluation complète des conditions d'équilibre en $C_{t+\Delta t}$.

Dans le contexte actuel, les expressions à intégrer, sont représentées par des systèmes d'équations différentielles ordinaires du premier ordre en temps. Les algorithmes permettant leur résolution sont nombreux. On présente dans El Mouatassim (1989), et Dabounou (1994) une liste importante de schémas d'intégration explicite et implicite pouvant être utilisés dans un tel contexte.

De plus, il importe de noter que le contexte des grandes transformations nécessite quelques précautions quant au respect du principe d'objectivité en cours de résolution. Finalement, la prise en compte, en régime quasi-statique, des équations d'équilibre, permet de faire abstraction de la variable temporelle qui prend ici, une connotation associée à l'évolution incrémentale des phénomènes en cause.

4.2.1 Loi de comportement élastoplastique

L'intégration de la loi de comportement élastoplastique utilisée dans le cadre de cette thèse est effectué à l'aide d'un schéma d'intégration de type Euler implicite. Cependant, et ce, dans le but de respecter le principe de l'indifférence matérielle, on se propose d'exprimer la loi de comportement (2.44) dans un référentiel tournant \mathcal{R}' défini par la vitesse de rotation Ω permettant ainsi une définition objective du taux de contrainte noté $\dot{\sigma}'$.

4.2.1.1 Approximation de la cinématique sur le pas

La connaissance des quantités en C_t de même que celles correspondant à l'estimation en $C_{t+\Delta t}$, ne nous informent, en aucun moment, sur la cinématique à adopter au cours du pas. Entre autres, la loi, décrite dans un repère tournant, fait intervenir la rotation \mathbf{Q}_τ du repère fixe ainsi que le taux de déformation \mathbf{D}_τ exprimé dans ce même repère ($\tau \in [t, t + \Delta t]$) et qui sont, *a priori*, inconnus. Les seules informations disponibles étant les gradients de déformations \mathbf{F}_t et $\mathbf{F}_{t+\Delta t}$, il importe de faire des approximations objectives sur \mathbf{Q}_τ et \mathbf{D}_τ .

L'approximation la plus utilisée est celle proposée par Hughes et Winget (1980):

$$\mathbf{D}_\tau = \mathbf{D}_{t+\frac{\Delta t}{2}} = cste \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{Q}_\tau = \mathbf{Q}_{t+\frac{\Delta t}{2}} = cste \quad (4.1b)$$

où \mathbf{Q}_τ est évalué en fonction du choix de la vitesse de rotation permettant l'écriture de (2.34). Dans le cas où le repère orthonormé correspond au repère corotationnel \mathbf{Q} , l'expression (2.34) correspond à la dérivée de Jaumann avec

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{W} \quad (4.2)$$

où \mathbf{Q} est obtenu par intégration de l'équation différentielle $\mathbf{W} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$ avec la condition initiale: $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$. En utilisant l'approximation de Hughes et Winget (1980), on obtient la rotation en $t + \Delta t$ par:

$$\mathbf{Q}_{t+\Delta t} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{W}_{t+\frac{\Delta t}{2}} \right)^{-1} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2}\mathbf{W}_{t+\frac{\Delta t}{2}} \right) \mathbf{Q}_t. \quad (4.3)$$

En utilisant le repère en rotation propre par décomposition polaire du tenseur \mathbf{F} (2.11), on obtient la dérivée de Green-Naghdi où $\mathbf{\Omega}$ est défini par:

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \quad (4.4)$$

impliquant ainsi:

$$\mathbf{Q}_{t+\frac{\Delta t}{2}} = \mathbf{R}_{t+\frac{\Delta t}{2}}. \quad (4.5)$$

Selon les dernières considérations, l'algorithme entourant l'intégration de (2.50) dans un repère tournant s'écrit:

1. Évaluation du gradient de déformations en $t + \frac{\Delta t}{2}$ et $t + \Delta t$:

$$\mathbf{F}_{t+\Delta t} = \frac{\partial \varphi(\tilde{X}, t + \Delta t)}{\partial \tilde{X}}, \quad \mathbf{F}_{t+\frac{\Delta t}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{t+\Delta t} + \mathbf{F}_t). \quad (4.6)$$

2. Calculer une estimation du gradient de vitesse de déformations par (2.13):

$$L = \frac{1}{\Delta t} \Delta F F_{t+\Delta t}^{-1}, \quad \text{où } \Delta F = (F_{t+\Delta t} - F_t). \quad (4.7)$$

3. Évaluer le tenseur taux de déformation D par (2.15).
 4. Évaluer la rotation Q du repère global à l'aide de (4.3) ou encore (4.5).
 5. Transformer les formes vectorielles des tenseurs σ et D dans le repère objectif:

$$\left. \begin{aligned} \underline{\sigma}'_t &= \mathcal{P}_t^T \underline{\sigma}_t \\ \underline{D}' &= \mathcal{P}_{t+\Delta t}^T \underline{D} \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

où \mathcal{P} représente la matrice de transformation, fonction de Q , applicable aux formes vectorielles des tenseurs d'ordre 2. La dérivation complète de cette matrice est présentée dans Batoz et Dhatt (1990).

6. Intégrer la loi de comportement et évaluer le module tangent consistant dans le repère objectif:

$$\underline{\sigma}'_{t+\Delta t} = \mathcal{H}(\underline{\sigma}'_t, \varepsilon_{ps_t}, \underline{D}'), \quad \mathbf{C}'_{ep} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{D}'}. \quad (4.9)$$

7. Ramener les quantités évalués en $t + \Delta t$ dans le repère global:

$$\left. \begin{aligned} \underline{\sigma}_{t+\Delta t} &= \mathcal{P}_{t+\Delta t} \underline{\sigma}'_{t+\Delta t} \\ \mathbf{C}_{ep} &= \mathcal{P}_{t+\Delta t}^T \mathbf{C}'_{ep} \mathcal{P}_{t+\Delta t}. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

4.2.1.2 Méthode du retour radial

Dans cet ouvrage, et ce, en raison de l'usage exclusif du critère de von Mises, on se propose d'utiliser un schéma d'intégration de type Euler-implicite correspondant, dans le cas du critère de von Mises, à un algorithme de retour radial sur la surface d'écoulement. En général, cette méthode implique une procédure itérative permettant de retrouver la projection orthogonale. Cependant, sous les hypothèses d'incompressibilité plastique et d'écrouissage linéaire, il est possible d'obtenir cette projection de façon exacte Crisfield (1991).

Tel que décrit sur la Figure 4.1, considérons l'état de contraintes en t notée $\underline{\sigma}_A$, ainsi que $\underline{\sigma}_B$ correspondant à un accroissement élastique depuis $\underline{\sigma}_A$. Dans un contexte de violation du critère (2.44c), il importe de ramener la contrainte $\underline{\sigma}_B$ en un point, défini par sa projection sur la dite surface correspondant ainsi à un état de contraintes admissible en $t + \Delta t$ noté $\underline{\sigma}_C$ tel que:

$$\underline{\sigma}_C = \underline{\sigma}_A + \Delta \sigma = \underline{\sigma}_A + \int_t^{t+\Delta t} \underline{\dot{\sigma}} dt. \quad (4.11)$$

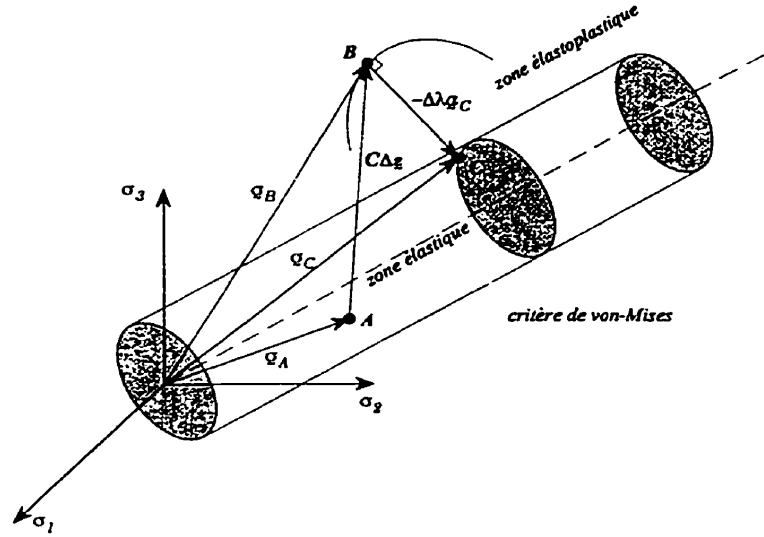


Figure 4.1 – Intégration implicite de la loi de comportement sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$

Considérant la relation (2.44a), l'expression (4.11) devient:

$$\underline{\sigma}_C = \underline{\sigma}_A + \underline{C} \Delta \varepsilon - \Delta \lambda \underline{C} \underline{a}_B = \underline{\sigma}_B - \Delta \lambda \underline{C} \underline{a}_B. \quad (4.12)$$

La résolution de (4.12) consiste donc à déterminer $\Delta \lambda$ satisfaisant la projection orthogonale de $\underline{\sigma}_B$ sur la surface. Pour ce faire, la décomposition de $\underline{\sigma}$ en ses parties volumique $\underline{\sigma}^m$ et déviatorique $\underline{\sigma}^d$ permet de réécrire (4.11) sous la forme:

$$\underline{\sigma}_C^m \underline{j} + \underline{\sigma}_C^d = \underline{\sigma}_B^m \underline{j} + \underline{\sigma}_B^d - \Delta \lambda \underline{C} \underline{a}_B \quad (4.13)$$

où $\underline{j} = (1,1,1,0,0,0)$ est l'opérateur de projection volumique. Selon l'hypothèse d'incompressibilité plastique, l'écoulement de la surface se produit donc dans un plan perpendiculaire à \underline{j} d'où l'égalité: $\underline{\sigma}_B^m = \underline{\sigma}_C^m$. Expriment le terme $\underline{C} \underline{a}_B$ sous la forme:

$$\underline{C} \underline{a}_B = \frac{3\mu \underline{\sigma}_B^d}{\sigma_{vmB}}, \quad (4.14)$$

l'expression (4.13) permet d'écrire:

$$\underline{\sigma}_C^d = \left(1 - \frac{3\mu \Delta \lambda}{\sigma_{vmB}}\right) \underline{\sigma}_B^d = \alpha \underline{\sigma}_B^d. \quad (4.15)$$

La détermination de $\Delta \lambda$ est finalement obtenue par imposition d'un critère nul en C (2.45) tel que:

$$f_C = \sigma_{vmC} - \sigma_{eC}(\varepsilon_{psC}) = \alpha \sigma_{vmB} - \sigma_{eC}(\varepsilon_{psC}) = 0. \quad (4.16)$$

Sous l'hypothèse d'un écrouissage linéaire, $\sigma_{eC} = \sigma_{eB} + H \Delta \varepsilon_{ps}$ et utilisant la relation $\Delta \varepsilon_{ps} = \Delta \lambda$, (4.16) devient:

$$f_C = \sigma_{vmB} - 3\mu \Delta \lambda - (\sigma_{eB} + H \Delta \varepsilon_{ps}) = f_B - (3\mu + H) \Delta \lambda = 0 \quad (4.17)$$

menant ainsi à la résolution complète de (4.12) avec

$$\Delta \lambda = \frac{f_B}{(3\mu + H)}. \quad (4.18)$$

4.2.1.3 Évaluation du module tangent consistant C_{ep}

La résolution des expressions (2.59) et (2.67) nécessite le calcul implicite de $\dot{\tilde{\sigma}}$ au point C. Une première façon de faire consiste à utiliser la forme (2.50) obtenue précédemment. Dans cette expression, le module tangent C_{ep} , reflétant la nouvelle rigidité matérielle au point C, n'est obtenu que par vérification de la condition de persistance (2.44c) et n'est, en aucun cas, liée au schéma d'intégration utilisé. Cette inconsistance du module tangent n'affecte en rien la qualité de la solution finale, mais la rapidité avec laquelle celle-ci sera obtenue lors de la résolution, par une méthode itérative, des équations d'équilibre.

Dans cette optique, la détermination du module tangent consistant avec le schéma d'intégration peut être obtenu en différenciant, par rapport au temps, la relation (4.12) tel que:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\sigma}} &= C \dot{D} - \dot{\lambda} C a - \Delta \lambda C \frac{\partial a}{\partial \tilde{\sigma}} \dot{\tilde{\sigma}} \\ &= \left(I - \Delta \lambda C \frac{\partial a}{\partial \tilde{\sigma}} \right)^{-1} C (D - \dot{\lambda} a) \\ &= Q^{-1} C (D - \dot{\lambda} a) = R (D - \dot{\lambda} a). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Finalement, l'application de la condition de persistance (2.49), à l'aide de (4.19) permet d'obtenir la forme finale du taux de contrainte $\dot{\tilde{\sigma}} = C_{ep} \dot{D}$ en considérant un module tangent consistant défini par:

$$C_{ep} = R \left(I - \frac{a a^T R}{\tilde{a}^T R a + H} \right) \dot{D}. \quad (4.20)$$

En comparant le module tangent consistant au module standard, on constate que le module tangent dans (2.50) est obtenu en imposant $\Delta \lambda = 0$ dans la relation (4.19). Sous cette condition, la deuxième dérivée du critère f n'est pas prise en compte dans C_{ep} .

4.2.2 Loi de frottement de Coulomb

L'intégration de la loi de frottement de Coulomb est obtenue à l'aide d'un schéma tout à fait similaire à celui utilisé lors de l'intégration de la loi de comportement élastoplastique. Considérons, dans un premier temps, une écriture en vitesse (taux de frottement) dans la base convective de l'expression (3.35) telle que:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \|\underline{t}_{\mathcal{T}}^b\| - \mu t_N \leq 0 \\ \dot{t}_{\alpha} &= \epsilon_T \left\{ \mathbf{M}_{\alpha\beta} \dot{\bar{\xi}}^{\alpha} - \zeta \frac{t_{\alpha}}{\|\underline{t}_{\mathcal{T}}^b\|} \right\} \\ \zeta &\geq 0 \\ \Phi \zeta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

En comparant les expressions (4.21) et (2.44), on constate aisément la similitude entre les deux lois. En effet, le terme entre crochets de (4.21) correspond au taux de déformation élastique, qui, contrairement à la loi élastoplastique, doit être identiquement nul dans un contexte non régularisé. Dans ce contexte, les coefficients ϵ_T et ζ jouent les rôles respectifs de module élastique et de multiplicateur plastique.

Conséquemment, la détermination des contraintes de frottement est obtenue par l'utilisation d'un schéma d'Euler implicite sur (4.21) telles que:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{t+\Delta t} &= \|\underline{t}_{\mathcal{T}_{t+\Delta t}}^b\| - \mu t_{N_{t+\Delta t}} \leq 0 \\ t_{\alpha_{t+\Delta t}} &= t_{\alpha_t} + \epsilon_T \left\{ \mathbf{M}_{\alpha\beta} (\bar{\xi}_{t+\Delta t}^{\beta} - \bar{\xi}_t^{\beta}) - \zeta \frac{t_{\alpha_{t+\Delta t}}}{\|\underline{t}_{\mathcal{T}_{t+\Delta t}}^b\|} \right\} \\ \zeta &\geq 0 \\ \Phi_{t+\Delta t} \zeta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

La résolution de (4.22) est obtenue à l'aide d'un algorithme de type prédicteur-correcteur tel qu'employé pour l'intégration de la loi de comportement élastoplastique. Pour ce faire, débutons par une prédiction notée ($\hat{\cdot}$), représentant un état non glissant défini par:

$$\left. \begin{aligned} t_{N_{t+\Delta t}} &= \epsilon_N \langle g_{t+\Delta t} \rangle \\ \hat{t}_{\alpha_{t+\Delta t}} &= t_{\alpha_t} + \epsilon_T \mathbf{M}_{\alpha\beta} (\bar{\xi}_{t+\Delta t}^{\beta} - \bar{\xi}_t^{\beta}) \\ \Phi_{t+\Delta t} &= \|\underline{t}_{\mathcal{T}_{t+\Delta t}}^b\| - \mu t_{N_{t+\Delta t}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

Après vérification de la condition de glissement par l'intermédiaire du critère $\Phi_{t+\Delta t}$, on évalue la valeur finale de $t_{\alpha_{t+\Delta t}}$ selon laquelle (voir Figure 4.2):

$$t_{\alpha_{t+\Delta t}} = \begin{cases} \hat{t}_{\alpha_{t+\Delta t}} & \text{si } \Phi_{t+\Delta t} \leq 0 \text{ (sans glissement)} \\ \mu t_{N_{t+\Delta t}} \frac{\hat{t}_{\alpha_{t+\Delta t}}}{\|\underline{t}_{\mathcal{T}_{t+\Delta t}}^b\|} & \text{autrement (avec glissement)}. \end{cases} \quad (4.24)$$

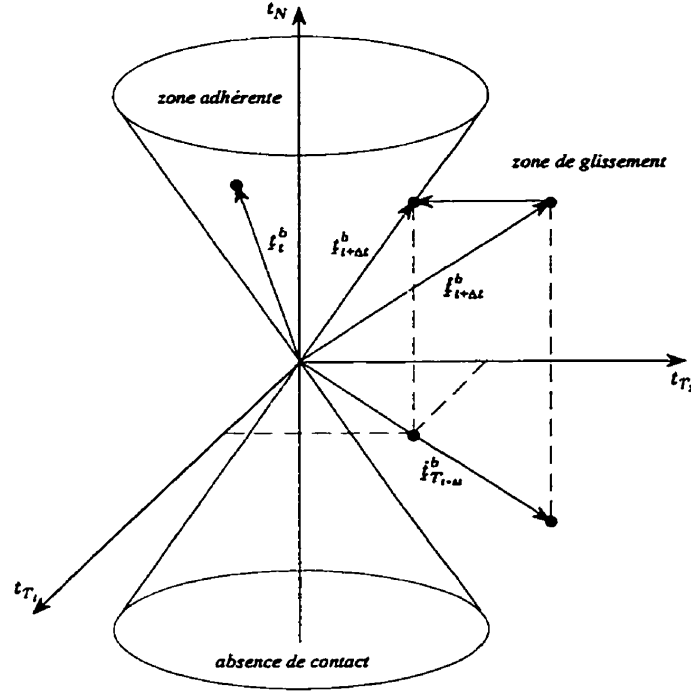


Figure 4.2 – Intégration de la loi de frottement de Coulomb sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$

On note aisément que les expressions (4.24) sont cinématiquement déterminées; l'évaluation des contraintes de frottement est directement déterminée par l'intermédiaire des quantités $g_{t+\Delta t}$ et $\bar{\xi}_{t+\Delta t}^\beta - \bar{\xi}_t^\beta$. De plus, il importe de remarquer que l'utilisation d'une représentation convective de la loi de frottement permet de préserver l'objectivité en cours d'intégration sans utilisation de dérivées covariantes compliquées (Glaser, 1992; Kikuchi et Oden, 1988). Selon (4.24), il est maintenant possible de procéder à la détermination de la forme linéarisée $\Delta t_{T_{\alpha_t+\Delta t}}$. Celle-ci est présentée en détail en Annexe B et permet d'écrire, après regroupement des expressions (B.67) et (B.88):

$$\Delta t_{T_{\alpha_t+\Delta t}} = \begin{cases} \Delta \hat{t}_{T_{\alpha_t+\Delta t}} = \epsilon_T \left[M_{\alpha\beta,\gamma} \Delta \bar{\xi}^\gamma \left(\bar{\xi}_{t+\Delta t}^\beta - \bar{\xi}_t^\beta \right) + M_{\alpha\beta} \Delta \bar{\xi}^\beta \right] & \text{(sans glissement)} \\ \mu H(g) \epsilon_N P_{T_\alpha} \Delta g + \frac{\mu t_{N_t+\Delta t}}{\|\hat{t}_{T_{i_t+\Delta t}}^b\|} \Delta \hat{t}_{T_{\beta_t+\Delta t}} \left(\delta_\alpha^\beta - P_T^\beta P_{T_\alpha} \right) + \mu t_{N_t+\Delta t} \tilde{P}_T \cdot \left(e_{\beta,\gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\gamma + \Delta u_{\beta}^2 \right) P_T^\beta P_{T_\alpha} & \text{(avec glissement).} \end{cases} \quad (4.25)$$

Il importe de noter que la non-symétrie associée au problème de contact avec frottement émane exclusivement de l'expression (4.25). Cette non-symétrie, provenant de la linéarisation

des contraintes de frottement, est due au caractère non associé de la loi de frottement de Coulomb. En effet, l'expression (3.33b) reflète l'absence de glissement irréversible dans la direction normale. Plus simplement, l'intensité des contraintes de frottement dépend directement de la contrainte normale de contact et non l'inverse. Dans ce contexte, il devient donc impossible d'établir une représentation du potentiel maximal dissipé (Simo et Laursen, 1992), exception faite du cas pour lequel t_N est constant.

Plus spécifiquement, la perte de symétrie dans le contexte sans glissement apparaît en raison de la variation non nulle de la métrique $M_{\alpha\beta}$ au point de contact $\bar{\xi}$. Une façon simple d'éliminer cette non-symétrie consiste à évaluer cette métrique en un point fixe plutôt que de la faire varier avec la déformation. Cependant, malgré cette initiative, il n'en demeure pas moins que le problème demeure non symétrique en raison du glissement potentiel des surfaces en contact.

4.2.3 Spécialisation à l'interface toron-mors d'ancrage

La discrétisation temporelle de la spécialisation du problème de contact avec frottement associé à l'interface toron-mors d'ancrage est directement obtenue de l'intégration en temps des conditions (3.55). L'utilisation d'un schéma identique à celui de la section précédente permet d'écrire:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{t+\Delta t} &= |t_{T_{2t+\Delta t}}| - \mu_{tm} t_{N_{t+\Delta t}} \leq 0 \\ t_{T_{2t+\Delta t}} &= t_{T_{2t}} + \epsilon_{T_2} \left\{ (\bar{\xi}_{t+\Delta t}^2 - \bar{\xi}_t^2) - \zeta \frac{t_{T_{2t+\Delta t}}}{|t_{T_{2t+\Delta t}}|} \right\} \\ t_{T_{1t+\Delta t}} &= t_{T_{1t}} + \epsilon_{T_1} (\bar{\xi}_{t+\Delta t}^1 - \bar{\xi}_t^1) \\ \zeta &\geq 0 \\ \Phi_{t+\Delta t} \zeta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

Comme on peut le constater, la nature totale associée à l'évolution de la contrainte $t_{T_{1t+\Delta t}}$ permet d'exprimer celle-ci sous la forme:

$$t_{T_{1t+\Delta t}} = \epsilon_{T_1} \bar{\xi}_{t+\Delta t}^1. \quad (4.27)$$

Pour ce qui est de la contrainte de frottement $t_{T_{2t+\Delta t}}$, celle-ci est évaluée à l'aide de l'algorithme de prédiction/correction utilisé à la section précédente et tel que:

$$\left. \begin{aligned} t_{N_{t+\Delta t}} &= \frac{\eta g_{u_{t+\Delta t}}}{g_{t+\Delta t}} \\ \hat{t}_{T_{2t+\Delta t}} &= t_{T_{2t}} + \epsilon_{T_2} (\bar{\xi}_{t+\Delta t}^2 - \bar{\xi}_t^2) \\ \Phi_{t+\Delta t} &= |\hat{t}_{T_{2t+\Delta t}}| - \mu_{tm} t_{N_{t+\Delta t}} \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

Après vérification de la condition de glissement par l'intermédiaire du critère, la contrainte de frottement $t_{T_{\alpha_{t+\Delta t}}}$ prend la valeur:

$$t_{T_{2_{t+\Delta t}}} = \begin{cases} \hat{t}_{T_{2_{t+\Delta t}}} & \text{si } \Phi_{t+\Delta t} \leq 0 \text{ (sans glissement)} \\ \mu_{tm} t_{N_{t+\Delta t}} \frac{\hat{t}_{T_{2_{t+\Delta t}}}}{|\hat{t}_{T_{2_{t+\Delta t}}}|} & \text{autrement (avec glissement)}. \end{cases} \quad (4.29)$$

Finalement, les expressions (4.27) et (4.29) permettent de procéder à l'évaluation des termes $\Delta t_{T_{1_{t+\Delta t}}}$ et $\Delta t_{T_{2_{t+\Delta t}}}$. Cet exercice est présenté en détail en Annexe B et permet d'écrire, après regroupement des expressions (B.89), (B.91) et (B.92), les formes linéarisées finales:

$$\Delta t_{T_{1_{t+\Delta t}}} = \epsilon_{T_1} \Delta \bar{\xi}^1 \quad (4.30)$$

$$\Delta t_{T_{2_{t+\Delta t}}} = \begin{cases} \epsilon_{T_2} \Delta \bar{\xi}^2 & \text{(sans glissement)} \\ \mu_{tm} \Delta t_{N_{t+\Delta t}} \frac{\hat{t}_{T_{2_{t+\Delta t}}}}{|\hat{t}_{T_{2_{t+\Delta t}}}|} & \text{(avec glissement)}. \end{cases} \quad (4.31)$$

4.3 Discrétisation spatiale par éléments finis

Tel que mentionné précédemment, la discrétisation spatiale des expressions variationnelles présentées aux Chapitres 2 et 3 est effectuée par la méthode des éléments finis¹. Cette méthode, qui constitue, une technique particulière d'approximation des fonctions solutions, consiste à subdiviser le milieu continu Ω en sous-domaines, notés Ω^e de dimensions finies appelés éléments, tel que:

$$\Omega = \int_{\Omega} d\Omega \approx \sum_{e=1}^{n_{\Omega}^e} \Omega^e = \Omega^h. \quad (4.32)$$

où n_{Ω}^e représente le nombre d'éléments dans Ω . Conséquemment, la surface extérieure à Ω^h , notée Γ^h , est alors défini par:

$$\Gamma^h = \sum_{e=1}^{n_{\Gamma}^e} \Gamma^e \quad (4.33)$$

tel que montré à la Figure 4.3.

Considérons, dans un premier temps, les champs φ^h et $\delta \varphi^h$ représentant respectivement les expressions discrètes des champs continus φ et $\delta \varphi$ tels que φ^h satisfait les conditions aux

1. On réfère le lecteur aux ouvrages classiques tels que (Dhatt et Touzot, 1981; Batoz et Dhatt, 1990; Burnett, 1987) pour de plus amples détails sur les concepts de base associés à la méthode des éléments finis.

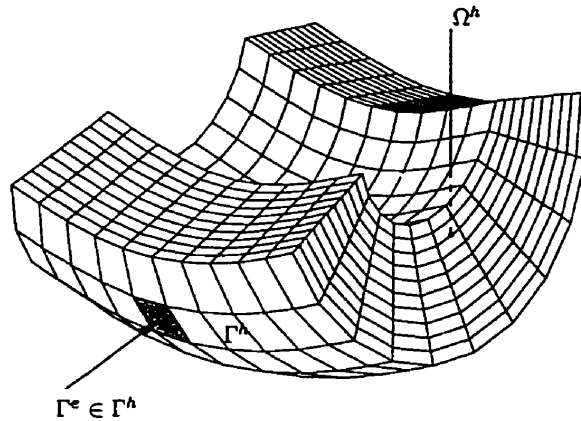


Figure 4.3 – Discretisation du milieu continu par éléments finis

limites homogènes et $\delta \varphi^h = 0$ sur γ_u^h . Sur la base d'un élément fini dans Ω , l'approximation de φ^h , notée $\varphi_\Omega^h(\zeta)$ s'exprime sous la forme:

$$\varphi_\Omega^h(\zeta) = \sum_{a=1}^{n_e^n} N_\Omega^a(\zeta) \varphi_a \quad (4.34)$$

où n_e^n représente le nombre de nœud total de l'élément en cause, $N_\Omega^a(\zeta)$, la fonction d'interpolation isoparamétrique évaluée à la position $\zeta = \langle \zeta^1, \zeta^2, \zeta^3 \rangle \in \mathcal{A}_\Omega^e$ et φ_a , une valeur nodale du champ φ^h . Dans ce contexte, \mathcal{A}_Ω^e exprime la paramétrisation générique d'un élément quelconque dans Ω de telle sorte que $N_\Omega^a(\zeta) : \mathcal{A}_\Omega^e \rightarrow \mathcal{R}^3$. Dans le même ordre d'idées, l'approximation élémentaire du champ φ^h sur la frontière Γ , notée $\varphi_\Gamma^h(\eta)$ s'écrit:

$$\varphi_\Gamma^h(\eta) = \sum_{a=1}^{n_e^n} N_\Gamma^a(\eta) \varphi_a. \quad (4.35)$$

où cette fois ci, $N_\Gamma^a(\eta) : \mathcal{A}_\Gamma^e \rightarrow \mathcal{R}^2$ représente une fonction d'interpolation isoparamétrique évaluée à la position $\eta = \langle \eta^1, \eta^2 \rangle \in \mathcal{A}_\Gamma^e$ et telle que $\mathcal{A}_\Gamma^e \subset \mathcal{A}_\Omega^e$, permettant ainsi de respecter les conditions de continuité à la frontière du solide.

Selon les dernières définitions, la discrétisation spatiale des formes variationnelles implique donc une sommation de la contribution au travail virtuel de chacun des éléments constituant le ou les solides en cause. De ce fait, la forme discrète de l'expression générale (2.60) s'écrit:

$$\begin{aligned} W(\delta \varphi, \varphi_{t+\Delta t}) &= W(\delta \varphi, \varphi_t) + \Delta W(\delta \varphi, \varphi_t) = 0 \\ &\approx W(\delta \varphi^h, \varphi_t^h) + \Delta W(\delta \varphi^h, \varphi_t^h). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Considérant le cas de deux solides potentiellement en contact tels que:

$$\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2 \quad (4.37a)$$

$$\Gamma_s = \Gamma_s^1 \cup \Gamma_s^2 \quad (4.37b)$$

ainsi que la définition spécifique de chacune des contributions données au Chapitre 2, l'expression (4.36) devient:

$$\begin{aligned} W(\delta \varphi, \varrho_{t+\Delta t}) \approx & \sum_{e=1}^{n_{\Omega}^e} \{W_{int}^e + W_v^e + \Delta W_{int}^e\} + \sum_{e=1}^{n_{\Gamma_s}^e} W_s^e \\ & + \sum_{e=1}^{n_{\Gamma_c}^e} \{W_c^e + \Delta W_c^e\} \approx 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

La suite de cette section consiste donc à effectuer la discrétisation spatiale particulière à chacune des contributions définis dans (4.38).

4.3.1 Mécanique en grandes transformations

Considérons, dans un premier temps, la contribution au résidu des termes de (4.38) associés au problème de mécanique en grandes transformations. Les définitions (2.59), (2.56a) et (2.58a) permettent d'écrire:

$$W_{int}^e = \int_{\omega^e} \delta D^h \cdot \tilde{\sigma}^h d\omega^e \quad (4.39a)$$

$$W_v^e = - \int_{\omega^e} \delta \varphi_{\Omega}^h \cdot \underline{f}_v^h d\omega^e \quad (4.39b)$$

$$W_s^e = - \int_{\gamma_s^e} \delta \varphi_{\Gamma_s}^h \cdot \underline{f}_s^h d\gamma_s^e. \quad (4.39c)$$

En effectuant les changements de variable associés aux domaines d'intégration ω^e et γ_s^e définis respectivement par $j_{\omega}(\zeta)$ et $j_{\gamma_s}(\eta)$, les déterminants des jacobiens de transformation associés à \mathcal{A}_{Ω}^e et $\mathcal{A}_{\Gamma_s}^e$ et remplaçant les intégrales par des schémas d'intégration numérique appropriés, les expressions (4.39) deviennent respectivement:

$$W_{int}^e \approx \sum_{k=1}^{n_{\Omega}^{pi}} \left\{ \delta D^h(\zeta^k) \cdot \tilde{\sigma}^h(\zeta^k) j_{\omega}(\zeta^k) W_{\Omega}^k \right\} \quad (4.40a)$$

$$W_v^e \approx - \sum_{k=1}^{n_{\Omega}^{pi}} \left\{ \delta \varphi_{\Omega}^h(\zeta^k) \cdot \underline{f}_v^h(\zeta^k) j_{\omega}(\zeta^k) W_{\Omega}^k \right\} \quad (4.40b)$$

$$W_s^e \approx - \sum_{k=1}^{n_{\Gamma_s}^{pi}} \left\{ \delta \varphi_{\Gamma_s}^h(\eta_s^k) \cdot \underline{f}_s^h(\eta_s^k) j_{\gamma_s}(\eta_s^k) W_{\Gamma_s}^k \right\} \quad (4.40c)$$

où n_e^{pi} représente le nombre de points d'intégration associés à l'élément. Les termes W_Ω^k et $W_{\Gamma_s}^k$, quant à eux, déterminent les poids d'intégration au point k , de coordonnées respectives ζ^k et η_s^k . Considérant la représentation élémentaire des champs de déplacement (4.34) et (4.35), les contributions (4.40) peuvent être réécrites telles que:

$$W_{int}^e \approx \delta \varphi^e \cdot \sum_{k=1}^{n_e^{pi}} \left\{ \mathbf{B}^{kT} \underline{\sigma}^k j_\omega^k W_\Omega^k \right\} = \delta \varphi^e \cdot \underline{R}_{int}^e \quad (4.41a)$$

$$W_v^e \approx -\delta \varphi^e \cdot \sum_{k=1}^{n_e^{pi}} \left\{ \mathbf{N}_\Omega^{kT} \underline{f}_v^k j_\omega^k W_\Omega^k \right\} = \delta \varphi^e \cdot \underline{R}_v^e \quad (4.41b)$$

$$W_s^e \approx -\delta \varphi^e \cdot \sum_{k=1}^{n_e^{pi}} \left\{ \mathbf{N}_{\Gamma_s}^{kT} \underline{f}_s^k j_{\gamma_s}^k W_{\Gamma_s}^k \right\} = \delta \varphi^e \cdot \underline{R}_s^e \quad (4.41c)$$

où $\delta \varphi^e$ représentent le vecteur élémentaire regroupant les n_e^n vecteurs des déplacements virtuels et défini par:

$$\delta \varphi^e = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \delta \varphi_a \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad a = 1, n_e^n. \quad (4.42)$$

Quant aux matrices \mathbf{N}_Ω^k , $\mathbf{N}_{\Gamma_s}^k$, celles-ci définissent respectivement les interpolations élémentaires du champ de déplacement sur Ω et Γ_s , et sont définies par:

$$\mathbf{N}_\Omega^k = \begin{bmatrix} N_\Omega^a(\zeta^k) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & N_\Omega^a(\zeta^k) & 0 & \dots \\ & 0 & 0 & N_\Omega^a(\zeta^k) & \dots \end{bmatrix}, \quad a = 1, n_e^n \quad (4.43a)$$

$$\mathbf{N}_{\Gamma_s}^k = \begin{bmatrix} N_{\Gamma_s}^a(\eta_s^k) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & N_{\Gamma_s}^a(\eta_s^k) & 0 & \dots \\ & 0 & 0 & N_{\Gamma_s}^a(\eta_s^k) & \dots \end{bmatrix}, \quad a = 1, n_e^n. \quad (4.43b)$$

Quant à la matrice \mathbf{B}^k , celle-ci permet la représentation interpolée du champ gradient de déplacement associé à la définition vectorielle (2.41a) et telle que:

$$\mathbf{B}^k = \begin{bmatrix} N_{\Omega,x}^a(\zeta^k) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & N_{\Omega,y}^a(\zeta^k) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & N_{\Omega,z}^a(\zeta^k) & \dots \\ & N_{\Omega,y}^a(\zeta^k) & N_{\Omega,x}^a(\zeta^k) & 0 & \dots \\ & 0 & N_{\Omega,z}^a(\zeta^k) & N_{\Omega,y}^a(\zeta^k) & \dots \\ & N_{\Omega,z}^a(\zeta^k) & 0 & N_{\Omega,x}^a(\zeta^k) & \dots \end{bmatrix}, \quad a = 1, n_e^n. \quad (4.44)$$

Pour ce qui est de la contribution à la matrice tangente, l'expression (2.69) intégrée nu-

mériquement, permet de réécrire ΔW_{int}^e sous la forme:

$$\begin{aligned} \Delta W_{int}^e &\approx \delta \varphi^e \cdot \sum_{k=1}^{n_e^i} \left\{ \left(\mathbf{B}^{kT} \mathbf{C}_{ep}^k \mathbf{B}^k + \mathbf{B}_\varphi^{kT} \bar{\sigma}^k \mathbf{B}_\varphi^k \right) j_\omega^k W_\Omega^k \right\} \Delta \varphi^e \\ &\approx \delta \varphi^e \cdot (\mathbf{K}_m^e + \mathbf{K}_\sigma^e) \Delta \varphi^e \\ &\approx \delta \varphi^e \cdot \mathbf{K}_{int}^e \Delta \varphi^e \end{aligned} \quad (4.45)$$

où \mathbf{B}_φ^k représente la matrice d'interpolation du champ gradient de déplacement associée à la définition vectorielle (2.66) définie par:

$$\mathbf{B}_\varphi^k = \begin{bmatrix} N_{\Omega,x}^a(\zeta^k) & 0 & 0 \\ N_{\Omega,y}^a(\zeta^k) & 0 & 0 \\ N_{\Omega,z}^a(\zeta^k) & 0 & 0 \\ 0 & N_{\Omega,x}^a(\zeta^k) & 0 \\ \dots & 0 & N_{\Omega,y}^a(\zeta^k) & 0 & \dots \\ 0 & N_{\Omega,z}^a(\zeta^k) & 0 & & \\ 0 & 0 & N_{\Omega,x}^a(\zeta^k) & & \\ 0 & 0 & N_{\Omega,y}^a(\zeta^k) & & \\ 0 & 0 & N_{\Omega,z}^a(\zeta^k) & & \end{bmatrix}, \quad a = 1, n_e^n, \quad (4.46)$$

et $\Delta \varphi^e$, le vecteur élémentaire, de même topologie que (4.42), représentant la portion incrémentale du champ de déplacement u^e , noté Δu^e et tel que défini par (2.2). Comme on peut le constater dans (4.45), les matrices \mathbf{K}_m^e et \mathbf{K}_σ^e expriment respectivement les rigidités matérielle et géométrique sur le domaine discrétisé.

4.3.2 Problème de contact avec frottement

La discrétisation spatiale des expressions variationnelles associées au problème de contact avec frottement, constitue un exercice légèrement plus complexe que le cas précédent, et ce, en raison de l'interaction possible des diverses frontières candidates au contact. Pour ce faire, considérons, dans un premier temps, les expressions discrètes des contributions W_c^e et ΔW_c^e qui, à partir de (3.44) et (3.45) s'écrivent respectivement:

$$W_c^e = \int_{\Gamma_c^{1e}} \left[t_N^h \delta g^h + t_{T_\alpha}^h \delta \bar{\xi}^{\alpha^h} \right] d\Gamma_c^{1e} \quad (4.47)$$

et

$$\Delta W_c^e = \int_{\Gamma_c^{1e}} \left[\Delta t_N^h \delta g^h + t_N^h \Delta \delta g^h + \Delta t_{T_\alpha}^h \delta \bar{\xi}^{\alpha^h} + t_{T_\alpha}^h \Delta \delta \bar{\xi}^{\alpha^h} \right] d\Gamma_c^{1e}. \quad (4.48)$$

Après transformation du domaine d'intégration Γ_c^{1e} à l'aide de $j_{\Gamma_c^{1e}}(\eta_c) : \mathcal{A}_{\Gamma_c^{1e}}^e \rightarrow \mathcal{R}^2$, et remplaçant l'intégration continue par un schéma numérique approprié, les expressions (4.47)

et (4.48) deviennent respectivement:

$$W_c^e \approx \sum_{k=1}^{n_c^{pi}} \left\{ \left[t_N^h(\eta_c^k) \delta g^h(\eta_c^k) + t_{T_\alpha}^h(\eta_c^k) \delta \bar{\xi}^{\alpha^h}(\eta_c^k) \right] j_{\Gamma_c^1}(\eta_c^k) W_{\Gamma_c^1}^k \right\} \quad (4.49)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta W_c^e \approx \sum_{k=1}^{n_c^{pi}} \left\{ \left[\Delta t_N^h(\eta_c^k) \delta g^h(\eta_c^k) + t_N^h(\eta_c^k) \Delta \delta g^h(\eta_c^k) \right. \right. \\ \left. \left. + \Delta t_{T_\alpha}^h(\eta_c^k) \delta \bar{\xi}^{\alpha^h}(\eta_c^k) + t_{T_\alpha}^h(\eta_c^k) \Delta \delta \bar{\xi}^{\alpha^h}(\eta_c^k) \right] j_{\Gamma_c^1}(\eta_c^k) W_{\Gamma_c^1}^k \right\}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Comme on peut le constater, l'évaluation des expressions (4.49) et (4.50) implique une sommation des contributions associées à chaque point d'intégration $(\eta_c^k) \in \Gamma_c^{1^e}$ nécessitant, par le fait même, l'évaluation du point de contact de la particule esclave, de coordonnée $\varphi_{\Gamma_c^1}^h(\eta_c^k)$ sur la frontière maître $\Gamma_c^{2^h}$ notée $\varphi_{\Gamma_c^2}^h(\bar{\xi}^{\alpha^h})$. En raison de la nature distincte des discrétisations associées aux frontières candidates au contact, la contribution totale associée à un élément $\Gamma_c^{1^e}$ implique donc un nombre variable d'éléments $\Gamma_c^{2^e}$, tel que montré à la Figure 4.4 impliquant, par le fait même, une grande variabilité dans la dimension des quantités élémentaires (résidu et matrice tangente). Dans ce contexte, il semble donc justifier d'introduire la notion d'élément de contact, défini à partir d'un élément esclave $\Gamma_c^{1^e} \in \Gamma_c^{1^h}$ et de l'ensemble des éléments maîtres $\Gamma_c^{2^e} \in \Gamma_c^{2^h}$, candidats aux contact avec $\Gamma_c^{1^e}$. Cette stratégie permet, entre autres, la prise en compte de tous les couplages possibles entre les divers degrés de liberté lors du dimensionnement du système global.

Selon ces dernières constatations, il paraît donc justifier de procéder à l'évaluation des expressions (4.49) et (4.50) à l'aide d'un opérateur d'assemblage plutôt qu'à l'aide d'une simple sommation sur les points d'intégration, permettant ainsi, la prise en compte de l'ensemble des degrés de liberté intervenant dans l'évaluation de la contribution élémentaire. Dès lors, l'expression (4.42) peut donc être réécrite sous la forme:

$$\delta \varphi_c^e = \bigcup_{k=1}^{n_c^{pi}} \delta \varphi_c^k \quad (4.51)$$

où $\delta \underline{\Phi}_c^k$ représente le vecteur nodal du champ de déplacement virtuel associé à l'élément $\Gamma_c^{1^e}$ ainsi qu'à celui obtenu de la projection du point d'intégration k sur $\Gamma_c^{2^h}$, noté $\Gamma_c^{2^e}$, et tel que:

$$\delta \underline{\Phi}_c^k = \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \delta \varphi_a \in \Gamma_c^{1^e} \\ \vdots \\ \hline \vdots \\ \delta \varphi_a \in \Gamma_c^{2^e} \\ \vdots \end{array} \right\}. \quad (4.52)$$

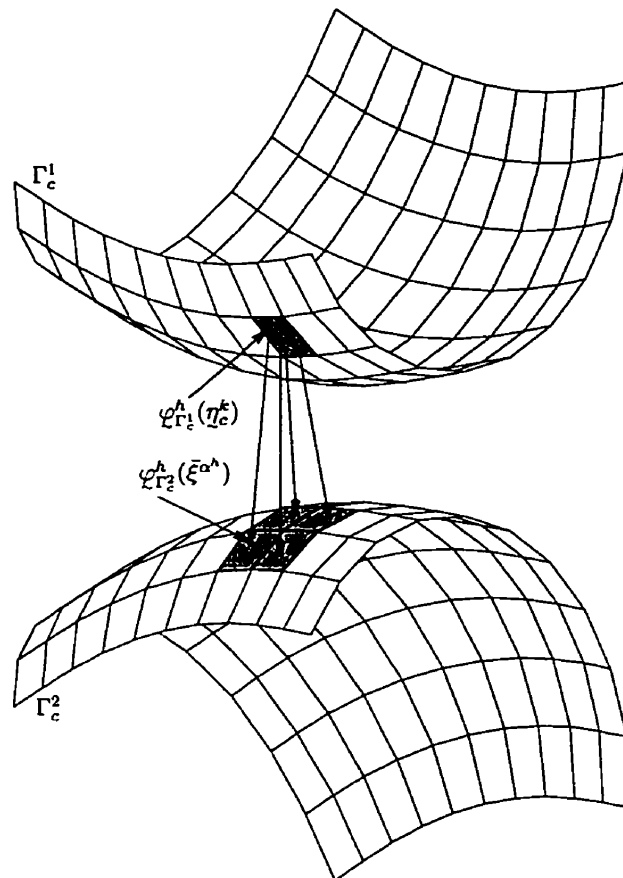


Figure 4.4 - *Discrétisation spatiale à l'interface de contact*

Considérant la définition (4.51), les approximations discrètes des termes (4.49) et (4.50) peuvent donc être réécrites sous la forme:

$$W_c^e \approx \bigcup_{k=1}^{n_e^i} \left\{ \left[\delta \varphi_c^k \cdot \tilde{R}_c^k \right] j_{\Gamma_c^1}^k W_{\Gamma_c^1}^k \right\} = \delta \varphi^e \cdot \tilde{R}_c^e \quad (4.53)$$

et

$$\Delta W_c^e \approx \bigcup_{k=1}^{n_e^i} \left\{ \delta \varphi_c^k \cdot \left[(\mathbf{K}_{c_N}^k + \mathbf{K}_{c_T}^k) j_{\Gamma_c^1}^k W_{\Gamma_c^1}^k \right] \Delta \varphi_c^k \right\} = \delta \varphi^e \cdot \mathbf{K}_c^e \Delta \varphi^e \quad (4.54)$$

où $\Delta \tilde{\Phi}_c^k$ représente le vecteur nodal du champ de déplacement incrémental associé à l'élément Γ_c^1 et obtenu en remplaçant l'opérateur δ par Δ dans l'expression (4.52). Quant aux expressions de \tilde{R}_c^k , $\mathbf{K}_{c_N}^k$ et $\mathbf{K}_{c_T}^k$, celles-ci sont présentées en détail dans les prochaines sous-sections.

4.3.2.1 Évaluation du terme \tilde{R}_c^k

La définition des formes matricielles associées aux termes $\delta g^h(\eta_c^k)$ et $\delta \bar{\xi}^\alpha(\eta_c^k)$, par l'entremise de (4.52) ainsi qu'à l'aide des définitions:

$$\tilde{N} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ -\tilde{n} N_{\Gamma_c^1}^a(\eta_c^k) \\ \vdots \\ \hline \vdots \\ \tilde{n} N_{\Gamma_c^2}^a(\bar{\xi}) \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \tilde{T}_\alpha = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \tilde{\tau}_\alpha N_{\Gamma_c^1}^a(\eta_c^k) \\ \vdots \\ \hline \vdots \\ -\tilde{\tau}_\alpha N_{\Gamma_c^2}^a(\bar{\xi}) \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \tilde{N}_\alpha = \begin{Bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \hline \vdots \\ -\tilde{n} N_{\Gamma_c^2, \alpha}^a(\bar{\xi}) \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad a = 1, n_e^n \quad (4.55)$$

et

$$\left. \begin{aligned} \tilde{D}_1 &= \frac{1}{\det[\mathbf{A}_{\alpha\beta}]} \left[\mathbf{A}_{22}(\tilde{T}_1 - g\tilde{N}_1) - \mathbf{A}_{12}(\tilde{T}_2 - g\tilde{N}_2) \right] \\ \tilde{D}_2 &= \frac{1}{\det[\mathbf{A}_{\alpha\beta}]} \left[\mathbf{A}_{11}(\tilde{T}_2 - g\tilde{N}_2) - \mathbf{A}_{12}(\tilde{T}_1 - g\tilde{N}_1) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

avec $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$, définie par (B.41), permet d'exprimer (B.36) et (B.40) selon lesquelles \tilde{R}_c^k peut être réécrit sous la forme:

$$\tilde{R}_c^k = t_N^k \tilde{N} + t_{T_1}^k \tilde{D}_1 + t_{T_2}^k \tilde{D}_2 \quad (4.57)$$

4.3.2.2 Évaluation des termes $K_{c_N}^k$ et $K_{c_T}^k$

Considérant, dans un premier temps, la définition des expressions matricielles associées aux termes (B.36), (B.44) et (B.51) par l'entremise des définitions (4.55) et

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_1 &= \underline{N}_1 - (\underline{e}_{1,1} \cdot \underline{n}) \underline{D}_1 - (\underline{e}_{1,2} \cdot \underline{n}) \underline{D}_2 \\ \bar{N}_2 &= \underline{N}_2 - (\underline{e}_{2,1} \cdot \underline{n}) \underline{D}_1 - (\underline{e}_{2,2} \cdot \underline{n}) \underline{D}_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.58)$$

le terme $K_{c_N}^k$ de (4.54) devient:

$$\begin{aligned} K_{c_N}^k &= H(g) \epsilon_N \underline{N} \underline{N}^T \\ &+ t_N \left\{ g \left[m^{11} \left(\bar{N}_1 \bar{N}_1^T + (\underline{e}_{1,1} \cdot \underline{n})^2 \underline{D}_1 \underline{D}_1^T - (\underline{e}_{1,1} \cdot \underline{n}) (\bar{N}_1 \underline{D}_1^T + \underline{D}_1 \bar{N}_1^T) \right) \right. \right. \\ &+ m^{22} \left(\bar{N}_2 \bar{N}_2^T + (\underline{e}_{2,2} \cdot \underline{n})^2 \underline{D}_2 \underline{D}_2^T - (\underline{e}_{2,2} \cdot \underline{n}) (\bar{N}_2 \underline{D}_2^T + \underline{D}_2 \bar{N}_2^T) \right) \\ &+ m^{12} \left(\bar{N}_1 \bar{N}_2^T + \bar{N}_2 \bar{N}_1^T + (\underline{e}_{1,1} \cdot \underline{n}) (\underline{e}_{2,2} \cdot \underline{n}) (\underline{D}_1 \underline{D}_2^T + \underline{D}_2 \underline{D}_1^T) \right. \\ &\quad \left. \left. - (\underline{e}_{1,1} \cdot \underline{n}) (\underline{D}_1 \bar{N}_2^T + \bar{N}_2 \underline{D}_1^T) - (\underline{e}_{2,2} \cdot \underline{n}) (\bar{N}_1 \underline{D}_2^T + \underline{D}_2 \bar{N}_1) \right) \right] \\ &- \underline{N}_1 \underline{D}_1^T - \underline{N}_2 \underline{D}_2^T - \underline{D}_1 \underline{N}_1^T - \underline{D}_2 \underline{N}_2^T \\ &\left. + (\underline{e}_{1,1} \cdot \underline{n}) \underline{D}_1 \underline{D}_1^T + (\underline{e}_{2,2} \cdot \underline{n}) \underline{D}_2 \underline{D}_2^T + (\underline{e}_{1,2} \cdot \underline{n}) (\underline{D}_1 \underline{D}_2^T + \underline{D}_2 \underline{D}_1^T) \right\}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Quant au terme $K_{c_T}^k$, celui-ci, dans un but unique de clarté, se doit d'être défini en deux parties distinctes. Après détermination des expressions matricielles associées aux quantités $\Delta \delta \bar{\xi}^\alpha(\eta_c^k)$ par résolution du système (B.62), $K_{c_T}^k$ peut être exprimée sous la forme:

$$K_{c_T}^k = \frac{1}{\det[A_{\alpha\beta}]} \left[\left(A_{22} t_{T_1}^k - A_{12} t_{T_2}^k \right) K_{c_{T_1}}^k + \left(A_{11} t_{T_2}^k - A_{12} t_{T_1}^k \right) K_{c_{T_2}}^k \right] + K_{c_T}^k \quad (4.60)$$

où

$$\begin{aligned} K_{c_{T_1}}^k &= \underline{T}_{11} \underline{D}_1^T + \underline{T}_{12} \underline{D}_2^T + \underline{D}_1 \underline{T}_{11}^T + \underline{D}_2 \underline{T}_{12}^T \\ &+ \rho_{11}^1 \underline{D}_1 \underline{D}_1^T + \rho_{22}^1 \underline{D}_2 \underline{D}_2^T + \rho_{12}^1 \left(\underline{D}_1 \underline{D}_2^T + \underline{D}_2 \underline{D}_1^T \right) \\ &+ \underline{D}_1 \underline{T}_{11}^T + \underline{D}_2 \underline{T}_{21}^T + \underline{T}_{11} \underline{D}_1^T + \underline{T}_{21} \underline{D}_2^T \\ &+ g \left(\underline{N}_{11} \underline{D}_1^T + \underline{N}_{12} \underline{D}_2^T + \underline{D}_1 \underline{N}_{11}^T + \underline{D}_2 \underline{N}_{12}^T \right) \\ &+ \underline{N} \bar{N}_1^T - \underline{T}_1 \left(m^{11} \underline{T}_{11}^T + m^{12} \underline{T}_{21}^T \right)^T - \underline{T}_2 \left(m^{21} \underline{T}_{11}^T + m^{22} \underline{T}_{21}^T \right)^T \\ &+ \bar{N}_1 \underline{N}^T - \left(m^{11} \underline{T}_{11}^T + m^{12} \underline{T}_{21}^T \right) \underline{T}_1^T - \left(m^{21} \underline{T}_{11}^T + m^{22} \underline{T}_{21}^T \right) \underline{T}_2^T, \end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{\text{CT}_2}^k &= \underline{T}_{21} \underline{D}_1^T + \underline{T}_{22} \underline{D}_2^T + \underline{D}_1 \underline{T}_{21}^T + \underline{D}_2 \underline{T}_{22}^T \\
 &\quad + \rho_{11}^2 \underline{D}_1 \underline{D}_1^T + \rho_{22}^2 \underline{D}_2 \underline{D}_2^T + \rho_{12}^2 \left(\underline{D}_1 \underline{D}_2^T + \underline{D}_2 \underline{D}_1^T \right) \\
 &\quad + \underline{D}_1 \underline{\bar{T}}_{12}^T + \underline{D}_2 \underline{\bar{T}}_{22}^T + \underline{\bar{T}}_{12} \underline{D}_1^T + \underline{\bar{T}}_{22} \underline{D}_2^T \\
 &\quad + g \left(\underline{N}_{21} \underline{D}_1^T + \underline{N}_{22} \underline{D}_2^T + \underline{D}_1 \underline{N}_{21}^T + \underline{D}_2 \underline{N}_{22}^T \right) \\
 &\quad + \underline{N} \underline{\bar{N}}_2^T - \underline{T}_1 \left(\underline{m}^{11} \underline{\bar{T}}_{12}^T + \underline{m}^{12} \underline{\bar{T}}_{22}^T \right)^T - \underline{T}_2 \left(\underline{m}^{21} \underline{\bar{T}}_{12}^T + \underline{m}^{22} \underline{\bar{T}}_{22}^T \right)^T \\
 &\quad + \underline{\bar{N}}_2 \underline{N}^T - \left(\underline{m}^{11} \underline{\bar{T}}_{12}^T + \underline{m}^{12} \underline{\bar{T}}_{22}^T \right) \underline{T}_1^T - \left(\underline{m}^{21} \underline{\bar{T}}_{12}^T + \underline{m}^{22} \underline{\bar{T}}_{22}^T \right) \underline{T}_2^T,
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

avec

$$\underline{T}_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \hline \vdots \\ -\underline{\tau}_\alpha N_{\Gamma_{e,\beta}^a}(\bar{\xi}) \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \underline{N}_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \hline \vdots \\ -\underline{n} N_{\Gamma_{e,\alpha\beta}^a}(\bar{\xi}) \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad a = 1, n_e^n \tag{4.63}$$

et

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\beta\gamma}^\alpha &= -g(\underline{e}_{\alpha,\beta\gamma} \cdot \underline{n}) - \underline{e}_{\beta,\gamma} \cdot \underline{\tau}_\alpha \\ \underline{\bar{T}}_{\alpha\beta} &= \underline{T}_{\alpha\beta} - (\underline{e}_{\beta,1} \cdot \underline{n}) \underline{D}_1 - (\underline{e}_{\beta,2} \cdot \underline{n}) \underline{D}_2. \end{aligned} \right\} \tag{4.64}$$

Quant à $\mathcal{K}_{\text{CT}_2}^k$, l'expression matricielle associée à la composante linéarisée de la contrainte de frottement (4.24), par l'intermédiaire des définitions:

$$\left. \begin{aligned} \underline{\bar{P}}_1 &= \underline{P}_1 - (\underline{e}_{1,1} \cdot \underline{P}_T) \underline{D}_1 - (\underline{e}_{1,2} \cdot \underline{P}_T) \underline{D}_2 \\ \underline{\bar{P}}_2 &= \underline{P}_2 - (\underline{e}_{2,1} \cdot \underline{P}_T) \underline{D}_1 - (\underline{e}_{2,2} \cdot \underline{P}_T) \underline{D}_2 \end{aligned} \right\} \tag{4.65}$$

avec \underline{P}_T donné par (B.85a) et

$$\underline{P}_\alpha = \begin{Bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ \hline \vdots \\ -\underline{P}_T N_{\Gamma_{e,\alpha}^a}(\bar{\xi}) \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad a = 1, n_e^n, \tag{4.66}$$

ainsi que:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{h}_{11} &= \mathbf{M}_{11} + 2\tilde{E}_{1,1} \cdot \tilde{T}_1 h^1 + (\tilde{E}_{1,1} \cdot \tilde{T}_2 + \tilde{E}_{2,1} \cdot \tilde{T}_1) h^2 \\ \tilde{h}_{22} &= \mathbf{M}_{22} + (\tilde{E}_{2,2} \cdot \tilde{T}_1 + \tilde{E}_{1,2} \cdot \tilde{T}_2) h^1 + 2\tilde{E}_{2,2} \cdot \tilde{T}_2 h^2 \\ \tilde{h}_{12} &= \mathbf{M}_{12} + 2\tilde{E}_{1,2} \cdot \tilde{T}_1 h^1 + (\tilde{E}_{1,2} \cdot \tilde{T}_2 + \tilde{E}_{2,2} \cdot \tilde{T}_1) h^2 \\ \tilde{h}_{21} &= \mathbf{M}_{21} + (\tilde{E}_{2,1} \cdot \tilde{T}_1 + \tilde{E}_{1,1} \cdot \tilde{T}_2) h^1 + 2\tilde{E}_{1,2} \cdot \tilde{T}_2 h^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.67)$$

avec $\tilde{E}_{\alpha,\gamma}$, évalué de façon similaire à $e_{\alpha,\gamma}$, \tilde{T}_β , défini par (3.10a) et $h^\alpha = (\bar{\xi}_{t+\Delta t}^\alpha - \bar{\xi}_t^\alpha)$ permet d'exprimer $\mathcal{K}_{c_T}^k$ selon la nature même des conditions de frottement à l'interface telles que:

Sans glissement:

$$\mathcal{K}_{c_T}^k = \epsilon_T \left\{ \tilde{h}_{11} \underline{D}_1 \underline{D}_1^T + \tilde{h}_{22} \underline{D}_2 \underline{D}_2^T + \tilde{h}_{12} \underline{D}_1 \underline{D}_2^T + \tilde{h}_{21} \underline{D}_2 \underline{D}_1^T \right\} \quad (4.68)$$

Avec glissement:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{c_T}^k &= H(g) \mu \epsilon_N \left(P_{T_1} \underline{D}_1 + P_{T_2} \underline{D}_2 \right) N^T \\ &\quad - \mu t_N \left(P_{T_1} P_T^1 \underline{D}_1 \bar{P}_1^T + P_{T_2} P_T^2 \underline{D}_2 \bar{P}_2^T + P_{T_1} P_T^2 \underline{D}_1 \bar{P}_2^T + P_{T_2} P_T^1 \underline{D}_2 \bar{P}_1^T \right) \\ &\quad + \frac{\epsilon_T \mu t_N}{\|\underline{\hat{p}}_T\|} \left\{ [(1 - P_{T_1} P_T^1) \tilde{h}_{11} - P_{T_1} P_T^2 \tilde{h}_{21}] \underline{D}_1 \underline{D}_1^T \right. \\ &\quad + [(1 - P_{T_2} P_T^2) \tilde{h}_{22} - P_{T_2} P_T^1 \tilde{h}_{12}] \underline{D}_2 \underline{D}_2^T \\ &\quad + [(1 - P_{T_1} P_T^1) \tilde{h}_{12} - P_{T_1} P_T^2 \tilde{h}_{22}] \underline{D}_1 \underline{D}_2^T \\ &\quad \left. + [(1 - P_{T_2} P_T^2) \tilde{h}_{21} - P_{T_2} P_T^1 \tilde{h}_{11}] \underline{D}_2 \underline{D}_1^T \right\}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

4.3.3 Spécialisation à l'interface toron-mors d'ancrage

La discrétisation spatiale associée à la spécialisation du problème de contact avec frottement à l'interface toron-mors d'ancrage s'obtient de façon beaucoup plus aisée et ce, en raison de l'invariance de la projection du point de contact en cours de résolution. Dans ces circonstances, l'expression du résidu (3.57) peut être exprimée sous la même forme que (4.53) telle que:

$$\begin{aligned} W_c^e &\approx \bigcup_{k=1}^{n_c^{\text{pi}}} \left\{ \left[-t_N^h(\eta_c^k) \delta g^h(\eta_c^k) + t_{T_\alpha}^h(\eta_c^k) \delta \bar{\xi}^{\alpha^h}(\eta_c^k) \right] j_{\Gamma_c^k}(\eta_c^k) W_{\Gamma_c^k}^k \right\} \\ &\approx \bigcup_{k=1}^{n_c^{\text{pi}}} \left\{ \left[\delta \varphi_c^k \cdot \underline{R}_c^k \right] j_{\Gamma_c^k}^k W_{\Gamma_c^k}^k \right\} = \delta \varphi^e \cdot \underline{R}_c^e \end{aligned} \quad (4.70)$$

où cette fois-ci, le vecteur \underline{R}_c^k s'exprime selon les nouvelles définitions des termes $\delta g^h(\eta_c^k)$ et $\delta \bar{\xi}^{\alpha^h}(\eta_c^k)$ données respectivement par (3.56) et (B.42):

$$\underline{R}_c^k = t_N^k \underline{N} + t_{T_1}^k \underline{T}_1 + t_{T_2}^k \underline{T}_2 \quad (4.71)$$

avec \underline{N} et \underline{T}_α définis par (4.55).

Pour ce qui est de la matrice tangente, celle-ci s'exprime, à partir de (3.59):

$$\begin{aligned} \Delta W_c^e &\approx \bigcup_{k=1}^{n_e^i} \left\{ \left[-\Delta t_N^h(\eta_c^k) \delta g^h(\eta_c^k) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta t_{T_1}^h(\eta_c^k) \delta \bar{\xi}^{1h}(\eta_c^k) + \Delta t_{T_2}^h(\eta_c^k) \delta \bar{\xi}^{2h}(\eta_c^k) \right] j_{\Gamma_c^i}(\eta_c^k) W_{\Gamma_c^i}^k \right\} \\ &\approx \bigcup_{k=1}^{n_e^i} \left\{ \delta \varphi_c^k \cdot \left[(\mathbf{K}_{c_N}^k + \mathbf{K}_{c_{T_1}}^k + \mathbf{K}_{c_{T_2}}^k) j_{\Gamma_c^i}^k W_{\Gamma_c^i}^k \right] \Delta \varphi_c^k \right\} = \delta \varphi^e \cdot \mathbf{K}_c^e \Delta \varphi^e \end{aligned} \quad (4.72)$$

où $\mathbf{K}_{c_N}^k$ et $\mathbf{K}_{c_{T_1}}^k$, respectivement obtenues à l'aide des définitions (3.60) et (4.30) selon lesquelles:

$$\mathbf{K}_{c_N}^k = \frac{\eta g_0}{g^2} \underline{N} \underline{N}^T \quad (4.73)$$

et

$$\mathbf{K}_{c_{T_1}}^k = \epsilon_{T_1} \underline{T}_1 \underline{T}_1^T. \quad (4.74)$$

Finalement, le terme $\mathbf{K}_{c_{T_2}}^k$ est obtenu en considérant les conditions de frottement (4.31):

$$\mathbf{K}_{c_{T_2}}^k = \begin{cases} \epsilon_{T_2} \underline{T}_2 \underline{T}_2^T & \text{(sans glissement)} \\ \mu P_{T_2} \frac{\eta g_0}{g^2} \underline{T}_2 \underline{N}^T & \text{(avec glissement)} \end{cases} \quad (4.75)$$

avec $P_{T_2} = \hat{t}_{T_2} / |\hat{t}_{T_2}|$, représentant le signe de la contrainte de frottement selon la direction $\underline{\tau}^2$, telle que montrée à la Figure 3.11.

4.4 Expression de la forme globale discrétisée

À la suite des opérations de discrétisation présentées dans ce chapitre, il est maintenant possible d'établir l'expression globale de la forme discrétisée nécessaire à la résolution du problème de mécanique en grandes transformations incluant les effets du contact avec frottement en grands déplacements relatifs. Pour ce faire, considérons, en tout premier lieu, l'opérateur d'assemblage déjà introduit, et permettant le passage du niveau élémentaire au niveau global tel que:

$$\delta \varphi = \bigcup_e \delta \varphi^e. \quad (4.76)$$

Dans cette optique, la prise en compte des expressions (4.41), (4.45), (4.53) et (4.54) dans (4.38), permet de réécrire cette dernière sous la forme:

$$\begin{aligned}
 W \approx & \sum_{e=1}^{n_{\Omega}^e} \delta \varphi^e \cdot \left\{ \underline{R}_{int}^e + \underline{R}_v^e + \underline{K}_{int}^e \Delta \varphi^e \right\} + \sum_{e=1}^{n_{\Gamma_s}^e} \delta \varphi^e \cdot \underline{R}_s^e \\
 & + \sum_{e=1}^{n_{\Gamma_c}^e} \delta \varphi^e \cdot \left\{ \underline{R}_c^e + \underline{K}_c^e \Delta \varphi^e \right\} \approx 0.
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

Après assemblage de chacune des contributions et regroupement des termes, l'expression (4.77) devient:

$$\begin{aligned}
 W \approx & \delta \varphi \cdot \left[\underline{R}_{int} + \underline{R}_v + \underline{R}_s + \underline{R}_c + (\underline{K}_{int} + \underline{K}_c) \Delta \varphi \right] \\
 \approx & \delta \varphi \cdot \left\{ \underline{K} \Delta \varphi + \underline{R} \right\} \approx 0 \quad \forall \delta \varphi,
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

menant ainsi à la détermination du champ de déplacement incrémental selon l'expression classique:

$$\underline{K} \Delta \varphi + \underline{R} \approx 0. \tag{4.79}$$

Comme on peut le constater, l'assemblage des diverses contributions au travail virtuel, tel que présenté dans (4.78) permet de démontrer la nature fortement couplée, associée à la discrétisation par éléments finis. Ce couplage permet, entre autres, de déterminer lors d'une simple évaluation de (4.79), l'interaction entre les phénomènes associés au problème de contact avec frottement et l'évolution des conditions mécaniques à l'intérieur des solides en cause.

Chapitre 5

Résolution numérique du système discrétisé

5.1 Généralités

L'ensemble des développements présentés jusqu'à maintenant ont permis d'établir les expressions discrètes, nécessaires à la résolution du problème de mécanique des solides tridimensionnels en grandes transformations, incluant des zones candidates au contact. Ces expressions, regroupées dans (4.78), incluent à la fois des phénomènes dissipatifs et non différentiables, menant ainsi à la résolution d'un système d'équations non symétrique (voir (4.79)), très fortement non linéaire, et dont le conditionnement est principalement influencé par l'évolution des conditions de contact et de frottement aux diverses interfaces. Dès lors, il devient impératif de bien saisir l'ampleur ainsi que l'influence de ces dernières particularités, afin de permettre l'élaboration d'une stratégie de résolution adaptée au type de problème en question.

Dans ce contexte, ce chapitre présente les diverses difficultés inhérentes à la résolution numérique des expressions discrètes développées au Chapitre 4. Entre autres, on montre que l'obtention d'une solution à ce type de problème implique non seulement des difficultés associées à la convergence des schémas de résolution, mais aussi en ce qui a trait à la quantité de mémoire ainsi qu'au temps de calcul requis. De ces faits, on en vient à proposer divers outils permettant de réduire ou encore mieux d'éliminer ces dernières difficultés et ainsi, d'en arriver à la mise sur pied d'un environnement de résolution à la fois flexible et robuste, permettant l'obtention, d'une solution cinématiquement et cinétiquement admissible (au sens des équations d'équilibre) à un coût informatique (temps et mémoire) raisonnable. En particulier, on y présente l'algorithme permettant l'évaluation des contributions élémentaires ainsi que la détermination du point de projection orthogonale d'une particule esclave sur la ou les frontière maîtres candidates au contact. En conclusion à ce chapitre, on présente une brève description de la mise en œuvre informatique en introduisant, dans un premier temps, l'ensemble des diagrammes de classes nécessaires à une définition orientée objet du problème de contact avec

frottement en grandes transformations, compte tenu des spécifications introduites précédemment. Finalement, on introduit le logiciel support ainsi que les divers programmes utilisés dans les phases d'implémentation et d'utilisation du modèle numérique.

5.2 Présentation du contexte de résolution

L'objectif premier de la résolution de (4.78), par l'entremise de (4.79) est, bien évidemment, l'obtention successive des états d'équilibre correspondant à divers niveaux et conditions de sollicitation¹ permettant ainsi d'observer la réponse du système physique. À partir d'une estimation de la solution, on évalue une correction, ou encore, une direction, qui, ajoutée à l'estimé, améliorera la solution recherchée. Naturellement, les techniques itératives utilisées pour la détermination de cette direction doivent être suffisamment robuste pour permettre la convergence en un minimum d'itérations et ce, à un coût informatique raisonnable.

Pour ce faire, on utilise généralement des méthodes de type Newton-Raphson, quasi-Newton (BFGS), gradient conjugué, etc. Ces méthodes, généralement utilisées pour la détermination d'une solution correspondant à un niveau de sollicitation donné, peuvent, à l'occasion diverger, si la solution recherchée correspond à un niveau trop éloigné des conditions initiales. Il importe donc de résoudre le problème non linéaire de façon incrémentale selon laquelle la sollicitation sera appliquée par paliers ou encore, par pas. Dans ce contexte, l'évaluation du vecteur résidu \underline{R} dans (4.79), sur la base d'un pas, s'écrit:

$$\underline{R}(\underline{\Phi}_{t+\Delta t}, \lambda_{t+\Delta t}) = \underline{R}_{int}(\underline{\Phi}_{t+\Delta t}) + \lambda_{t+\Delta t}(\underline{R}_v + \underline{R}_s) + \underline{R}_c(\underline{\Phi}_{t+\Delta t}) = 0 \quad (5.1)$$

où $\lambda_{t+\Delta t}$ est un paramètre représentant le niveau de sollicitation appliqué. Constituant une inconnue supplémentaire à la résolution du problème, celui-ci est généralement déterminé à l'aide d'une équation supplémentaire du type:

$$\mathcal{S}(\underline{\Phi}_{t+\Delta t}, \lambda_{t+\Delta t}) = 0, \quad (5.2)$$

obtenue par paramétrisation de la courbe $\underline{\Phi} - \lambda$ à l'aide d'une technique de pilotage adaptée au type de non-linéarités telle que les techniques de niveau de sollicitation imposé, déplacement imposé et longueur d'arc imposée, ou encore, à partir d'une table d'évolution pré-définie. Dans un tel contexte, l'Algorithme 5.1 présente la stratégie de résolution classique des équations d'équilibre non linéaires utilisant la méthode de Newton-Raphson avec prise en compte des zones candidates au contact.

Dans le cadre de cette thèse, la nature fortement non linéaire ainsi que la non-symétrie du système d'équations à résoudre justifie largement l'utilisation de la méthode de Newton-Raphson. Sa grande robustesse ainsi que son taux de convergence quadratique font de cette méthode implicite, un choix tout à fait justifié en ce qui a trait à la résolution du problème de contact avec frottement dans un contexte de grandes transformations. Cette méthode, ainsi

1. Ici, le terme sollicitation inclut à la fois les charges volumiques et surfaciques de même que les effets occasionnés par les conditions aux limites non nulles.

Algorithme 5.1 – Contexte général de résolution par la méthode de Newton-Raphson

-
- 1: Initialisation des paramètres globaux
 $\lambda_0 = 0, \quad \tilde{F} = \tilde{R}_v + \tilde{R}_s$
 - 2: **Pour** ($t = 0; t < t_{max}; t = t + \Delta t$) (t_{max} : Temps maximal)
 - 3: Initialisation du paramètre de charge et du champ de déplacement
 $\lambda_{t+\Delta t}^0 = \lambda_t, \quad \tilde{\Phi}_{t+\Delta t}^0 = \tilde{\Phi}_t$
 - 4: **Pour** ($i = 0; i < i_{max}; i = i + 1$) (i_{max} : Nombre maximal d'itérations)
 - 5: Initialisation de la matrice tangente et du résidu d'équilibre global
 $\tilde{K}^i = 0, \quad \tilde{R}^i = \lambda_{t+\Delta t}^i \tilde{F}$
 - 6: **Pour chaque** Élément ($e \in \Omega^1 \cup \Omega^2$)
 - 7: Évaluation des contributions élémentaires
 $\tilde{R}_{int}^e(\tilde{\Phi}_{t+\Delta t}^i)$ (Eqn (4.39a))
 $\tilde{K}_{int}^e(\tilde{\Phi}_{t+\Delta t}^i)$ (Eqn (4.45))
 - 8: Assemblage
 $\tilde{R}^i \leftarrow \tilde{R}_{int}^e$
 $\tilde{K}^i \leftarrow \tilde{K}_{int}^e$
 - 9: **Fin Pour**
 - 10: **Pour chaque** Élément ($e \in \Gamma_c^1$)
 - 11: Évaluation des contributions élémentaires
 $\tilde{R}_c^e(\tilde{\Phi}_{t+\Delta t}^i)$ (Eqn (4.53))
 $\tilde{K}_c^e(\tilde{\Phi}_{t+\Delta t}^i)$ (Eqn (4.54))
 - 12: Assemblage
 $\tilde{R}^i \leftarrow \tilde{R}_c^e$
 $\tilde{K}^i \leftarrow \tilde{K}_c^e$
 - 13: **Fin Pour**
 - 14: Résolution des systèmes linéarisés
 $\tilde{K}^i \Delta \tilde{\Phi}_R + \tilde{R}^i = 0$
 $\tilde{K}^i \Delta \tilde{\Phi}_F + \tilde{F} = 0$
 - 15: Correction du paramètre de charge $\Delta \lambda$ (Eqn (5.2))
 - 16: Mise à jour de la solution
 $\Delta \tilde{\Phi} = \Delta \tilde{\Phi}_R + \Delta \lambda \Delta \tilde{\Phi}_F$
 $\tilde{\Phi}_{t+\Delta t}^{i+1} = \tilde{\Phi}_{t+\Delta t}^i + \Delta \tilde{\Phi}$
 $\lambda_{t+\Delta t}^{i+1} = \lambda_{t+\Delta t}^i + \Delta \lambda$
 - 17: Test de convergence
 - 18: **Fin Pour**
 - 19: **Fin Pour**
-

que les techniques de pilotage déjà mentionnées, ont déjà fait l'objet de nombreuses recherches et publications (Bathe et Wilson, 1976; Batoz et Dhatt, 1979; Ramm, 1980; Crisfield, 1981; Batoz et Dhatt, 1978). De plus, une revue exhaustive sur les algorithmes de résolution des équations non linéaires est présentée par Dhatt et Fafard (1995).

Cependant, malgré les avantages incontestables de la méthode de Newton-Raphson, il n'en demeure pas moins que celle-ci possède certains inconvénients lorsqu' utilisée dans le contexte actuel. La suite de cette section présente les détails relatifs aux inconvénients jugés, selon nous, les plus critiques.

5.2.1 Difficultés de convergence

Tel que mentionné précédemment, la résolution d'un problème non linéaire par la méthode classique de Newton-Raphson, offre, en théorie, un taux de convergence quadratique. Les conditions favorables au maintien de cette caractéristique sont essentiellement associées au type de formulation et de lois de comportement utilisées ainsi qu'aux notions d'existence et d'unicité de la solution recherchée. Dans le contexte actuel, la nature discontinue des lois de contact et de frottement (voir Figure 3.8) affecte de façon significative, ce taux de convergence. Considérant qu'une simple perturbation des champs de déplacement mène à un réajustement des conditions de contact et de frottement aux interfaces, tout changement de statut tel que mise en contact, décollement, initiation et arrêt de glissement, implique une variation drastique du champ de contrainte à l'interface et par le fait même, de l'intensité des composantes contenues dans le résidu d'équilibre R et la matrice tangente K . Dans le pire des cas, cette situation aura pour effet d'amorcer localement la plastification ou encore de provoquer une décharge élastique au voisinage d'un point de contact, menant ainsi à une modification importante de la rigidité à l'interface. Cette situation provoquera bien évidemment, un réajustement des champs de déplacement résultant de la dernière correction de Newton-Raphson qui on l'espère, n'engendrera pas une nouvelle modification des statuts de contact au cours de la prochaine itération.

Par exemple, considérons le problème de glissement d'un bloc déformable sur une surface rigide, tel que montré à la Figure 5.1. Utilisant une loi de frottement de Coulomb, on anticipe aisément que le bloc amorcera son glissement lorsque la charge horizontale F_h aura atteint le niveau critique μF_v , où μ et F_v représentent respectivement le coefficient de frottement agissant à l'interface et la charge verticale. Avant d'atteindre le seuil critique de glissement, il demeure toujours possible de résoudre le problème à l'aide des méthodes de pilotage usuelles déjà mentionnées. Cependant, au passage du seuil de glissement, le problème devient théoriquement instable faisant ainsi apparaître une singularité au niveau de la matrice tangente. Physiquement, cette indétermination de la solution s'explique par la disparition momentanée des conditions de retenue horizontale à l'interface. Dès lors, il devient «théoriquement» impossible de poursuivre la résolution au-delà de ce seuil à l'aide des méthodes de pilotage usuelles. En particulier, on peut voir sur la Figure 5.1 que la méthode de chargement imposé devient totalement inapte à fournir une solution à $\lambda = \mu F_v$ affichant ainsi une infinité de solutions. En contrepartie, la nature numérique de la résolution permet, en raison de la précision

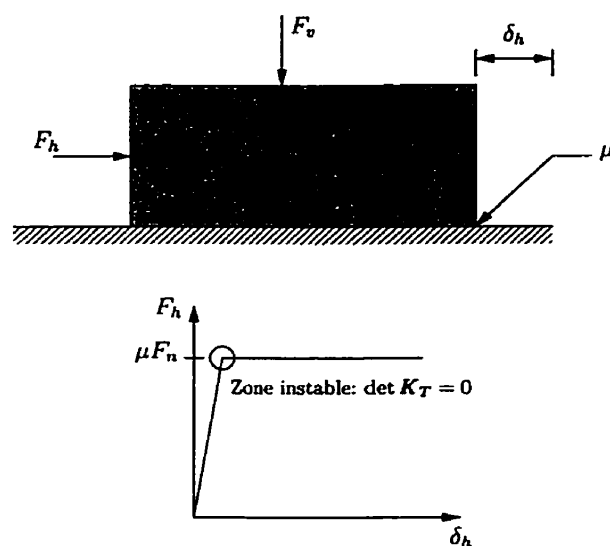


Figure 5.1 – Exemple de glissement d'un bloc sur une surface rigide

limitée de l'ordinateur, de conserver un système matriciel non singulier et ainsi, de poursuivre au-delà du seuil de glissement à l'aide des méthodes de déplacement imposé ou encore de longueur d'arc imposée. La matrice tangente correspondante, quoiqu'inversible demeure très mal conditionnée en raison de sa singularité imminente. Malgré ce «surcis numérique», il n'en demeure pas moins préférable de résoudre ce type de problème en pilotant le déplacement horizontal du bloc par l'entremise d'une table d'évolution ou encore, en admettant un léger écrouissage dans la régularisation de la loi de Coulomb².

Ce dernier exemple, quoique très simpliste, montre l'influence marquée du type de problème sur le conditionnement du système à résoudre qui, dans ce contexte, est exclusivement perturbé par la physique (initiation du glissement). Dans cette optique, il devient extrêmement difficile de porter un jugement fondé sur le conditionnement potentiel du système matriciel associé à un problème de grande taille, incluant diverses zones de contact et ce, dans un contexte de grandes transformations. Le conditionnement devient alors grandement influencé par la nature intrinsèque des lois de comportement des matériaux, des lois de contact et de frottement, ainsi que par le couplage entre ces mêmes lois dans le temps.

Dans le même ordre d'idées, et telle que montrée à la Figure 5.2(a), l'utilisation d'une paramétrisation géométrique de continuité C^0 , ne permet pas une représentation continue des vecteurs de base à la frontière commune de deux éléments voisins. Cette situation³ a donc pour effet d'induire une discontinuité du premier ordre dans le système à résoudre, et par le fait même, une perturbation du taux de convergence quadratique (Rachik, 1993). D'un

2. Ce phénomène est similaire à l'apparition d'une rotule plastique dans une barre composée d'un matériau élastoplastique parfait.

3. Dans un contexte de résolution dynamique explicite, une telle paramétrisation suffit au maintien du taux de convergence quadratique.

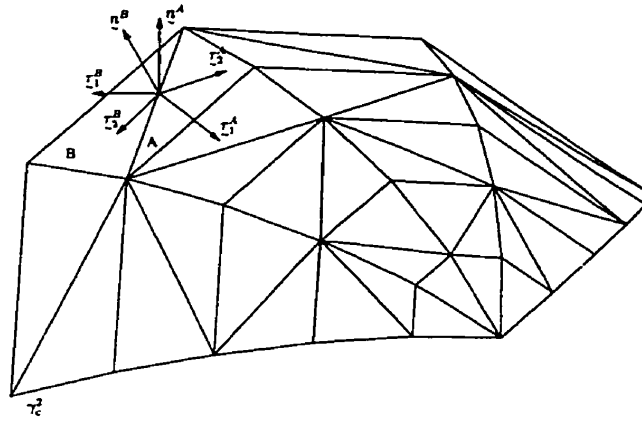
point de vue tout à fait similaire, et tel que montré à la Figure 5.2(b), le passage d'une particule candidate au contact le long d'un angle fermant de la géométrie, aura pour effet de provoquer une augmentation subite de l'état de contrainte au point de contact en raison de la pénétration excessive de la particule en question dans la frontière inclinée. Cette situation, rencontrée fréquemment dans la simulation numérique des procédés de filage, d'emboutissage et d'extrusion, aura un effet déstabilisant sur le résidu d'équilibre, menant systématiquement à la divergence du schéma de Newton-Raphson.

Compte-tenu des difficultés présentés, il semble tout à fait justifié d'effectuer une mise en garde quant à la résolution de ce type de problème. En effet, bon nombre de codes commerciaux offrent, depuis quelques années, et ce, à gros prix, la possibilité de résoudre le problème de contact avec frottement par des techniques supposées robustes et infaillibles tout en permettant l'entrée de ses propres lois de contact et de frottement. Cependant, il n'en demeure pas moins que l'utilisateur attiré à un tel logiciel se doit de posséder les connaissances nécessaires à la résolution des problèmes très fortement non linéaires et en particulier, au niveau du comportement des méthodes de résolution utilisées en présence de phénomènes non différentiables. L'ensemble de ces connaissances sont d'ailleurs indispensables à une prise de position critique face aux résultats obtenus.

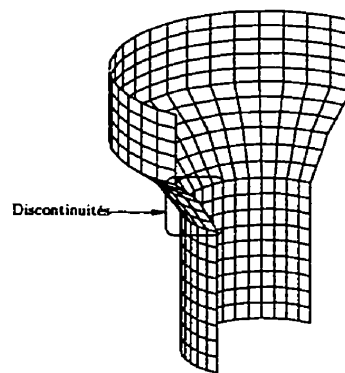
5.2.2 Mémoire requise et temps de calcul

La quantité de mémoire nécessaire à la création du système matriciel et en particulier de la matrice tangente, constitue, encore aujourd'hui, un obstacle de taille en résolution numérique des problèmes tridimensionnels par la méthode de Newton-Raphson. Si, de surcroît, le problème en question fait intervenir des frontières candidates au contact, la prise en compte des couplages potentiels entre ces frontières fait augmenter de façon significative le nombre de termes associés à chaque équation. Jumelé à la non-symétrie due au frottement ainsi qu'aux non-linéarités géométriques du modèle mécanique, le système à résoudre peut atteindre rapidement des dimensions imposantes.

La croissance démesurée de la dimension du système matriciel s'explique par le nombre élevé de degrés de liberté impliqué dans la définition d'un élément de contact. Afin de permettre la bonne définition des tables de localisation nécessaires à la création de la matrice globale, il importe, avant même de procéder à la résolution, d'anticiper sur l'ensemble des frontières pouvant potentiellement entrer en contact l'une par rapport à l'autre. Dès lors, il est possible de se retrouver avec des éléments de contact pouvant contenir plusieurs centaines de degrés de liberté. Par exemple, considérons le cas de deux frontières candidates au contact et discrétisées à l'aide d'éléments quadrangles à quatre nœuds. Tel que montré à la Figure 5.3, le nombre de nœuds associés à chaque élément de contact doit inclure les quatre nœuds de l'élément esclave ainsi que les $(N + 1)^2$ nœuds associés à la frontière maître. En admettant trois degrés de liberté par nœud, la Figure 5.4 montre la quantité de mémoire requise pour la création de la matrice tangente associée à un seul élément de contact en fonction de la densité de maillage de la frontière maître. En particulier, on remarque une augmentation fulgurante de la mémoire requise pour N supérieur à 20. Pour $N = 64$, on obtient une matrice tangente



(a) Discontinuité des vecteurs de base



(b) Changement brusque de la géométrie

Figure 5.2 – Représentation des discontinuités géométriques

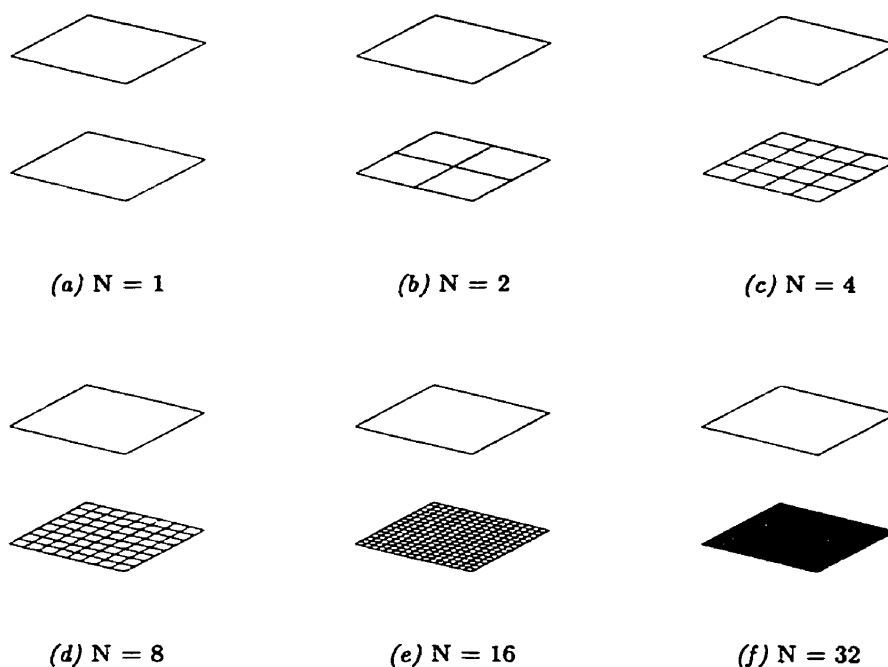


Figure 5.3 – *Élément de contact défini selon différentes densités de maillage de la frontière maître*

nécessitant approximativement 1.2 gigaoctets et ce, pour seulement 12000 degrés de liberté. Dès lors, on imagine aisément l'effet d'une augmentation du nombre d'éléments maîtres ou tout simplement l'utilisation d'un niveau d'interpolation supérieur sur la dimension de la matrice tangente associée à ce seul élément de contact. Dans le pire des cas, la dimension de cette dernière peut atteindre rapidement les limites en mémoire d'un ordinateur possédant une architecture 32 octets⁴.

Malgré la relation étroite entre la quantité de mémoire requise et les temps de calcul, il n'en demeure pas moins que ces derniers sont grandement influencés par le type de stockage utilisé ainsi que par la nature du solveur utilisé pour la résolution du système linéarisé (4.79). Dans un contexte usuel, où les frontières candidates au contact font parties intégrantes de solides tridimensionnels, la création de la matrice tangente globale associée à une méthode de stockage classique par ligne de ciel, peut conduire à une topologie possédant une largeur de bande totalement démesurée et rendre inefficace, par le fait même, toute résolution à l'aide d'une méthode directe (factorisation LU). Par exemple, considérons le cas simple de deux blocs superposés, dont les maillages, présentés à la Figure 5.5 sont exclusivement construits

4. La nécessité, par l'allocateur dynamique, d'effectuer des opérations en entier signé, ne permet pas l'allocation d'un bloc mémoire supérieur à $2^{32}/2 \approx 2.1$ gigaoctets

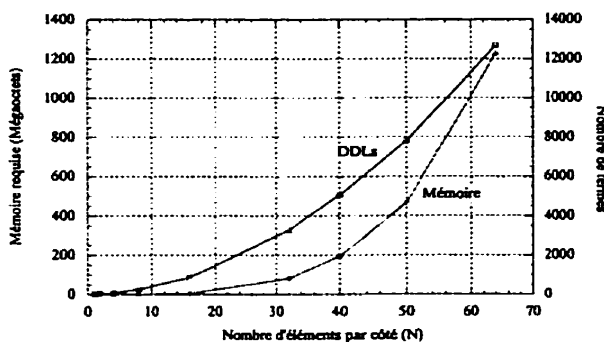


Figure 5.4 – Mémoire requise selon la densité de maillage de la surface maître

à l'aide d'éléments hexaédriques à huit nœuds. La densité de maillage utilisée correspond à l'utilisation de l'élément de contact présenté à la Figure 5.3(d) et contient 2430 degrés de liberté. Règle générale, la factorisation de la matrice associée à ce maillage, sans la prise en compte des zones de contact, peut être obtenue à l'aide d'un solveur direct par lignes de ciel, et ce, dans des temps raisonnables. Cependant, la prise en compte de la zone de contact entre les deux blocs, provoque une augmentation importante de la largeur de bande et nécessite, par le fait même, un effort supplémentaire de la part du solveur lors de la résolution du système. La Figure 5.6 présente l'influence directe de la prise en compte du couplage entre les deux blocs sur la topologie de la matrice globale où l'on remarque, entre autres, une augmentation d'environ 76% de la largeur de bande. Ce constat montre donc l'inefficacité des solveurs directs avec stockage par lignes de ciel à résoudre les problèmes de mécanique tridimensionnels incluant des frontières candidates au contact dans un contexte de grandes transformations.

Fait intéressant, on remarque que la topologie matricielle présentée à la Figure 5.6(b) indique un trou dans la région inférieure droite du couplage au centre de la matrice. Ce dernier s'interprète directement par l'absence du couplage entre chaque frontière esclave et elle-même. Dans un contexte d'auto-contact, le bloc central aurait été complet. De plus, on remarque également que la prise en compte d'un couplage bidirectionnel à l'interface n'aurait eu aucun influence sur la largeur de bande et donc, sur les temps de factorisation d'une matrice stockée par lignes de ciel.

Finalement, il importe de noter que malgré la forte proportion des temps de calculs liés à la résolution du système linéarisé, il n'en demeure pas moins que la surcharge d'opérations associées à la présence de zones candidates au contact constitue un facteur non négligeable. En effet, l'évaluation des points de contact déterminés par la projection de chaque point d'intégration de l'élément esclave sur les surfaces maîtres, et ce, à chaque itération d'équilibre, ainsi que les diverses opérations associées à l'évaluation ainsi qu'au pré-assemblage des résidus et matrices tangentes en chaque point d'intégration constituent, à elles seules, des opérations extrêmement intenses et répétitives. Dans ce contexte, on se rend rapidement à la conclusion que l'évaluation de la contribution d'un seul élément de contact peut impliquer un effort de calcul passablement important et nécessite, par le fait même, une attention toute particulière

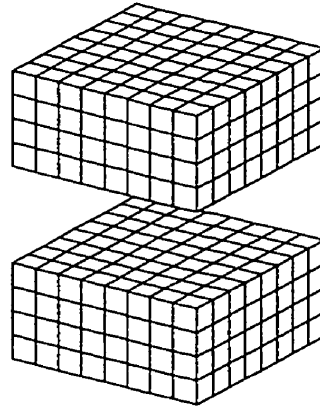
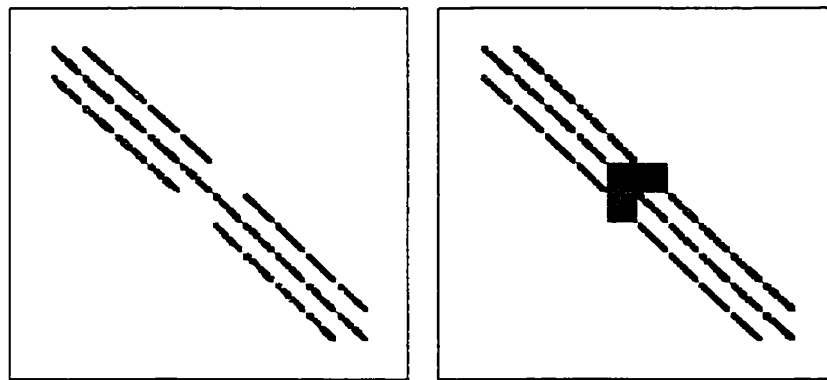


Figure 5.5 – Deux blocs candidats au contact: géométrie et maillage utilisé



(a) Sans couplage (Largeur de bande: 91)

(b) Avec couplage (Largeur de bande: 161)

Figure 5.6 – Deux blocs candidats au contact: influence du couplage sur la topologie de la matrice

quant à l'élaboration de l'algorithmique qui y est associée.

5.3 Description de la stratégie proposée

À la lumière des diverses difficultés inhérentes à la résolution, par la méthode de Newton-Raphson du problème de mécanique des solides en grandes transformations incluant des zones candidates au contact, on constate aisément que l'élaboration d'une stratégie de résolution adéquate repose essentiellement sur les trois aspects suivant:

1. Efficacité des mécanismes entourant le processus itératif du schéma de Newton-Raphson sur la base d'un pas de temps;
2. Performance de la méthode utilisée pour la résolution du système linéarisé (4.79);
3. Performance des opérations associées à la gestion ainsi qu'au suivi des conditions de contact et de frottement en cours de résolution.

Dans le but de mettre sur pied une telle stratégie, cette section présente, dans un premier temps, un certain nombre de suggestions susceptibles d'améliorer de façon significative le contexte de résolution préalablement établi par l'Algorithme 5.1. Par la suite, on présente les détails associés aux opérations de détermination du point de contact ainsi qu'à l'évaluation des contributions élémentaires à l'interface de contact. Ces deux dernières opérations, largement utilisées en cours de résolution, nécessitent donc une attention toute particulière quant à l'élaboration de l'aspect algorithmique.

5.3.1 Modification du contexte de résolution

Considérant les trois points mentionnés ci-haut, on se propose donc de modifier le contexte de résolution par l'entremise des quelques suggestions suivantes afin d'en améliorer la robustesse ainsi que l'efficacité de la résolution des problèmes de contact avec frottement.

Normes de convergence

Considérant que la solution est grandement influencée par la précision des efforts de contact et de frottement développées aux interfaces, il importe donc de s'assurer de la bonne convergence, en tout temps, des champs de déplacement et de contrainte aux interfaces de contact. Pour ce faire, on propose une utilisation systématique d'une norme de convergence du processus itératif présenté dans l'Algorithme 5.1, basée sur la correction du champ de déplacement

n_Φ ainsi que sur le résidu d'équilibre associé n_R données par les normes:

$$n_\Phi = \sqrt{\frac{\Delta \tilde{\Phi} \cdot \Delta \tilde{\Phi}}{\tilde{\Phi}_{t+\Delta t} \cdot \tilde{\Phi}_{t+\Delta t}}} < \epsilon_\Phi \quad (5.3a)$$

$$n_R = \sqrt{\frac{\tilde{R} \cdot \tilde{R}}{\tilde{F} \cdot \tilde{F}}} < \epsilon_R \quad (5.3b)$$

où ϵ_Φ et ϵ_R représentent les tolérances admises et généralement de l'ordre de 10^{-3} et 10^{-2} respectivement. Quant à \tilde{F} , celui-ci représente le vecteur sollicitation ou encore celui associé aux degrés de liberté imposés (les réactions) et reflétant, par le fait même, l'intensité des sollicitations appliquées sur le ou les solides en cause. On remarque que la norme (5.3a) est relative à celle des déplacements sur le pas et non la somme des déplacements totaux. Dans le contexte actuel, où les solides peuvent subir de grands déplacements, nous jugeons préférable d'utiliser (5.3a) afin d'éviter la perte de précision provoquée par l'augmentation progressive d'un dénominateur associée à la somme des déplacements totaux.

Utilisation d'une méthode de lagrangien augmenté

On tente d'améliorer la précision de la solution ainsi que le conditionnement du système matriciel à résoudre par utilisation d'une méthode de lagrangien augmenté dans l'écriture des lois de contact et de frottement. L'annexe C présente les détails relatifs à la prise en compte de cette technique dans le cadre des expressions développées aux Chapitres 3 et 4. Quant à l'aspect résolution, l'utilisation d'un algorithme dans lequel est imbriqué le processus itératif de Newton-Raphson, permet de préserver le taux de convergence déjà passablement affecté de la méthode. L'Algorithme 5.2 constitue une version modifiée de la stratégie présentée par l'Algorithme 5.1, à laquelle on a couplé l'utilisation d'une méthode de lagrangien augmenté. Comme on peut le constater, cette approche permet de considérer les multiplicateurs fixes durant la phase de résolution itérative. Le transfert de l'information aux multiplicateurs s'effectue durant la phase d'augmentation. L'amélioration de la précision est donc directement obtenue par un contrôle absolu des pénétrations et glissements réversibles associés à la régularisation par pénalisation.

Utilisation d'un facteur de relaxation

On entend permettre le passage aux changements brusques de la géométrie par l'entremise d'un facteur de relaxation noté ρ_{min} appliqué à la dernière correction obtenue du schéma de Newton-Raphson. Cette astuce devra permettre de détecter l'apparition d'un angle fermant de la surface maître au voisinage d'une particule esclave par une évaluation du scénario des conditions de contact sur la dernière configuration $C_{t+\Delta t}$ et ainsi, d'amorcer progressivement le changement de direction dans le système matriciel. Il sera alors possible d'atténuer l'effet du changement brusque de la géométrie et ainsi, de permettre une meilleure convergence

Algorithme 5.2 – Résolution du problème de contact avec frottement par une méthode de lagrangien augmenté

- 1: Initialisation des paramètres globaux
 $\lambda_0 = 0, \quad \tilde{F} = \tilde{R}_v + \tilde{R}_s$
 - 2: **Pour** ($t = 0; t < t_{max}; t = t + \Delta t$) (t_{max} : Temps maximal)
 - 3: Initialisation du paramètre de charge et du champ de déplacement
 $\lambda_{t+\Delta t}^0 = \lambda_t, \quad \Phi_{t+\Delta t}^0 = \Phi_t$
 - 4: Initialisation des multiplicateurs de Lagrange
 $\lambda_N^0 = t_N(\Phi_t^0, \lambda_N)$
 $\Delta \lambda_T^0 = 0$
 - 5: **Pour** ($k = 0; k < k_{max}; k = k + 1$) (k_{max} : Nombre d'augmentation maximal)
 - 6: Effectuer les opérations 4 à 18 dans l'Algorithme 5.1 pour $\lambda_{t+\Delta t}^k$ et $\Phi_{t+\Delta t}^k$
 - 7: **Si** ($g(\Phi_{t+\Delta t}^k) \leq \epsilon_g \forall X \in \Gamma_c^1$ ET
 $\|\tilde{\xi}_{t+\Delta t}^k - \tilde{\xi}_t\| \leq \epsilon_s \quad \forall X \in \Gamma_c^1 \mid \|\tilde{t}_T^k\| - \mu t_N \leq 0$) **Alors**
 - 8: La convergence est atteinte, aller à 14.
 - 9: **Si non** (Augmentation des multiplicateurs $\forall X \in \Gamma_c^1$)
 - 10: $\lambda_N^{k+1} = t_N(\Phi_{t+\Delta t}^k, \lambda_N^k) = \langle \lambda_N^k + \epsilon_N g(\Phi_{t+\Delta t}^k) \rangle$
 - 11: $\Delta \lambda_T^{k+1} = (t_{T_{\alpha_{t+\Delta t}}} - t_{T_{\alpha_t}})_{T_{\alpha_t}}^\alpha$ (Eqn (3.29))
 - 12: **Fin Si**
 - 13: **Fin Pour**
 - 14: **Fin Pour**
-

du schéma de résolution. En fait, cette stratégie permet d'anticiper sur l'effet de la dernière correction du schéma de Newton-Raphson sur les conditions de contact et de frottement.

Pour ce faire, et tel que montré à la Figure 5.7, le facteur de relaxation associé à une telle particule P^1 , de coordonnées initiales \tilde{X}^1 , préalablement en contact dans les configurations précédente C_t et intermédiaire $C_{t+\Delta t, i-1}$, est obtenu en déterminant la position $\varphi^1(\tilde{X}^1, \tau)$, dans C_τ | $\tau \in]t, t + \Delta t]$, que devrait occuper la particule esclave dans le but de respecter les conditions:

$$\left. \begin{array}{l} g(\tilde{X}^1, \tau) \geq 0 \\ g(\tilde{X}^1, \tau) \leq \epsilon_g \\ \theta(\tilde{X}^1, \tau) > \epsilon_\theta \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

où ϵ_g représente la tolérance admise sur la fonction écart et ϵ_θ , la tolérance admise sur l'angle θ entre les vecteurs normaux $\underline{n}(\tilde{\xi}, t)$ et $\underline{n}(\tilde{\xi}, \tau)$ associés respectivement aux projections de la particule esclave P^1 sur la surface maître dans les configurations $C_{t+\Delta t, i-1}$ et C_τ tel que:

$$\theta(\tilde{X}^1, \tau) = \cos^{-1}(\underline{n}(\tilde{\xi}, t + \Delta t) \cdot \underline{n}(\tilde{\xi}, \tau)). \quad (5.5)$$

Dans ce contexte, il importe de noter que la configuration C_τ est directement obtenue en admettant une interpolation linéaire entre les configurations $C_{t+\Delta t, i-1}$ et $C_{t+\Delta t}$. Dès lors, le facteur de relaxation associé à un point d'intégration et noté ρ_{min}^{pi} est donné par:

$$\rho_{min}^{pi} = C_\rho \cdot \begin{cases} 1 & \text{si } \theta(\tilde{X}^1, t + \Delta t) \leq \epsilon_\theta \\ 1 + \frac{v_\Delta \cdot v_n}{\|v_\Delta\|^2} & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.6)$$

où le vecteur v_Δ représente la dernière correction de Newton-Raphson associée au point P^1 et v_n , le vecteur originaire de $\varphi^1(\tilde{X}^1, t + \Delta t)$ et définissant, par sa projection sur v_Δ , la portion de v_Δ permettant le respect de (5.4). Quant au coefficient C_ρ , celui-ci reflète la proportion du facteur ρ_{min}^{pi} attribuable à chacune des deux frontières candidates au contact et défini par:

$$C_\rho = \begin{cases} 1 & \text{si l'une des frontières } \Gamma_c^1 \text{ ou } \Gamma_c^2 \text{ est fixe} \\ \frac{1}{2} & \text{autrement.} \end{cases} \quad (5.7)$$

La démonstration de l'expression (5.6) peut être aisément obtenue après quelques manipulations vectorielles sur les définitions présentées à la Figure 5.7. Comme on peut le constater, l'évaluation explicite de la ρ_{min}^{pi} , borné sur l'intervalle $]0, 1]$, ne doit être effectuée qu'après s'être assuré que l'angle $\theta(\tilde{X}^1, t + \Delta t)$ est bel et bien supérieur à ϵ_θ . Il s'agit là d'un problème de minimisation sous contrainte pouvant être résolu par une simple technique de rabattement ou encore par dichotomie. En raison du coût excessif de cette dernière, on se propose donc d'utiliser une technique de rabattement telle que montrée à la Figure 5.7. Suite à l'évaluation

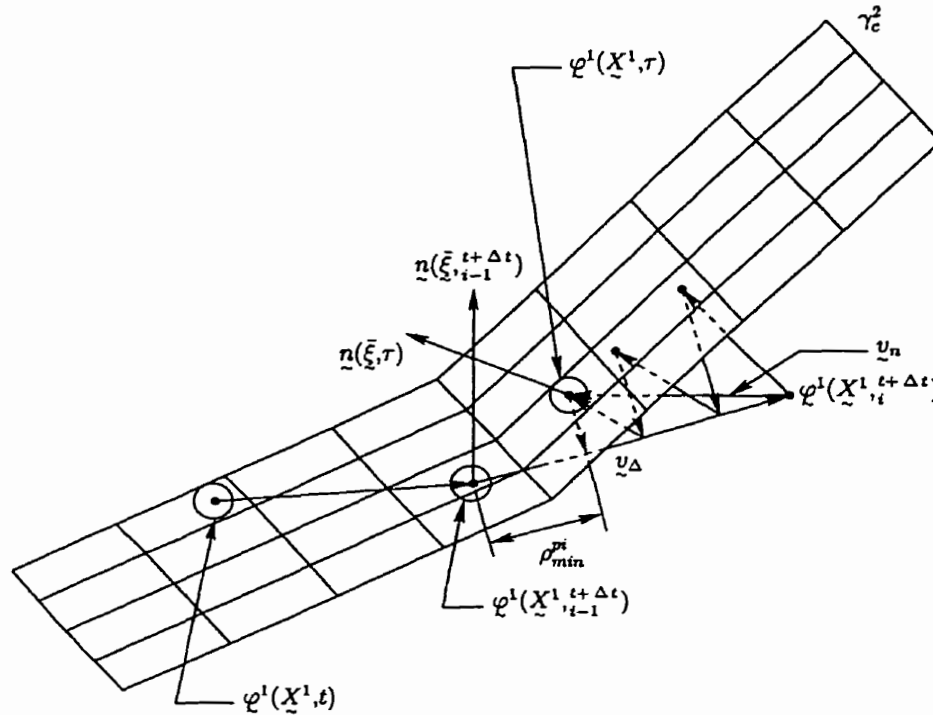


Figure 5.7 – Représentation schématique du facteur de relaxation ρ_{min}^{pi}

de (5.6), le facteur à utiliser pour la pondération de la dernière correction de Newton-Raphson correspond donc au minimum des facteurs obtenus sur chacun des éléments de contact, noté ρ_{min}^e qui à leurs tours, sont obtenus par extraction du facteur minimum agissant sur l'ensemble des points d'intégration. L'Algorithme 5.3 présente la stratégie associée à la détermination de ce facteur qui doit être effectuée juste après l'opération 16 de l'Algorithme 5.1 afin de prendre en compte l'effet de la dernière correction. Finalement, la mise à jour est rétablie à l'aide de l'expression:

$$\underline{\Phi}_{t+\Delta t}^{i+1} = \underline{\Phi}_{t+\Delta t}^i + \rho_{min} \Delta \underline{\Phi} \tag{5.8}$$

Schémas d'intégration avec contribution sur la frontière

Conséquent à l'obtention du facteur de relaxation ρ_{min} , il importe que les schémas d'intégration numérique utilisés par les éléments esclaves susceptibles d'entrer en contact au voisinage d'un changement brusque de la géométrie, puissent prendre en compte un certain

Algorithme 5.3 – Détermination du facteur de relaxation ρ_{min}

-
- 1: Initialisation du facteur de relaxation global
 $\rho_{min} = 1$
 - 2: **Pour** chaque Element $(e) \in \Gamma_c^1$
 - 3: Initialisation du facteur de relaxation élémentaire
 $\rho_{min}^e = 1$
 - 4: **Pour** $(k = 0; k < n_e^{pi}; k = k + 1)$ (n_e^{pi} : Nombre de points d'intégration)
 - 5: Détermination de la position de la particule esclave en $C_{t+\Delta t}$
 $\underline{x}_{t+\Delta t}^1 = \varphi^1(\underline{X}^1, t + \Delta t) = \varphi^1(\underline{\Psi}_0(\eta_c^k), t + \Delta t)$
 - 6: Recherche du point de contact de la particule esclave $\underline{x}_{t+\Delta t}^1$ sur γ_c^2
 $\underline{x}_{t+\Delta t}^2 = \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\xi), t + \Delta t)$
 - 7: Évaluation du vecteur normal $\underline{n}(\xi, t + \Delta t)$ (Eqn (3.11))
 - 8: Évaluation de la fonction écart $g(\underline{X}^1, t + \Delta t)$ (Eqn (3.20))
 - 9: Évaluer le facteur ρ_{min}^{pi} (Algorithme 5.4)
 - 10: Requête du facteur de relaxation élémentaire
 $\rho_{min}^e = \min(\rho_{min}^e, \rho_{min}^{pi})$
 - 11: **Fin Pour**
 - 12: Requête du facteur de relaxation global
 $\rho_{min} = \min(\rho_{min}, \rho_{min}^e)$
 - 13: **Fin Pour**
-

nombre de points sur la frontière de ces mêmes éléments. Pour ce faire, on se propose d'utiliser des distributions de points d'intégration obtenus par superposition des distributions unidimensionnels de Newton-Cotes (Dhatt et Touzot, 1981) pour les quadrilatères et par méthode directe pour ce qui est des triangles. Dans ce dernier cas, les poids d'intégrations $W_{\Gamma_c^1}^k$ sont obtenus par intégration exacte des fonctions d'interpolations N^k correspondant au choix de la base polynomiale ainsi qu'à la position de ces mêmes points tel que:

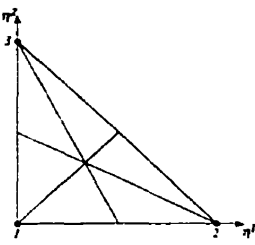
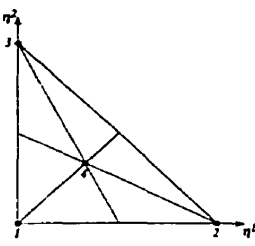
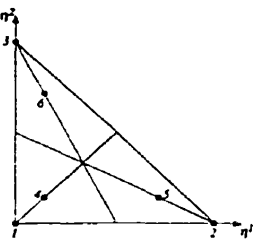
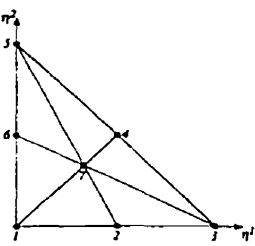
$$W_{\Gamma_c^1}^k = \int_{\mathcal{A}_{\Gamma_c^1}^e} N^k(\eta_c^k) d\mathcal{A}_{\Gamma_c^1}^e. \quad (5.9)$$

Le Tableau 5.1 présente quelques unes des formules d'intégration numérique sur les triangles avec contribution sur la frontière. Entre autres, on remarque que la formule c) constitue un très mauvais choix en raison de la contribution nulle des points au sommet. Malgré le fait que ces derniers permettent de détecter le changement de géométrie, aucune information ne pourra être transmise aux nœuds de calcul. Par contre, la formule d) constitue un excellent choix dû principalement à la possibilité de prendre en compte la forte variation du champ de contrainte au voisinage du changement brusque de la géométrie.

Algorithme 5.4 – Détermination du facteur de relaxation ρ_{min}^{pi}

-
- 1: **Si** $g(\underline{X}^1, t + \Delta t) > 0$ **Alors**
 - 2: Évaluation de l'angle $\theta(\underline{X}^1, t + \Delta t)$ (Eqn (5.5))
 - 3: **Si** $\theta(\underline{X}^1, t + \Delta t) > \epsilon_\theta$ **Alors**
 - 4: Initialisation du facteur de relaxation
 $\rho_{min}^{pi} = 1$
 - 5: Initialisation des coordonnées en C_τ
 $\underline{x}_\tau^1 = \underline{x}_{t+\Delta t}^1, \quad \underline{x}_\tau^2 = \underline{x}_{t+\Delta t}^2$
 - 6: **Répète**
 - 7: Évaluation du vecteur \underline{v}_Δ
 $\underline{v}_\Delta = \underline{x}_\tau^1 - \varphi^1(\underline{X}^1, t+\Delta t)$
 - 8: Évaluation du vecteur \underline{v}_n
 $\underline{v}_n = \underline{x}_\tau^2 - \underline{x}_\tau^1$
 - 9: Évaluation de la portion incrémentale du facteur ρ_{min}^{pi} (Eqn (5.6))
 $\Delta\rho_{min}^{pi} = 1 + \frac{\underline{v}_\Delta \cdot \underline{v}_n}{\|\underline{v}_\Delta\|^2}$
 - 10: Détermination de la nouvelle coordonnée esclave en C_τ
 $\underline{x}_\tau^1 = \varphi^1(\underline{X}^1, t+\Delta t) + \Delta\rho_{min}^{pi} \times \underline{v}_\Delta$
 - 11: Mise à jour du facteur ρ_{min}^{pi}
 $\rho_{min}^{pi} = \rho_{min}^{pi} \times \Delta\rho_{min}^{pi}$
 - 12: Recherche du point de contact de la particule esclave \underline{x}_τ^1 sur γ_c^2
 $\underline{x}_\tau^2 = \varphi^2(\Psi_0(\underline{\xi}), \tau)$
 - 13: Évaluation du vecteur normal $\underline{n}(\underline{\xi}, \tau)$ (Eqn (3.11))
 - 14: Évaluation de la fonction écart $g(\underline{X}^1, \tau)$ (Eqn (3.20))
 - 15: **Tant que** Les conditions (5.4) ne sont pas respectées
 - 16: **Si** Γ_c^1 et Γ_c^2 sont déformables **Alors**
 - 17: Correction du facteur de relaxation
 $\rho_{min}^{pi} = 0.5 \times \rho_{min}^{pi}$
 - 18: **Fin Si**
 - 19: **Sinon** (Aucune relaxation nécessaire)
 - 20: $\rho_{min}^{pi} = 1$
 - 21: **Fin Si**
 - 22: **Sinon** (Aucune relaxation nécessaire)
 - 23: $\rho_{min}^{pi} = 1$
 - 24: **Fin Si**
-

Tableau 5.1 – Formules d'intégration sur les triangles avec contribution sur la frontière

Configuration	Degré m	Coordonnées		Poids W
		η^1	η^2	
a) 	1	0	0	1/6
		1	0	1/6
		0	1	1/6
b) 	2	0	0	1/24
		1	0	1/24
		0	1	1/24
		1/3	1/3	3/8
c) 	2	0	0	0
		1	0	0
		0	1	0
		1/6	1/6	1/6
		2/3	1/6	1/6
		1/6	2/3	1/6
d) 	3	0	0	1/40
		1/2	0	1/15
		1	0	1/40
		1/2	1/2	1/15
		0	1	1/40
		0	1/2	1/15
		1/3	1/3	9/40

Intégration exacte des polynômes de degré m ($\eta^i \eta^j$ avec $i + j \leq m$).

Reconstruction du système matriciel

On entend réduire la quantité de mémoire requise due à la prise en compte des couplages entre les frontières candidates au contact par reconstruction de la matrice tangente globale. En raison du nombre élevé d'opérations nécessaires à cette reconstruction, il importe de rendre cette dernière optionnelle à la résolution des problèmes de grandes tailles. Il s'agit là d'une

simple restructuration et non d'une modification du nombre de degrés de liberté. Selon la définition d'un élément de contact telle qu'établie au Chapitre 4, cette opération implique, dans un premier temps, une recherche des nouveaux points de contact sur la configuration actuelle $C_{t+\Delta t}$. Par la suite, on procède à une réévaluation des dépendances associées à chaque élément de frontière esclave. Cette dernière opération implique donc une modification du nombre de termes associés à chacune des équations du système et donc, de la structure de la matrice globale. On note que cette opération peut être effectuée à chaque itération d'équilibre, ou encore, une fois seulement au début de la résolution, dans le cas où les déplacements relatifs entre les frontières candidates peuvent être considérés petits.

Contrôle du taux de factorisation

On tente de diminuer les temps de calcul en permettant la possibilité de contrôler le nombre de factorisations nécessaires sur la base d'un pas de temps. Il est bien connu que la variation des termes dominants de la matrice tangente diminue considérablement à l'approche de l'état d'équilibre. Dans ce contexte, il peut devenir intéressant de maintenir celle-ci constante après un certain nombre d'itérations d'équilibre. Cette stratégie permet l'évaluation des dernières corrections à l'aide de la dernière matrice tangente factorisée. L'arrêt des factorisations peut être défini selon différents critères tels que le gain d'un ordre dans les normes (5.3) ou encore, directement par un choix heuristique basé sur l'expérience de l'utilisateur. Il importe de noter que cette astuce peut devenir d'une grande efficacité lorsqu'utilisée en présence d'une méthode de lagrangien augmenté. En effet, sachant que l'utilisation d'une faible pénalisation augmente considérablement la stabilité de la matrice globale, l'arrêt des factorisations peut donc être considéré dès la fin de la première augmentation et ainsi, de maintenir constante la rigidité jusqu'à convergence des multiplicateurs.

Utilisation d'une méthode de stockage de type CSR

Une réduction de la quantité de mémoire requise lors de la construction de la matrice tangente globale peut être obtenue par utilisation d'une méthode de stockage de type CSR (Compress Sparse Row). L'un des avantages de ce type de matrice est la possibilité d'utilisation du stockage minimal correspondant à la structure de non zéro établie sur l'ensemble des équations du système. Cependant, il importe de mentionner que le contexte de résolution utilisant ce type de stockage doit alors procéder à l'allocation de mémoire nécessaire à la factorisation, ce qui constitue toujours un problème majeur pour les systèmes de grandes tailles.

Bon nombre de ces «packages» sont aujourd'hui disponibles gratuitement sur divers sites du domaine public. Dans le cadre de cette thèse, nous avons utilisé la librairie PETSc (Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation) développé par le Argonne National Laboratory. Ces librairies incluent notamment une vaste gamme de fonctionnalités allant des classes de matrices, vecteurs, méthodes de résolution directe et itératives jusqu'aux utilitaires

de visualisation graphique. Il s'agit là d'un outil de grand intérêt et extrêmement puissant, pouvant être intégré rapidement dans tout code d'analyse par éléments finis.

Utilisation de «solvers» itératifs

On désire vérifier l'utilisation potentielle des «solvers» itératifs pour la résolution du système linéarisé (4.79). Une telle possibilité, couplée au stockage matriciel de type CSR, constitue, selon nous, une des solutions gagnantes en ce qui a trait à la résolution des problèmes de grandes tailles. Cependant, quoique très éprouvées pour la résolution des problèmes de mécanique des fluides, les méthodes itératives sont encore peu utilisées pour la résolution des problèmes de mécanique des solides et ce, en raison des difficultés inhérentes au mauvais conditionnement du système à résoudre. La détermination de méthodes itératives ainsi que des préconditionneurs adaptés à la résolution de ce type de problème constitue un champ de recherche encore jeune et qui dépasse largement le cadre de cette thèse. Ici, on se limitera à vérifier la possibilité d'utiliser les «solvers» itératifs présents dans PETSc, avec et sans préconditionnement ainsi que la stabilité de ces derniers selon le type ainsi que l'intensité des non-linéarités présentes dans les divers problèmes à résoudre. Cette stratégie permettra, dans un premier temps, d'éviter le stockage nécessaire à la factorisation et finalement, de résoudre le système linéarisé (4.79) beaucoup plus rapidement. Dans le cadre de cette thèse, où les systèmes linéarisés sont fortement non linéaires et non symétriques, nous entendons utiliser les méthodes itératives de type Krylov tels que GMRES (Saad et Schultz, 1986), Bi-CGSTAB (van der Vorst, 1992) et TFQMR (Freund, 1993) jumelées à des préconditionneurs de type Jacobi, ILU (Incomplete LU factorization) et SOR (Successive Overrelaxation).

5.3.2 Opérations sur la base d'un point d'intégration

Comme on peut le constater, la prise en compte du problème de contact avec frottement dans la résolution d'un problème de mécanique des solides, implique une quantité importante d'opérations propres à la détermination des conditions de contact et de frottement aux interfaces de contact. Au niveau performance, on anticipe aisément que les opérations répétitives contenues à l'intérieur d'une boucle sur les points d'intégration, auront une influence non négligeable sur les temps de calcul. Dans ce contexte, cette sous-section présente, dans un premier temps, la séquence d'opérations nécessaires à l'obtention des contributions élémentaires \underline{R}_c^e et \underline{K}_c^e . Finalement, on établit l'algorithme permettant la détermination du point de contact d'une particule esclave sur un ensemble de frontières maîtres candidates au contact.

5.3.2.1 Évaluation des contributions \underline{R}_c^e et \underline{K}_c^e

La détermination complète du système linéarisé (4.79) passe nécessairement par l'évaluation des contributions élémentaires \underline{R}_c^e et \underline{K}_c^e lors de la procédure d'assemblage. Pour ce faire,

et compte tenu de la définition d'un élément de contact, telle qu'établie au Chapitre 4, l'évaluation de ces dernières quantités implique une boucle sur l'ensemble des points d'intégration reposant sur l'élément de frontière esclave associé à l'élément de contact courant. On rappelle qu'une telle définition a pour effet de nécessiter une seconde opération d'assemblage pour chaque couple d'éléments de frontière composé de l'élément esclave et de l'élément maître correspondant à la projection du point d'intégration courant sur la surface maître. Dans ce contexte, l'Algorithme 5.5 présente l'ensemble des opérations correspondant à l'évaluation des contributions élémentaires \underline{R}_c^e et \underline{K}_c^e . En particulier, on y montre que l'évaluation de la contribution associée au point d'intégration courant n'est effectuée que si ce dernier est effectivement en situation de contact. En cas contraire, aucune contribution n'est ajoutée à \underline{R}_c^e et \underline{K}_c^e .

Finalement, on remarque que la partie la plus délicate lors de l'évaluation du champ de contrainte nominale à l'interface, est sans contredit la mise à jour de la position paramétrique $\bar{\xi}(X^1, t)$ de la particule esclave courante sur l'élément maître correspondant à sa projection en $C_{t+\Delta t}$. En fait, cette étape, nécessaire à l'évaluation de la vitesse de frottement sur le pas, est directement associée au statut de contact en C_t . Si la particule était préalablement en contact au début du pas de temps courant, l'actualisation de $\bar{\xi}(X^1, t)$ ne doit être effectuée qu'en présence d'un changement de l'élément maître sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$, et ce, en raison de la paramétrisation spécifique à chaque élément de frontière. Dans ce cas, et telle que montrée à la Figure 5.8(a), la nouvelle position paramétrique de la particule esclave est obtenue par :

1. Évaluer la coordonnée globale interpolée en $C_{t+\Delta t}$, sur l'élément maître au point $\bar{\xi}(X^1, t)$;
2. Déterminer la nouvelle position $\bar{\xi}(X^1, t)$ en effectuant la projection de la nouvelle coordonnée globale obtenue en 1 sur l'élément maître correspondant à la projection de la particule esclave en $C_{t+\Delta t}$.

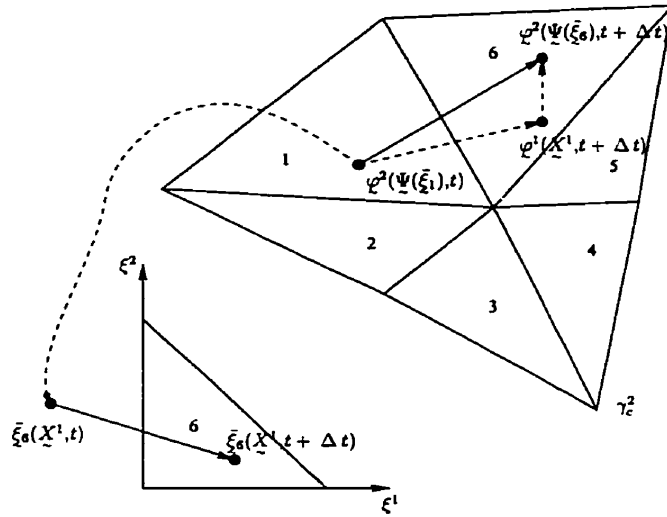
Quant à la deuxième éventualité, soit une particule non en contact en C_t , la procédure consiste à déterminer, le point de percée de la droite définie par les positions de cette dernière en C_t et $C_{t+\Delta t}$ sur l'élément maître correspondant à la projection de cette particule esclave en $C_{t+\Delta t}$ par une méthode de dichotomie. Le point de percée devient alors la coordonnée paramétrique $\bar{\xi}(X^1, t)$ correspondant à une situation de mise en contact de cette particule menant ainsi à une évaluation du frottement entre ce point et celui associé à la projection orthogonale, telle que montrée à la Figure 5.8(b).

5.3.2.2 Détermination du point de contact

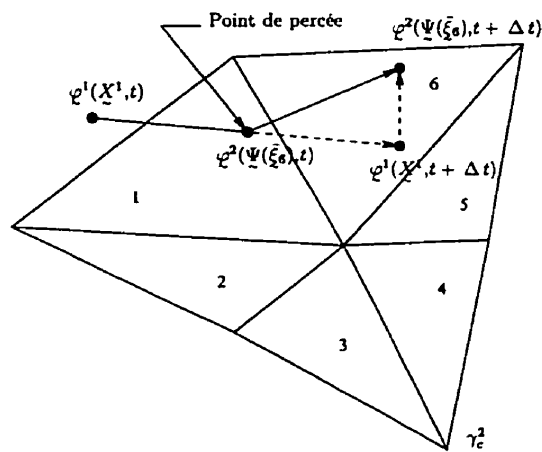
Qu'il s'agisse de la détermination du facteur de relaxation ρ_{min} , du redimensionnement de la matrice tangente globale ou encore lors de l'évaluation des contributions élémentaires, la détermination du point de contact constitue une des opérations les plus répétitives et intensives dans le processus d'évaluation des conditions de contact et de frottement aux interfaces. Dans ce contexte, nous devons donc porter une attention toute particulière dans l'élaboration de cette opération, en considérant l'ensemble des particularités pouvant influencer la qualité ainsi

Algorithme 5.5 – Évaluation des contributions élémentaires \tilde{R}_c^e et K_c^e

- 1: **Pour** ($k = 0$; $k < n_e^{pi}$; $k = k + 1$) (n_e^{pi} : Nombre de points d'intégration)
 - 2: Détermination de la position de la particule esclave en $C_{t+\Delta t}$
 $\tilde{x}_{t+\Delta t}^1 = \varphi^1(\tilde{X}^1, t + \Delta t) = \varphi^1(\Psi_0(\tilde{\eta}_c^k), t + \Delta t)$
 - 3: Recherche du point de contact de la particule esclave $\tilde{x}_{t+\Delta t}^1$ sur γ_c^2
 $\tilde{x}_{t+\Delta t}^2 = \varphi^2(\Psi_0(\tilde{\xi}), t + \Delta t)$
 - 4: **Si** $\tilde{x}_{t+\Delta t}^2 \in \gamma_c^2$ **Alors** (Une projection a été déterminée)
 - 5: Évaluation de la fonction écart $g(\tilde{X}^1, t + \Delta t)$ (Eqn (3.20))
 - 6: Évaluation de la contrainte normale $t_{N_{t+\Delta t}}$ (Eqn (3.34) ou (C.1))
 - 7: **Si** $t_{N_{t+\Delta t}} \neq 0$ **Alors** (La particule est en contact)
 - 8: Mise à jour de la coordonnée paramétrique $\tilde{\xi}(X^1, t)$ selon le statut de la contrainte t_{N_t} (Figure 5.8)
 - 9: Transport de la contrainte tangentielle du repère global à la base convective
 $t_{T_{\alpha t}} = \tilde{t}_{T_t}^b \cdot \tilde{\tau}_\alpha$ (Contraintes tangentielles)
 $\Delta \lambda_{T_\alpha} = \Delta \lambda_{T_t}^b \cdot \tilde{\tau}_\alpha$ (Multiplicateurs de Lagrange)
 - 10: Intégration de la contrainte tangentielle sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$ (Eqn (4.24))
 - 11: Évaluation de la contribution au résidu \tilde{R}_c^k (Eqn (4.57))
 - 12: Évaluation de la contribution à la matrice tangente K_{cN}^k (Eqn (4.59))
 - 13: Évaluation de la contribution à la matrice tangente K_{cT}^k (Eqn (4.60))
 - 14: Ajout de \tilde{R}_c^k dans \tilde{R}_c^e
 - 15: Ajout de K_{cN}^k et K_{cT}^k dans K_c^e
 - 16: **Fin Si**
 - 17: **Fin Si**
 - 18: **Fin Pour**
-



(a) Avec statut de contact en C_t



(b) Avec statut de non contact en C_t

Figure 5.8 – Mise à jour de la coordonnée paramétrique $\bar{\xi}_a(\bar{X}^1, t)$

que les performances de cette étape de recherche du point de contact. Pour ce faire, il importe de fixer quelques points importants quant à la nature du problème à traiter:

1. La représentation discrète des solides candidats au contact est initialement dans un état cinématiquement admissible tel que chaque particule reposant sur une frontière de contact puisse respecter la condition (3.28) et ainsi n'admettre aucune pénétration de la matière au sens continu;
2. Permettre la possibilité qu'une frontière esclave puisse entrer en contact avec différentes frontières maîtres ainsi qu'avec elle-même dans des conditions d'auto-contact (self-contact). Dans ce dernier cas, il demeure impératif que les particules associées à un élément esclave ne puisse entrer en contact avec ce même élément;
3. On admet qu'il est toujours possible, en phase d'initialisation, d'établir une première estimation de l'élément maître associé à chaque particule esclave en considérant celui dont le barycentre est le plus près de la particule esclave en question. Cette astuce permet, entre autres, de fournir les bases nécessaires à la première recherche en cours de résolution et d'anticiper sur la présence de cas de figures jugés pathologiques au sens géométrique;
4. Lors d'une résolution par une méthode de lagrangien augmenté, on admet que l'élément maître résultant de la projection d'une particule esclave demeure constant durant les cycles d'augmentation et que seule la coordonnée paramétrique varie. Cette hypothèse est tout à fait raisonnable compte tenu que la variation des conditions de contact et de frottement diminue considérablement avec les augmentations.

Selon ces dernières considérations, l'Algorithme 5.6 présente l'ensemble des opérations permettant la détermination du point de contact actuel d'une particule esclave sur une surface maître. En particulier, on note que la stratégie adoptée utilise les résultats obtenus de la dernière recherche convergée comme point de départ et progresse de façon systématique par la connectivité élément – élément jusqu'à l'obtention d'une projection bornée sur l'élément courant. La méthode utilisée pour déterminer cette projection est essentiellement basée sur le maintien d'une double condition d'orthogonalité dans l'espace paramétrique d'un élément maître entre les vecteurs de base définissant le plan tangent en un point contenu dans cet élément et le vecteur défini par ce même point et la particule esclave. L'Annexe D présente les détails relatifs à l'évaluation de cette projection. Dans le cas où le point de contact ne peut être déterminé sur la frontière maître courante, la méthode poursuit en effectuant une recherche de l'élément maître le plus près de cette particule esclave excluant ceux contenus dans la frontière précédente, et entame finalement une nouvelle progression vers une éventuelle projection bornée. Dans ce contexte, il paraît évident qu'un changement de frontière maître implique nécessairement une réinitialisation des conditions de contact et de frottement en raison de la discontinuité potentielle entre les frontières.

Finalement, il importe de noter que l'utilisation d'une discrétisation géométrique de continuité C^0 fait apparaître une certaine difficulté dans le processus de détermination du point de contact. En effet, et tel que montré à la Figure 5.10, la pénétration d'une particule esclave au voisinage de la limite géométrique d'un ensemble d'éléments maîtres formant un agencement non planaire, mène systématiquement à une indétermination du point de contact. Une

des méthodes permettant de solutionner ce problème est de laisser l'algorithme progresser vers la discontinuité et de conserver l'élément maître correspondant à celui ayant fait apparaître le phénomène oscillatoire. Le point définissant le pivot de cette oscillation circulaire, nécessairement associé à cet élément, devient le point de contact.

Algorithme 5.6 – Détermination du point de contact d'une particule esclave $\underline{x}_{t+\Delta t}^1$ sur γ_c^2

- 1: Initialisation de la procédure
 $Iter_{max} = 1, \quad projectOK = faux, \quad \bar{\xi} = \langle 0,0 \rangle$
 - 2: **Répète**
 - 3: Calcul du point de projection de la particule esclave $\underline{x}_{t+\Delta t}^1$ sur l'élément maître courant
 $\underline{x}_{t+\Delta t}^2 = \varphi^2(\Psi_0(\bar{\xi}), t + \Delta t)$
 - 4: **Si** $\bar{\xi}$ est externe à l'élément maître courant **Alors**
 - 5: Recherche du coté de sortie de la particule esclave sur l'élément maître courant
 - 6: Évaluation de la coordonnée paramétrique $\bar{\xi}$ correspondant à l'intersection de la trajectoire de sortie avec le coté de sortie (Figure 5.9)
 - 7: **Si** Élément du coté de sortie est inexistant **Alors** (Atteinte d'une limite géométrique)
 - 8: $projectOK = vrai$
 - 9: **Sinon** (On passe à un autre élément)
 - 10: L'élément courant devient celui rattaché à ce coté
 - 11: Conversion de la coordonnée paramétrique $\bar{\xi}$ sur ce nouvel élément (Figure 5.9)
 - 12: **Fin Si**
 - 13: **Sinon**
 - 14: $ProjectOK = vrai$
 - 15: **Fin Si**
 - 16: $Iter = Iter + 1$
 - 17: **Tant que** $ProjectOK \neq vrai$ **ET** $Iter < Iter_{max}$
-

5.4 Mise en œuvre informatique et logiciels utilisés

Nonobstant l'intérêt accordé à la mise sur pied des expressions discrètes présentées au Chapitre 4, la mise en œuvre informatique du modèle numérique développé dans le cadre de cette thèse, constitue une étape d'une extrême délicatesse et ce, en raison du compromis à établir entre la rapidité d'exécution nécessaire, et la grande complexité liée à la gestion des informations propres à la prise en compte du problème de contact avec frottement. Face à un tel dilemme, nous nous sommes donc proposés d'établir une représentation orientée objet des divers entités nécessaires à la définition d'une interface de contact et de programmer le tout dans un langage permettant à la fois le maintien de cette orthogonalité, ainsi que la rapidité tant désirée. Pour ce faire, nous avons donc choisi de programmer un module indépendant, appelé «Contacta», permettant la prise en compte du problème de contact avec

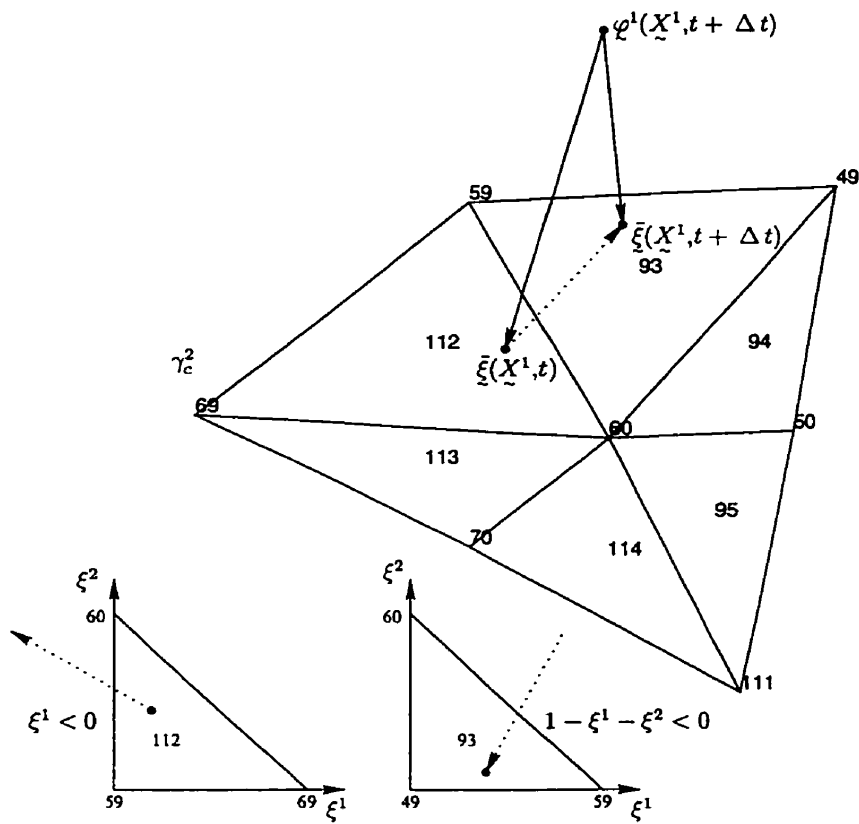


Figure 5.9 – Évaluation de la coordonnée paramétrique à la frontière d'un élément maître

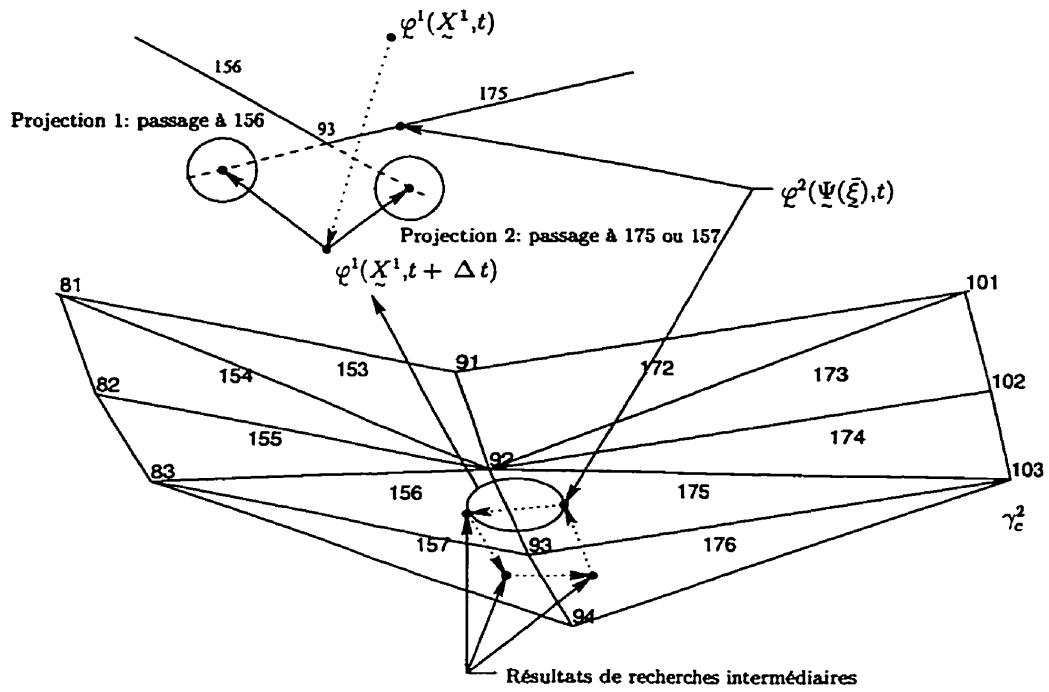


Figure 5.10 – Cas pathologique menant à une indétermination du point de contact

frottement en langage C++, et de greffer le tout à un logiciel d'analyse par élément finis programmé en langage C. Cette stratégie fut entre autres dictée par la grande puissance du langage C++ en ce qui a trait à l'encapsulation des données ainsi qu'au polymorphisme; concept largement utilisable dans le contexte des interfaces discrétisées par éléments finis. En contrepartie, il importe de mentionner que ce dernier langage évolue encore passablement et comporte bon nombre de particularités fonction du type de plateforme et du choix du compilateur, contrairement au langage C qui est aujourd'hui bien établi et défini de façon identique sur toutes les plateformes (SUN, SGI, HP, etc.). Dans ce contexte, l'ensemble de la programmation effectuée dans le langage C++ fut donc dictée par le standard ANSI actuel et tel que défini dans Lippman et Lajoie (1998).

Selon ces dernières considérations, cette section présente les justificatifs ayant mené à une définition structurée d'un élément de contact ainsi que l'ensemble des logiciels utilisés dans le cadre de cette thèse.

5.4.1 Définition structurée à l'interface de contact

Tel que montré à la Figure 4.4 et compte tenu des besoins définis précédemment, en matière de résolution du problème de contact avec frottement en grandes transformations, on se rend aisément à la conclusion que la définition structurée d'un élément de contact repose essentiellement sur celle de l'interface supportant ce même élément. Pour ce faire, il importe d'établir quelques définitions de base quant aux utilitaires nécessaires à la conception d'un élément de contact et permettre, par le fait même, une exploitation beaucoup plus poussée du langage C++.

CtaBasis Cet objet regroupe les informations nécessaires au calcul des vecteurs de base ainsi qu'à la métrique associée à un élément de frontière en un point donné. Par un simple appel, cet objet procède à l'évaluation de la base duale. Chaque vecteur définissant la base (T1, T2 et N) est stocké dans un objet de type «CtaVect3D».

CtaDynaVect Il s'agit là d'un objet «template» permettant la création d'un vecteur dynamique de type quelconque avec validation de l'indice dans l'opérateur []. Cet objet peut évidemment effectuer diverses opérations telles que copie, redimensionnement avec ou sans initialisation, etc.

CtaParamCoor Cet objet permet d'encapsuler les coordonnées d'un point dans la base paramétrique (ξ^1, ξ^2) avec initialisation par défaut de la coordonnée $\xi^2 = 0$ dans le cas bidimensionnel.

CtaPolynome Objet permettant de créer un polynôme de degré n et d'en extraire les racines réelles et/ou complexes. En particulier, il est possible de spécifier la construction d'un polynôme de Legendre, largement utilisé dans l'évaluation des schémas d'intégration du type Gauss.

CtaStaticVect Il s'agit là d'un objet «template» similaire à l'objet de type «CtaDynaVect» permettant la création d'un vecteur de type quelconque à dimension fixe avec validation de l'indice dans l'opérateur []. L'avantage de ce type d'objet est la possibilité, lorsque possible, d'allouer l'espace à la compilation et non à l'exécution.

CtaVect3D Il s'agit là d'un objet définissant un vecteur à trois composantes (X, Y, Z) auquel est associé une multitude d'opérations allant de la simple addition au produit vectoriel. Cette classe permet entre autres d'alléger de façon significative les manipulations entre vecteurs.

La Figure 5.11 présente les diagrammes de classes associés aux divers objets définis précédemment. Selon ces dernières définitions, il est maintenant possible de procéder à la mise en place des divers objets menant à la définition d'une frontière candidate au contact:

BdyNode Nœud se retrouvant sur une frontière candidate au contact et contenant l'ensemble des informations nécessaires à son identification, à sa localisation initiale et actuelle ainsi que son nombre de degrés de liberté. De plus, il importe que cet objet puisse répondre à une requête sur sa connectivité inverse `BdyNode - BdyElement`.

BdyElement Il s'agit d'un élément se retrouvant sur une frontière candidate au contact et défini par un identificateur qui lui est propre ainsi qu'un ensemble de `BdyNode`. Cet objet doit aussi contenir l'information sur les valeurs des écarts fictifs aux nœuds, les particularités associées à l'interpolation ainsi que la connectivité `BdyElement - BdyElement`. Dans ce contexte, il paraît donc justifié, compte tenu des différents types de formulations d'éléments possibles, d'établir une certaine hiérarchie au niveau de la définition de cet objet. Par exemple, un élément de frontière de type quadrangle et possédant une interpolation quadratique incomplète à huit nœuds, noté `BdyElementQ8`, peut parfaitement faire partie de la famille `BdyElementQuadrangle` qui elle-même, fait partie de la grande famille `BdyElement`.

Boundary Cet objet contient un identificateur qui lui est propre ainsi que l'ensemble des informations propres à la définition d'une frontière candidate au contact. En particulier, on y retrouve la liste des objets de type `BdyNode` et `BdyElement` qui y sont rattachés.

La Figure 5.12 présente les diagrammes de classe permettant une meilleure visualisation de l'interrelation entre les divers objets menant à la définition d'une telle frontière. Conséquent à ces dernières définitions, il est maintenant possible d'établir une définition géométrique de l'interface de contact. Cependant, l'aspect résolution implique certaines définitions supplémentaires permettant, l'association avec cette interface, des propriétés de contact ainsi que les schémas d'intégration nécessaires à la détermination des conditions de contact et de frottement. Pour ce faire, on présente les définitions suivantes:

CntcIntgGrp Cet objet regroupe l'ensemble des schémas d'intégration associés aux éléments de frontière de type `BdyElementLine`, `BdyElementTriangle` et `BdyElementQuadrangle`. Sachant pertinemment qu'une frontière peut impliquer différentes géométries d'éléments, il importe que l'interface puisse répondre à tout type d'intégration possible. En raison de la nature même d'un schéma d'intégration, nous nous sommes donc proposés d'établir une certaine hiérarchie selon la nature du «`BdyElement`»:

Integration Ce répertoire regroupe l'ensemble des schémas d'intégration susceptibles d'être utilisés lors de la résolution du problème de contact.

Integration Cet objet, de haut niveau, définit l'interface que doit posséder un schéma

d'intégration. En particulier, ce dernier doit savoir retourner ses coordonnées ainsi que ses poids et pouvoir dupliquer son information particulière.

IntgLine Objet dérivant du type *Integration*; celui-ci permet l'intégration sur les éléments de frontière de type *BdyElementLine* selon deux méthodes différentes. La première, associée à la méthode de Newton-Cotes, permet l'intégration avec des points situés aux limites de l'élément. Les schémas implantés sont ceux présentés dans Dhatt et Touzot (1981). Quant à la seconde méthode, celle-ci correspond à une généralisation de la méthode de Gauss par résolution du polynôme de Legendre de degré n , spécifié par l'utilisateur. Les n points sont alors distribués uniformément sur l'élément. Ces deux dernières spécialisations correspondent aux objets de type *IntgLineNCotes* et *IntgLineGauss* respectivement.

IntgTriangle Objet dérivant du type *Integration*; celui-ci permet l'intégration sur les éléments de frontière de type *BdyElementTriangle*. Les schémas utilisés sont ceux présentés dans Dhatt et Touzot (1981) et au Tableau 5.1.

IntgQuadrangle Objet dérivant du type *Integration*; celui-ci permet l'intégration sur les éléments de frontière de type *BdyElementQuadrangle*. D'utilisation fort simple, il suffit de créer le schéma en spécifiant comme argument, deux schémas de type *IntgLine* correspondant aux niveaux respectifs d'intégration dans les directions paramétriques η^1 et η^2 .

La Figure 5.13 présente les diagrammes de classes associés aux divers schémas d'intégration proposés.

CntcLagrangian Cet objet permet la résolution du problème de contact à l'aide d'une méthode de lagrangien augmenté. En plus de contenir les diverses tolérances nécessaires, cet objet maintient à jour certaines informations globales, propres à la procédure itérative (static).

CntcProperty En plus de posséder un identificateur qui lui est propre, cet objet contient l'ensemble des informations nécessaires à la création d'un groupe de propriétés de contact. Entre autres, on y admet les pénalisations, le coefficient de frottement, certaines tolérances ainsi qu'un contexte de résolution par une méthode de lagrangien augmenté.

CntcTolerance Objet regroupant un certain nombre de tolérances associées au calcul des interfaces de contact. On y retrouve une tolérance sur l'écart minimal avant contact, la distance minimale d'unicité entre deux points ainsi que la précision admise sur l'élément de référence. Il importe de noter que par défaut, ces tolérances sont initialisées à 0.0, 10^{-12} et 10^{-12} respectivement.

Suite à ces définitions, il est maintenant possible de procéder à la création d'une interface de contact, notée «*CntcInterface*», en admettant comme attributs:

- Un identificateur;
- Un objet de type «*CntcIntgGrp*» permettant de fixer l'intégration numérique;
- Un objet de type «*Boundary*» faisant office de frontière esclave;
- Une liste d'objets de type «*Boundary*» représentant l'ensemble des frontières maîtres candidates au contact avec la frontière esclave;

- Une liste d'objet de type «CntrProperty» définissant le groupe de propriétés de contact associé à chacune des frontières maîtres;
- Une liste d'objet de type «BdyNode» regroupant l'ensemble des nœuds associés aux frontières maîtres de cet interface.

C'est donc lors de la création d'un objet de type «CntrInterface» que sont créés les éléments de contact propres à cette interface. Les attributs associés à cet objet, noté «CntrElement» sont:

- Un identificateur;
- Un objet de type «BdyElement» inclus dans la frontière esclave et faisant office d'élément esclave;
- Un objet de type «CntrInterface» permettant de conserver un lien fort sur son interface d'attache et de procéder, le cas échéant, à la requête de diverses informations;
- Un vecteur d'objet de type «CntrParameters», permettant la gestion de l'évolution des conditions de contact et de frottement en cours de résolution et ce en chaque point d'intégration. Ces paramètres internes doivent entre autres inclure:
 - Le contexte de projection en C_t et $C_{t+\Delta t}$ (L'élément maître «BdyElement» et localisation $\bar{\xi}$);
 - Les statuts de contact en C_t et $C_{t+\Delta t}$;
 - La contrainte nominale de frottement exprimée dans le repère de discrétisation et ce, en C_t et $C_{t+\Delta t}$;
 - La contrainte de contact normal en $C_{t+\Delta t}$;
 - La valeur de la fonction écart en $C_{t+\Delta t}$;
 - Les multiplicateurs de Lagrange associés à la contrainte nominale de frottement;
 - Le multiplicateur de Lagrange associés à la contrainte normale.

La Figure 5.14 présente une vue d'ensemble de ces dernières définitions.

5.4.2 Logiciels utilisés

L'ensemble des développements effectués dans le cadre de cette thèse, exception faite de Contacta, furent implantés dans CLEF version 3.0, un logiciel d'analyse par éléments finis programmé en langage C développé au sein du département de génie civil de l'Université Laval. CLEF pour C-Logiciel d'Eléments Finis est basé sur un noyau de fonctionnalités orthogonales appelé FESh pour Finite Element Shell. Initié au début des années 90 et ayant servi de logiciel support à bon nombre de projets de recherche, ce logiciel permet aujourd'hui le traitement d'une grande variété de problème dans le domaine de la mécanique des solides allant de la simple résolution linéaire à celle des problèmes non linéaires en grandes transformations en passant par l'étude dynamique de l'interaction pont-véhicule.

En ce qui a trait à l'aspect résolution du système linéarisé, il fut d'un grand intérêt, et ce, malgré le fait que CLEF possède son propre solveur direct par lignes de ciel, de procéder

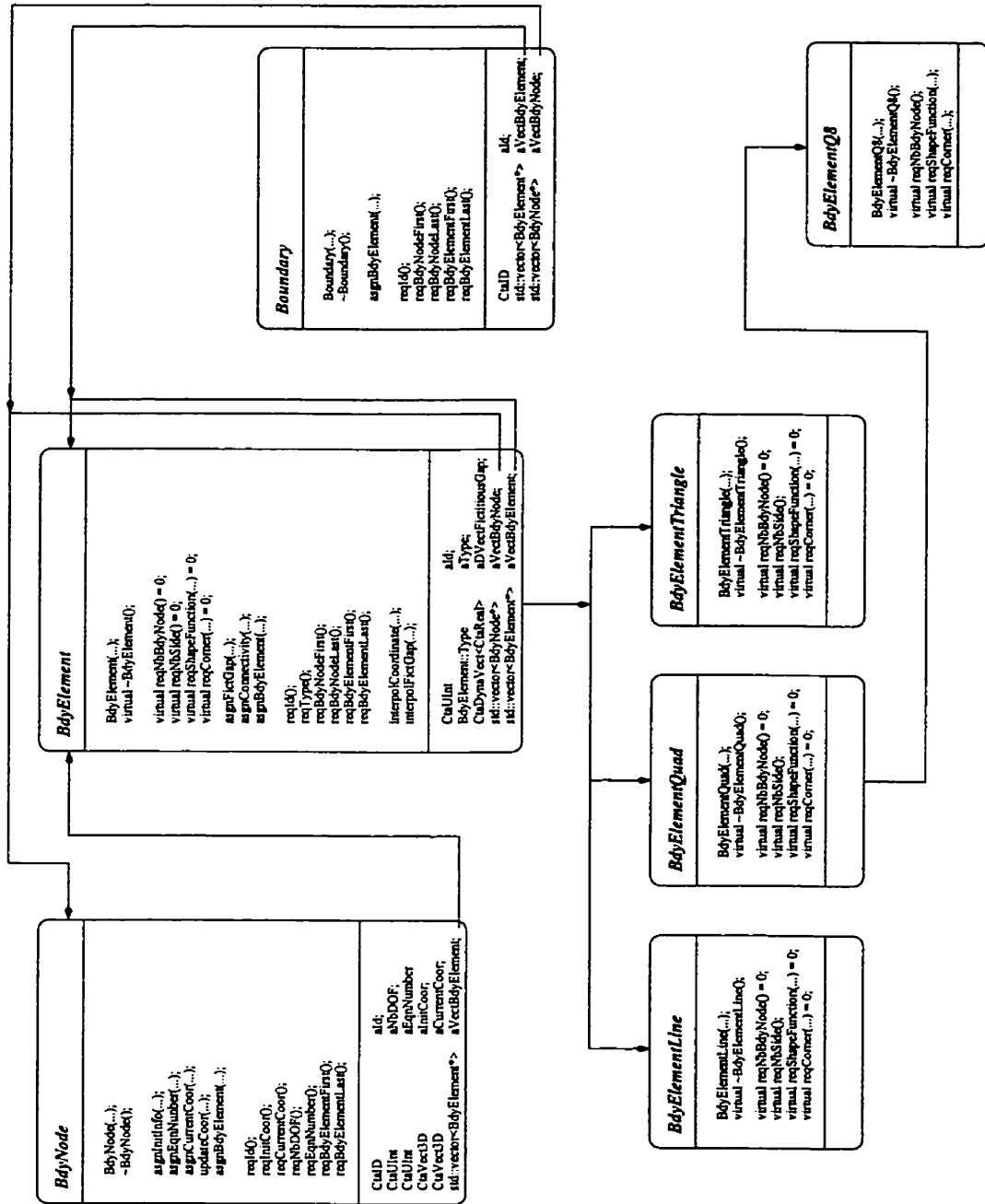


Figure 5.12 – Diagrammes de classes associés à la définition d'une frontière candidate au contact

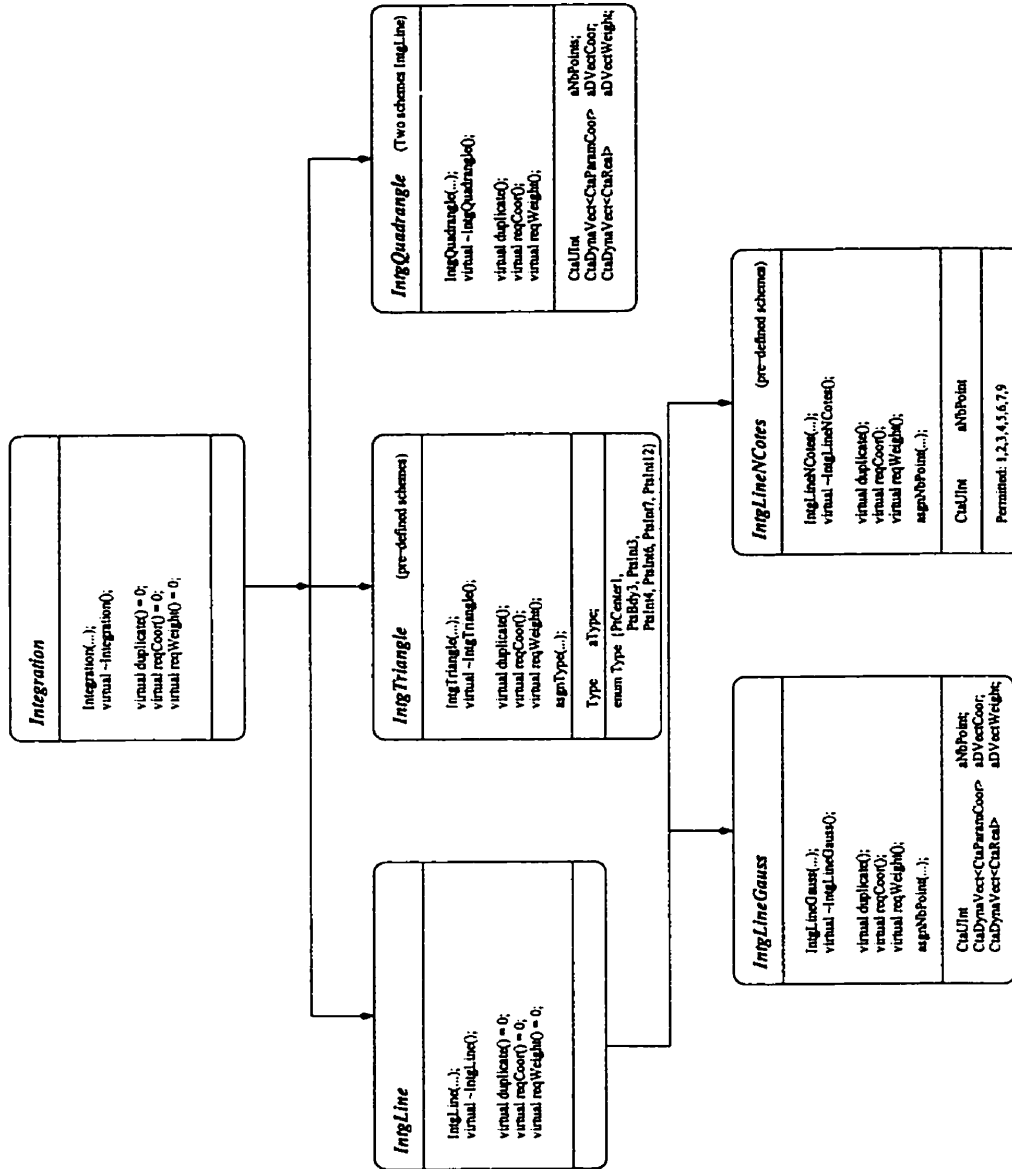


Figure 5.13 – Diagrammes de classes associés à la définition des schémas d'intégration

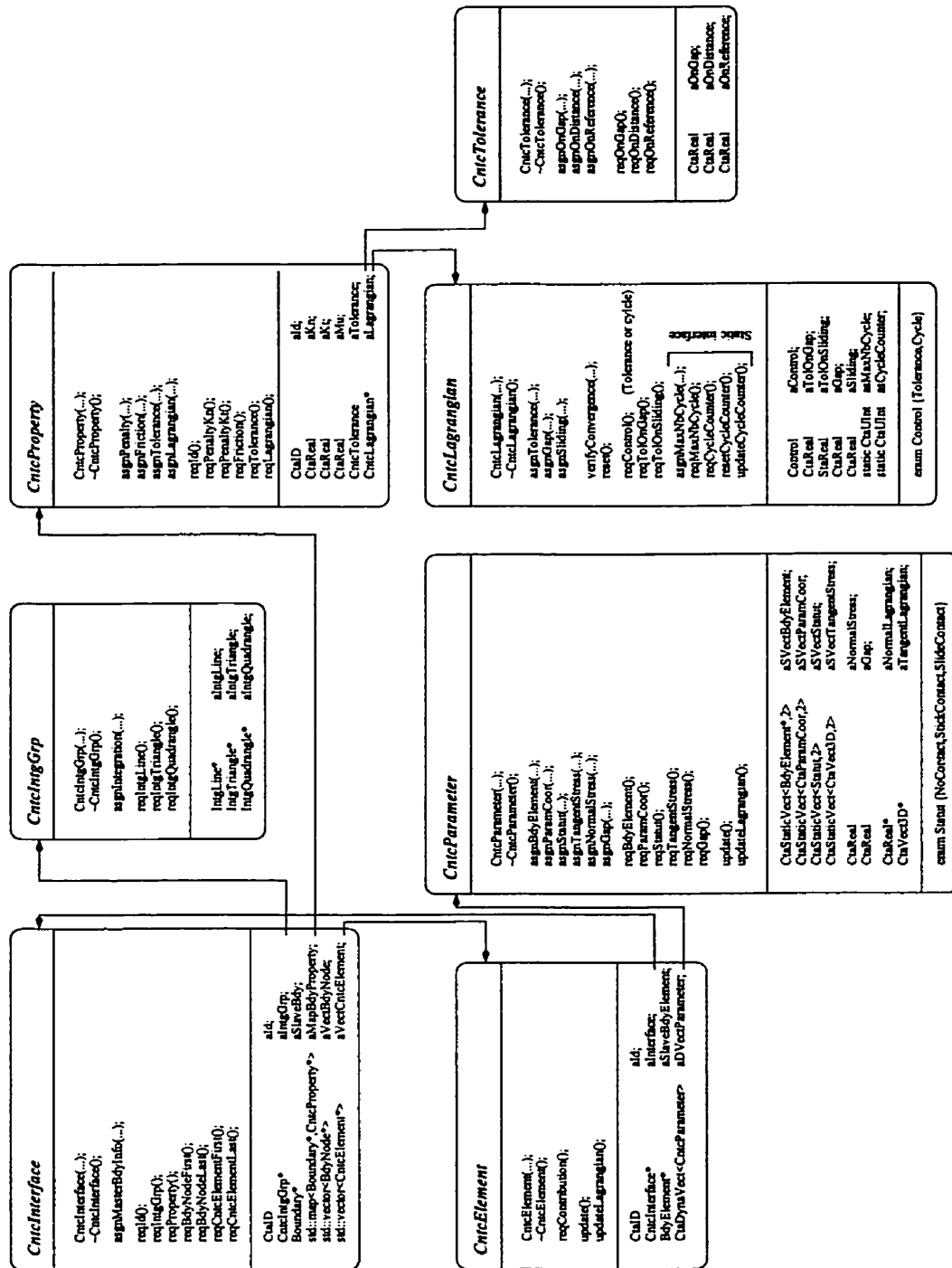


Figure 5.14 – Diagrammes de classes associés à la définition d'un élément de contact

à la mise en place d'outils permettant l'utilisation de méthodes beaucoup mieux adaptées aux problèmes que nous envisageons de traiter. Dans cette optique, et tel que convenu à la section précédente, nous avons donc permis l'utilisation, dans CLEF, des diverses fonctionnalités offertes par les bibliothèques de PETSc version 2.0.24, développé par le Argonne National Laboratory (MCS Division).

Finalement, l'ensemble des modèles géométriques, maillages, opérations de pré- et post-traitement associés aux exemples et applications traités dans le cadre de cette thèse a été obtenu à l'aide du logiciel de PATRAN version 7.5 de la société MSC.

Chapitre 6

Validation du modèle numérique

6.1 Généralités

Ce chapitre a comme principal objectif la validation du modèle proposé dans le cadre de ce projet de recherche. Pour ce faire, on présente divers exemples, de niveaux de complexité variés, permettant ainsi de faire ressortir l'ensemble des possibilités ainsi que les limites du modèle. Dans cette optique, la plupart des exemples présentent une étude paramétrique permettant de vérifier la sensibilité de certaines composantes caractéristiques du modèle (pénalisation, schéma d'intégration, etc.) sur la résolubilité, les temps CPU, la quantité de mémoire utilisée ainsi que la performance des solveurs disponibles. Tel qu'introduit au Chapitre 5, on rappelle que les méthodes itératives expérimentées dans le cadre de cette thèse sont celles de type Krylov jumelées à des préconditionneurs de type Jacobi, ILU (Incomplete LU factorization) et SOR (Successive Overrelaxation). L'ensemble des exemples traités dans ce chapitre ont été résolus sur un ordinateur Pentium III 930 MHz Linux SMP possédant 1 Go de mémoire vive. Considérant la nature fortement non linéaire de ces exemples, la convergence du schéma de Newton-Raphson relatif à la minimisation du résidu d'équilibre est obtenue lorsque les normes (5.3) atteignent respectivement 10^{-3} et 10^{-2} .

6.2 Poutre courte en grandes transformations

Comme premier test de validation, on se propose de vérifier l'aptitude du modèle à prendre en compte les grandes transformations. Pour ce faire, et compte-tenu de la grande difficulté à retrouver de tels exemples de validation dans la littérature, on entend effectuer une étude tridimensionnelle du problème bidimensionnel proposé dans le cadre du GRECO (grandes déformations et endommagement). Telle que montrée à la Figure 6.1, il s'agit d'une poutre courte en pseudo porte-à-faux, soumise à un déplacement vertical (Y) à son extrémité libre. D'épaisseur unitaire (Z), la poutre est soumise à des conditions de retenue telles que la surface encastree ne peut subir aucun déplacement horizontal (X) mais est tout de même libre

de se déplacer selon la verticale, exception faite de la limite inférieure de la surface. Dans le même ordre d'idées, le point d'application du déplacement imposé (\bar{u}) est retenu selon l'horizontale (X). Dans le but de simuler correctement l'hypothèse des déformations planes dans un contexte tridimensionnel, il importe d'empêcher le déplacement selon (Z) des deux faces perpendiculaires à ce même axe. Le maillage ainsi que les conditions aux limites sont tels que montrés à la Figure 6.2. Ce dernier est composé de 48 éléments hexaédriques à 20 nœuds. La loi de comportement utilisée est une loi élastoplastique avec écrouissage isotrope dont les caractéristiques mécaniques sont:

- Module de Young: $E = 200000$ MPa
- Coefficient de Poisson: $\nu = 0.30$
- Limite d'élasticité initiale: $\sigma_e = 400$ MPa
- Module d'écrouissage: $H = 1000$ MPa

jumelée à l'utilisation d'une dérivée objective de Jaumann. La résolution du problème est effectuée à l'aide de la méthode de Newton-Raphson avec pilotage du déplacement contrôlé \bar{u} (voir Figure 6.2). Afin de reproduire les conditions du GRECO, on utilise un schéma d'intégration de Gauss à huit points (2·2·2). Globalement, la convergence du schéma de Newton-Raphson est obtenue lorsque les normes (5.3) atteignent respectivement 10^{-3} et 10^{-2} .

Cet exemple présente l'intérêt d'engendrer différentes combinaisons de trajets de déformation dans la poutre en cours de chargement. En effet, on y retrouve de grandes déformations et petites rotations au voisinage de l'encastrement (points 1,2 et 3 sur la Figure 6.1), de petites déformations et grandes rotations près du point 4 (Figure 6.1) et finalement, de grandes déformations et grandes rotations près du point d'application de la sollicitation \bar{u} (point 5 sur la Figure 6.1). Plusieurs laboratoires européens dont:

- le Service de Mécanique des Matériaux, Université de Liège;
- l'Institut National des Sciences Appliquées (INSA), Lyon;
- le Centre d'Étude et de Mise en Forme (CEMEF), Sophia, Antipolis;
- la Division Modèle Numérique en Mécanique (MNM), Compiègne.

ont déjà traité ce problème. De façon détaillée, la Figure 6.3 montre l'évolution du tenseur des contraintes aux points de contrôle en fonction de l'intensité de la sollicitation. Entre autres, on y constate une carte de contrainte σ_x caractéristique avec une zone d'encastrement sollicitée en traction en sa partie supérieure et en compression en sa partie inférieure. Fait particulier, la contrainte au point 5 passe de la compression à la traction au environ de 60% de la sollicitation. Ce phénomène est principalement engendré par l'état de confinement au voisinage de la sollicitation dans les premiers stades du chargement. Quant à la contrainte σ_y , on remarque un effet d'étirement au point 5 selon l'axe (Y) et ce, en raison de la proximité de la zone de sollicitation. Dans le cas de la contrainte hors plan σ_z , la Figure 6.3(c) montre une carte des contraintes compatible avec l'effet de Poisson dans un contexte de déformations planes. En effet, les zones globalement en traction associées aux contraintes σ_x et σ_y engendrent, par l'effet de confinement hors plan (Z), des zones de compressions selon cette même direction.

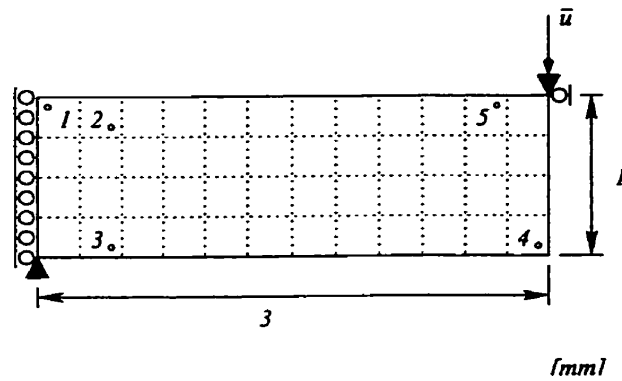


Figure 6.1 – Poutre en grandes transformations: géométrie, conditions aux limites et points de contrôle

Finalement, on remarque que la contrainte de cisaillement τ_{xy} est presque nulle au point 1 en raison de la condition aux limites naturelle ainsi que de la présence d'une rotule empêchant l'effort de se développer. En contrepartie, aux points 2 et 3, on constate que les contraintes qui s'y développent, sont à un signe près, passablement identiques.

À chargement maximal ($\bar{u} = 1$), les résultats obtenus par les différents logiciels sont présentés au Tableau 6.1. On remarque que ceux-ci sont très similaires et ce, pour l'ensemble des cinq points d'intégration tels qu'identifiés sur la Figure 6.1. Aussi, on constate que le point 4 ne subit que de grandes rotations sans même se plastifier. Aussi, la Figure 6.4 présente la distribution des déformations plastiques équivalentes sur les configurations déformées correspondants aux niveaux de sollicitation $\bar{u} = 0.5$ et $\bar{u} = 1$. On constate que les zones au voisinage de l'encastrement et du point d'application de la sollicitation sont les plus plastifiées. Il est donc possible de conclure que le modèle permet la bonne représentation des grandes transformations.

Afin de permettre une meilleur compréhension de l'importance de la prise en compte de quantités objectives dans le processus d'intégration des lois de comportement, la Figure 6.5 montre l'évolution du tenseur des contraintes au point 4, obtenue en considérant les dérivées de Jaumann et de Green-Naghdi ainsi qu'en l'absence de dérivées objectives. Comme on peut le constater, la faible intensité des déformations ($\epsilon_{ps} = 0$) implique que les solutions utilisant les dérivées de Jaumann et de Green-Naghdi coïncident. Cependant, la présence de grandes rotations en ce point mène à un écart significatif entre les valeurs calculées avec et sans dérivées objectives.

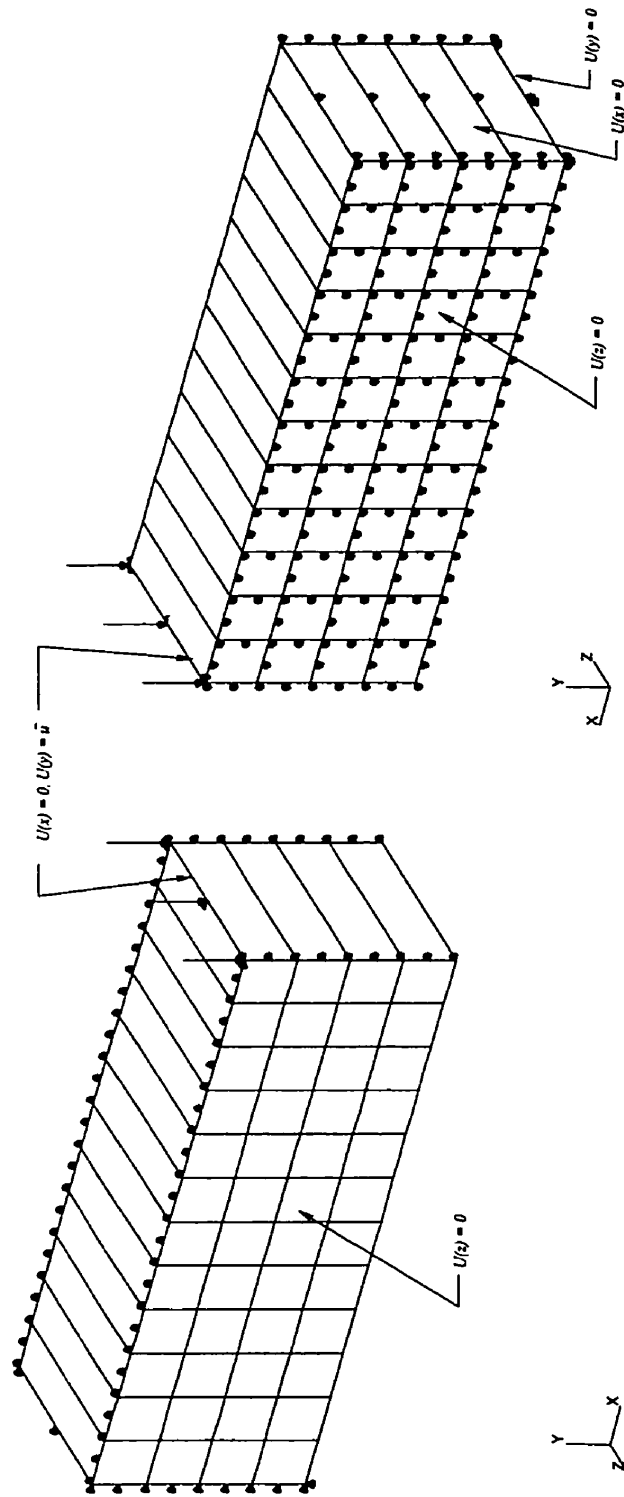
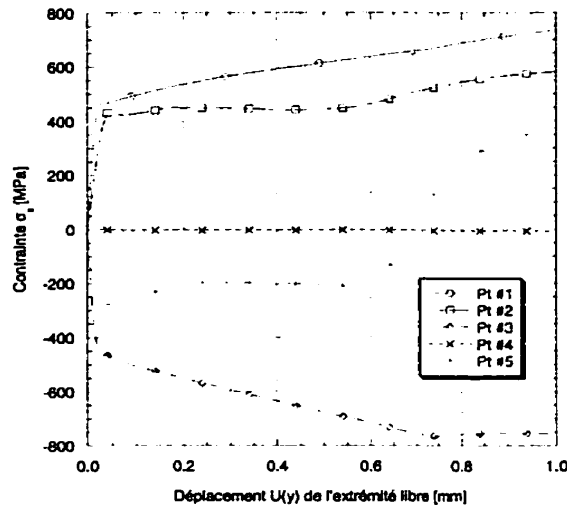
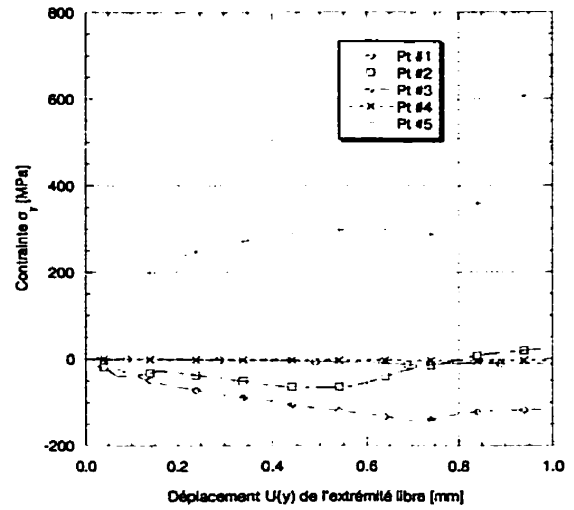


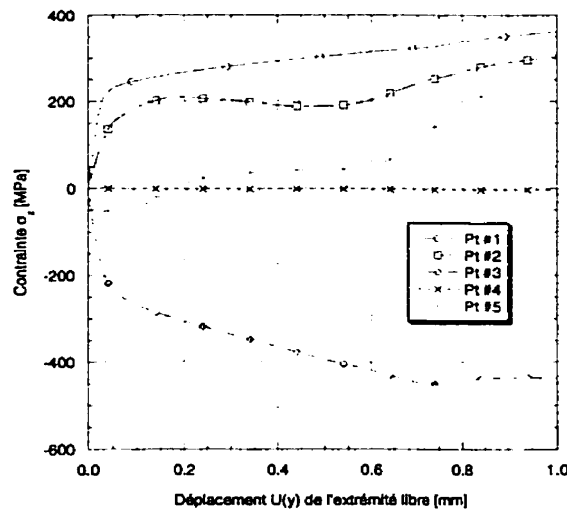
Figure 6.2 – Poutre en grandes transformations: maillages et conditions aux limites



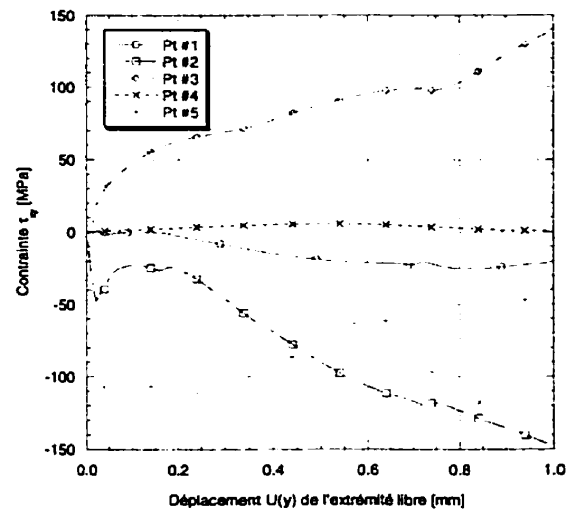
(a) Contrainte σ_x



(b) Contrainte σ_y



(c) Contrainte σ_z



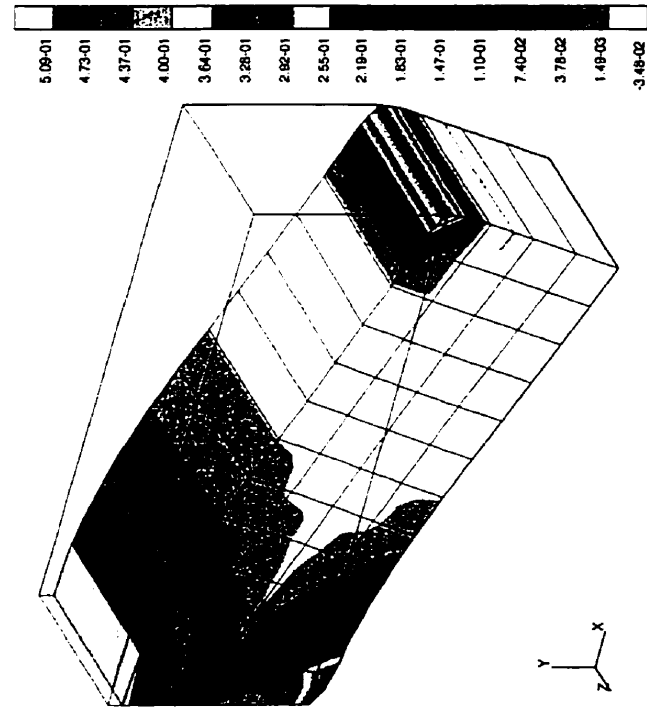
(d) Contrainte τ_{xy}

Figure 6.3 – Poutre en grandes transformations: évolution des contraintes aux points de contrôle

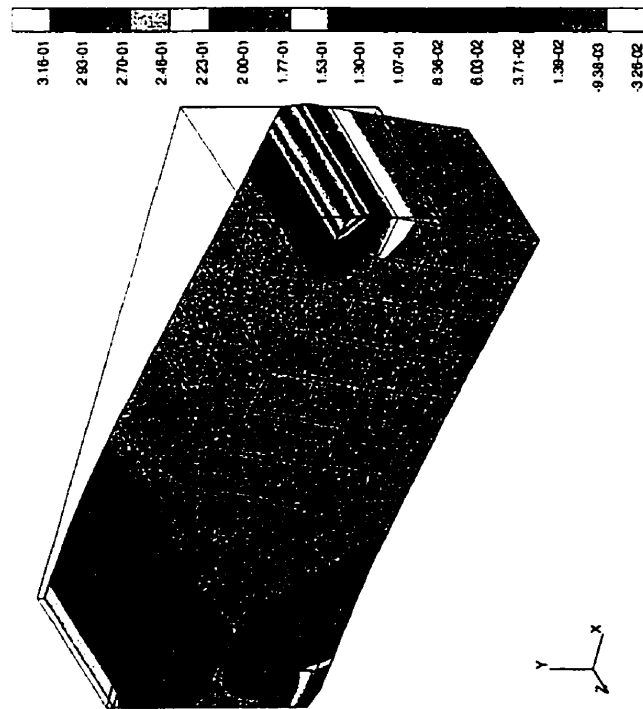
Tableau 6.1 – Poutre en grandes transformations: comparaison des champs de contrainte aux points de contrôle

Point de contrôle	Code	σ_x (MPa)	σ_y (MPa)	σ_z (MPa)	τ_{xy} (MPa)	ϵ_{ps}
1	Liège	736.6	-13.33	361.9	21.67	0.2475
	INSA	736.6	-11.26	361.8	20.99	0.2487
	CEMEF	736.4	-11.28	361.9	20.96	0.2485
	MNM	735.8	-11.29	361.6	20.91	0.2480
	CLEF	736.0	-11.22	361.8	21.09	0.2482
2	Liège	582.9	26.12	303.3	148.2	0.1457
	INSA	581.8	26.43	303.1	148.2	0.1451
	CEMEF	581.8	26.65	303.1	148.3	0.1451
	MNM	582.0	26.69	303.2	148.1	0.1451
	CLEF	581.6	26.01	302.7	148.0	0.1452
3	Liège	-762.8	-119.9	-441.2	-140.0	0.2063
	INSA	-757.5	-117.0	-437.0	-139.7	0.2051
	CEMEF	-757.1	-116.8	-436.7	-139.6	0.2049
	MNM	-757.0	-116.5	-436.6	-139.4	0.2049
	CLEF	-757.0	-116.6	-436.7	-139.5	0.2050
4	Liège	-7.56	-3.64	-3.36	-1.08	0.0
	INSA	-8.89	-3.64	-3.74	-0.99	0.0
	CEMEF	-8.98	-3.66	-3.79	-1.00	0.0
	MNM	-9.14	-3.69	-3.85	-1.01	0.0
	CLEF	-8.96	-3.67	-3.79	-1.01	0.0
5	Liège	362.1	622.7	314.9	42.66	0.0560
	INSA	355.2	610.9	308.1	36.50	0.0545
	CEMEF	354.7	611.0	306.9	36.02	0.0545
	MNM	354.3	613.3	307.7	36.54	0.0544
	CLEF	355.1	612.4	307.5	37.31	0.0545

En complément à cet exemple, on propose de vérifier l'influence de l'évolution des diverses non-linéarités inhérentes à l'évolution des grandes transformations sur la résolution de ce problème à l'aide de solveurs itératifs. Considérant une norme de convergence de la méthode itérative de l'ordre de 10^{-5} , la Figure 6.6, montre que peu importe la méthode utilisée, le préconditionneur de type ILU n'a jamais permis l'obtention d'une solution convergée. En contrepartie, on constate que la méthode de GMRES est la moins performante et ce, dès les premiers pas de chargement et continue de se dégrader avec l'augmentation de la sollicitation. Quant aux deux autres méthodes, elles indiquent des performances passablement similaires en présence d'un préconditionnement de type Jacobi. Cependant, on constate une meilleure performance de la méthode Bi-CGSTAB en considérant un préconditionnement de type SOR. En comparant l'évolution de la plastification dans la poutre, telle que montrée à la Figure 6.7 et les performances de la Figure 6.6, on constate que les trois méthodes présentent une aug-

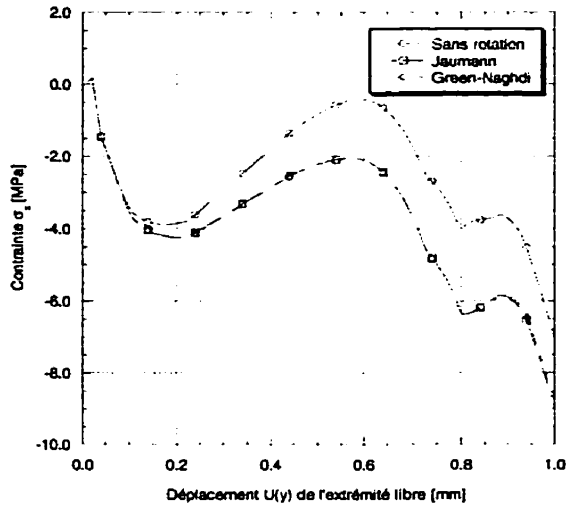


(b) $\bar{u} = 1.0$

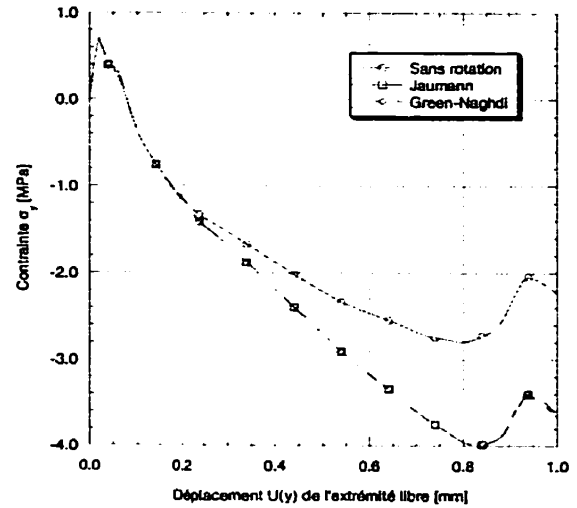


(a) $\bar{u} = 0.5$

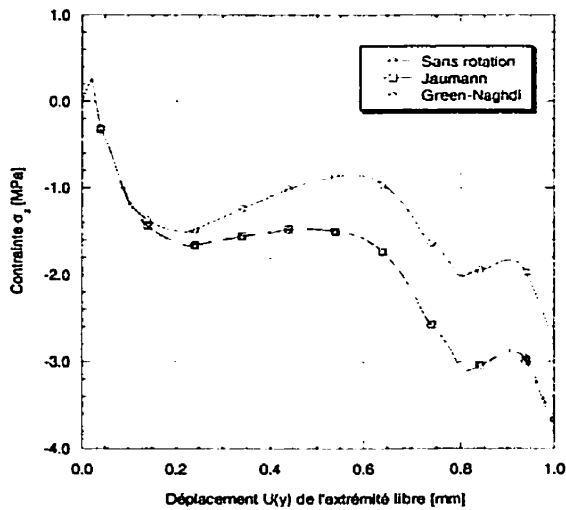
Figure 6.4 – Poutre en grandes transformations: déformation plastique équivalente



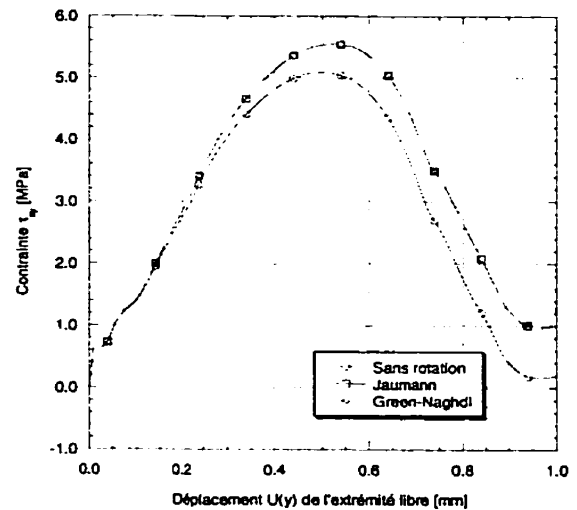
(a) Contrainte σ_x



(b) Contrainte σ_y



(c) Contrainte σ_z



(d) Contrainte τ_{xy}

Figure 6.5 – Poutre en grandes transformations: évolution des contraintes aux points #4 selon la dérivée utilisée

mentation des oscillations au voisinage de $U(y) = 0.5$. Ce phénomène, beaucoup plus marqué avec le préconditionneur de Jacobi, peut s'expliquer par une modification soudaine des zones en progression plastique. En effet, on remarque, tel que montré à la Figure 6.7(b), qu'à partir de ce niveau de sollicitation, la zone de la poutre près de la sollicitation cesse de se plastifier. Malgré l'augmentation quasi-constante du volume plastifié, s'effectue progressivement de l'encastrement à la zone de sollicitation. Finalement, on peut anticiper sur la robustesse de la méthode Bi-CGSTAB avec préconditionnement de type SOR pour les problèmes en présence de grandes transformations.

6.3 Problème de Hertz

Cet exemple vise à vérifier les aptitudes du modèle de contact à bien évaluer les conditions d'interface dans le cas où la discrétisation géométrique ne représente pas fidèlement la géométrie du problème. Pour ce faire, considérons le cas de deux cylindres identiques, parallèles, de longueur L (présumée infinie), mis en contact par l'entremise d'un chargement linéique p_L , uniformément distribuée sur la longueur des cylindres. La Figure 6.8 montre une représentation bidimensionnelle des caractéristiques géométriques du problème de Hertz. Comme on peut le constater sur cette figure, les deux cylindres, d'un diamètre de $D = 50$ mm, tendent à se rapprocher d'une distance δ sous l'effet de la sollicitation $P = p_L \cdot L$ et engendrant, par le fait même, une zone de contact de largeur b . Considérant une loi de comportement élastique isotrope dont le module de Young et le coefficient de Poisson sont respectivement $E = 200000$ MPa et $\nu = 0.30$, ainsi qu'une pression de contact maximale pré-définie $\sigma_c = 1000$ MPa, la théorie présentée dans Young (1989) permet la détermination de la pression linéique nécessaire selon l'expression:

$$p_L = \left(\frac{\sigma_c}{0.591} \right)^2 \frac{K_D}{E} = 357.88 \text{ N/mm} \quad (6.1)$$

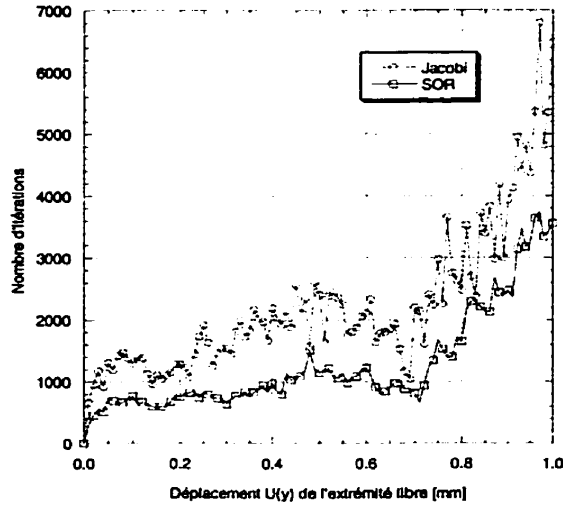
où $K_D = D/2 = 25$ mm dans le cas de deux cylindres de même diamètre. À partir de (6.1), la largeur de la zone de contact b est donnée par:

$$b = 2.15 \sqrt{\frac{p_L K_D}{E}} = 0.4547 \text{ mm}, \quad (6.2)$$

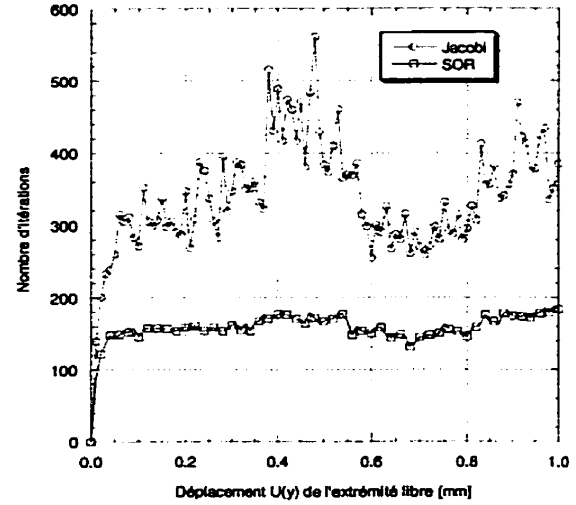
permettant ainsi l'évaluation du rapprochement des centres des deux cylindres, δ définie par:

$$\delta = \frac{2p_L(1-\nu^2)}{\pi E} \left(\frac{2}{3} + 2 \ln \frac{2D}{b} \right) \approx 0.01187 \text{ mm}. \quad (6.3)$$

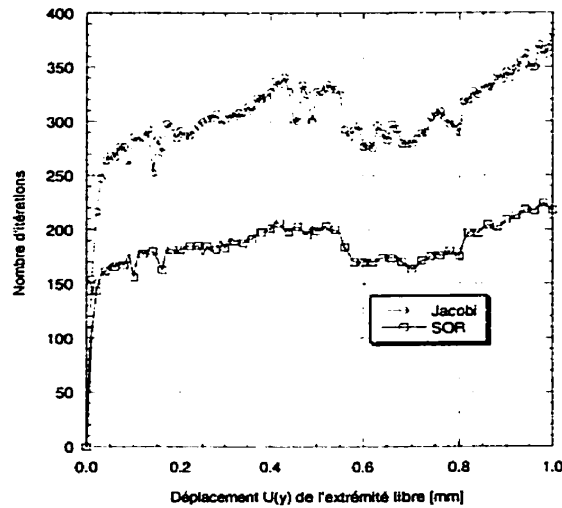
Dans un tel contexte, le problème à résoudre consiste donc à simuler la mise en contact des deux cylindres en contrôlant le rapprochement δ jusqu'à l'obtention de la valeur finale ($\delta = 0.01187$) et de comparer la pressions de contact maximal obtenue avec celle anticipée ainsi que la largeur de la zone de contact avec la valeur théorique donnée par (6.2). Considérant le caractère tridimensionnel de cette étude, mais aussi la contrainte que nous nous sommes



(a) Méthode GMRES



(b) Méthode Bi-CGSTAB



(c) Méthode TFQMR

Figure 6.6 – Poutre en grandes transformations: résolution à l'aide de solveurs itératifs

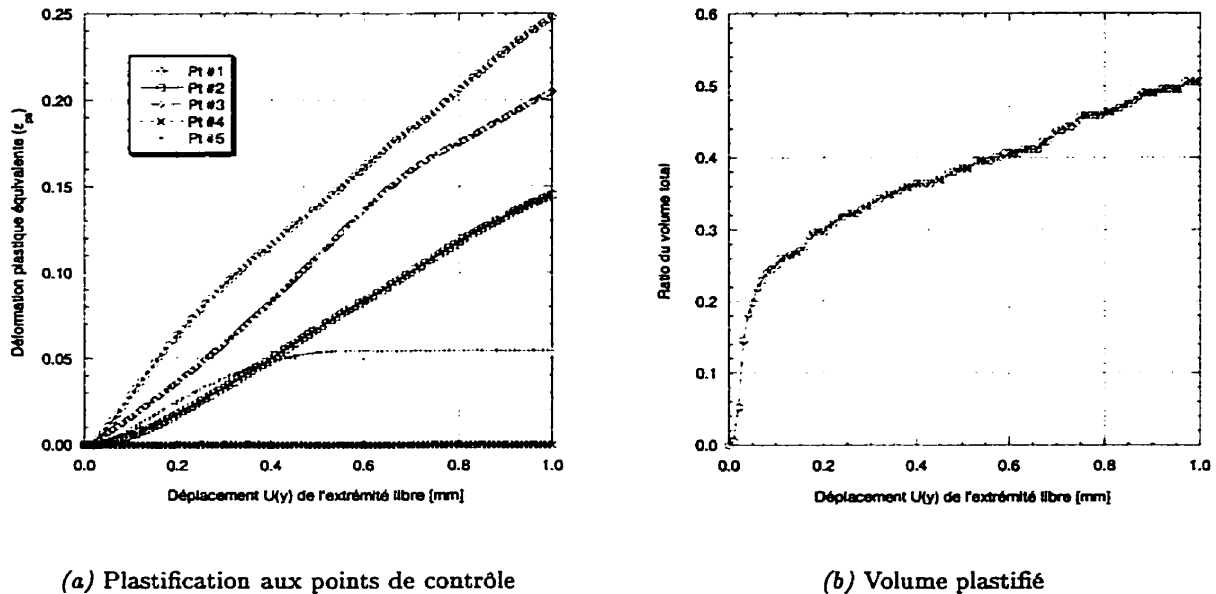


Figure 6.7 – Poutre en grandes transformations: évolution de la plastification

donnés quant au non respect intégral de la géométrie des cylindres, on propose d'exploiter la symétrie du problème en ne considérant qu'un seul cylindre en contact avec le plan de symétrie. Afin de vérifier l'influence de la densité de maillage sur la qualité des résultats, le problème est résolu sur trois maillages différents définis en considérant des longueurs d'arête minimales au niveau de l'interface de contact de l'ordre de 1.250 mm, 0.625 mm et 0.375 mm. Selon la largeur de la zone de contact telle que donnée par (6.2), on constate que les densités choisies correspondent à des longueurs avoisinant la largeur de cette zone. La Figure 6.9 présente les trois maillages utilisés ainsi que les conditions aux limites nécessaires à la représentation tridimensionnelle du problème de Hertz. En particulier, on constate que la prise en compte d'une longueur de cylindre infinie est obtenue en définissant une longueur arbitraire (ici $L = 225$ mm), en fixant les déplacements axiaux (Z) de l'une des extrémités et en assurant l'uniformité des déplacements axiaux (Z) de l'autre extrémité à l'aide d'une relation linéaire. Les cylindres sont discrétisés à l'aide d'éléments isoparamétriques tétraédriques à 10 nœuds. La Figure 6.9 présente également les recouvrements nécessaires à la définition des interfaces de contact. Les frontières esclaves et maîtres sont définies respectivement à l'aide d'éléments triangulaires à six nœuds et quadrangulaires à huit nœuds. Le Tableau 6.2 donne quelques informations concernant les densités de maillages ainsi que le nombre d'équations à résoudre.

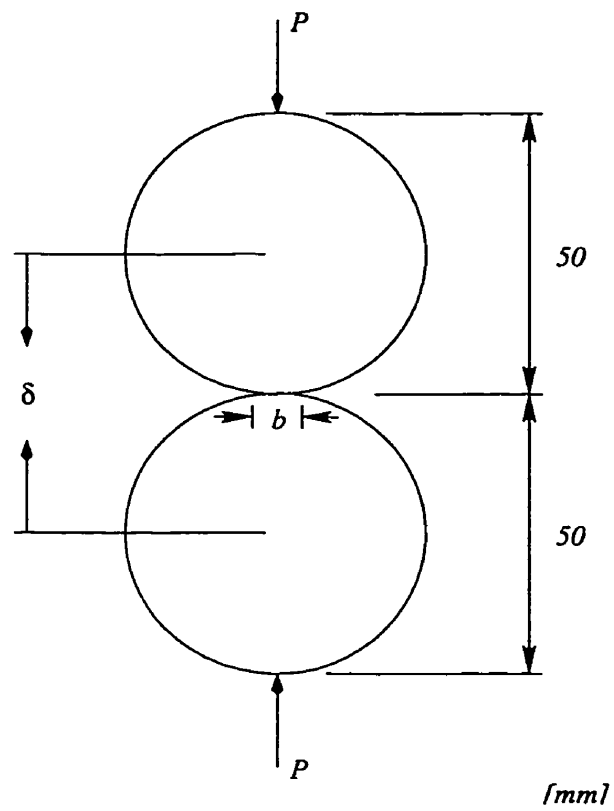


Figure 6.8 – Problème de Hertz: caractéristiques géométriques

Tableau 6.2 – Problème de Hertz: quelques informations sur les densités de maillage

	Maillage 1.250	Maillage 0.625	Maillage 0.375
Nb. d'éléments solides	8145	23788	67157
Nb. d'éléments de surface	1087	3349	10772
Nb. d'éléments de contact	1086	3348	10771
Nb. de nœuds	12761	36117	102038
Nb. d'équations à résoudre	37255	107057	304651

La résolution des problèmes est obtenue en un seul pas à l'aide de la méthode de Newton-Raphson jumelée à une technique de pilotage en condition aux limites imposées correspondant à la demie du déplacement δ soit 0.005935 mm. Comme il n'y a aucune condition aux limites dans la direction (X), on propose de stabiliser le cylindre en considérant un frottement sans glissement à l'interface ($\mu = 1.0$). Les interfaces de contact sont résolues en considérant des pénalités normale et tangente respectivement de 10^8 et 10^5 . L'intégration numérique utilisée pour les tétraèdres correspond à un schéma de Gauss à 15 points. Pour ce qui est des interfaces de contact, nous avons jugé pertinent de vérifier l'influence du schéma utilisé sur la précision des résultats. Les schémas testés sont ceux de Hammer à un, trois et douze points internes. En raison de la taille des problèmes à résoudre, les systèmes linéarisés sont résolus à l'aide de la méthode itérative de type Bi-CGSTAB avec préconditionnement de type SOR avec une norme de convergence de l'ordre de 10^{-5} .

Considérant ce contexte de résolution, le Tableau 6.3 présente quelques données intéressantes, relatives à la résolution de chacun des trois problèmes. Comme on peut le constater, et tel qu'anticipé, les temps (CPU) ainsi que la quantité de mémoire nécessaire à la résolution augmente avec la densité du maillage, exception faite du maillage 1.250. En effet, le mauvais conditionnement occasionné par l'utilisation d'un seul point d'intégration jumelé à la piètre qualité du maillage implique un nombre d'itérations (Newton-Raphson et Bi-CGSTAB) plus grand que celui nécessaire avec trois points d'intégration. Cette situation implique donc, pour ce maillage, une diminution des ratios des temps CPU relatif à l'utilisation d'un seul point d'intégration. Pour ce qui est des autres densités de maillage (0.625 et 0.375), on observe une augmentation importante des temps CPU relatifs selon le nombre de points d'intégration utilisé. Entre autres, les maillages 0.625 et 0.375 montrent des augmentations respectives de l'ordre de 72% et 47% pour une résolution avec douze points d'intégration. Cette situation montre donc que le temps passé à l'évaluation des conditions de contact et de frottement aux points d'intégration peut être non négligeable, voire même de l'ordre du temps nécessaire à la résolution du système linéarisé. Cependant, l'utilisation d'une méthode itérative pour la résolution du système linéarisé fait ressortir cet aspect de façon beaucoup plus importante qu'avec une résolution à l'aide d'une méthode directe (LU) et ce, en raison de la réduction des temps de calcul avec la taille grandissante des problèmes (voir Tableau 6.3). Cependant, il importe de noter que le choix du schéma d'intégration affecte de façon indirecte les temps de calcul. En effet, les variations du nombre d'itérations des méthodes de Newton-Raphson et Bi-CGSTAB font en sorte que les ratios de temps CPU pour un même maillage inclus non seulement le temps passé à la détermination des conditions de contact et de frottement aux

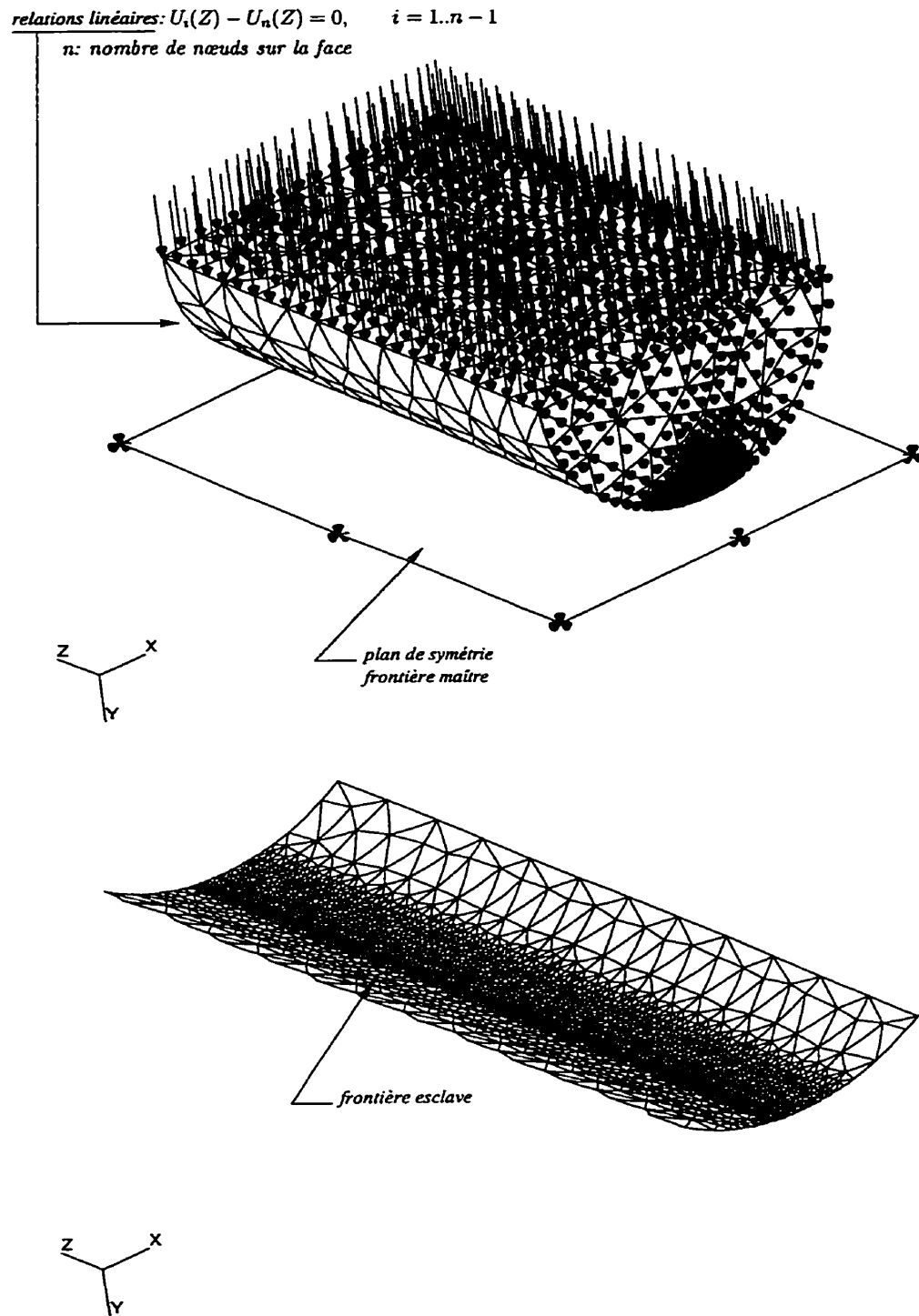


Figure 6.9 – Problème de Hertz: maillage type, conditions aux limites et interface de contact

points de contact, mais aussi l'influence du schéma sur le temps de résolution du système linéarisé. Entre autres, on constate que la résolution à l'aide d'un schéma d'intégration à trois points permet l'obtention d'un système linéarisé mieux conditionné que pour les schémas à un et douze points. On remarque, en effet, une convergence plus rapide de la méthode Bi-CGSTAB en considérant trois points d'intégration. Le Tableau 6.3 montre également l'utilisation de la mémoire en fonction de la taille et du schéma d'intégration. On y constate une augmentation de l'ordre de 185% entre les différents maillages. Cette augmentation est bien sûr constante en raison de l'absence de factorisation du système linéarisé. Fait intéressant, on remarque que la mémoire nécessaire au stockage des informations aux points d'intégration est négligeable et ne dépasse guère les 3% de la mémoire totale utilisée.

Tableau 6.3 – Problème de Hertz: quelques informations relatives à la résolution numérique

Nb. de points d'intégration	Maillage 1.250			Maillage 0.625			Maillage 0.375		
	1	3	12	1	3	12	1	3	12
Temps CPU total (sec.)*	1442	1028	1257	2824	3258	4861	8613	11833	12662
Méthode directe (LU)	4417		8371						
Temps CPU / Temps CPU (1 pt)	1.0	0.71	0.87	1.0	1.15	1.72	1.0	1.37	1.47
Mémoire (Mo)†	95	95	97	275	277	283	781	786	807
Mémoire / Mémoire (1 pt)	1.0	1.0	1.02	1.0	1.01	1.03	1.0	1.01	1.03
Nb. d'itér. (Newton-Raphson)	12	8	9	7	9	11	5	9	10
Méthode directe (LU)	5		9						
Nb. d'itér. (Bi-CGSTAB)‡	187	179	206	220	209	242	255	227	234

*Ces temps CPU n'impliquent que la résolution non linéaire (excluant la lecture des données).

†Mémoire nécessaire au stockage des données.

‡Moyenne du nombre d'itérations Bi-CGSTAB par itération de Newton-Raphson sur le pas.

Pour ce qui est des résultats numériques obtenus, la Figure 6.10, présente la distribution de la pression nominale le long de l'axe Z, au niveau de l'interface de contact. Le tracé de ces graphiques a été effectué en considérant un échantillonnage de l'ensemble des nœuds se retrouvant au voisinage de la ligne centrale de contact selon une tolérance correspondant à la largeur théorique de la zone de contact (*b*). Dans un tel contexte, et considérant la nature non structurée des maillages à l'étude, on doit donc s'attendre à retrouver toute une gamme de valeurs allant de la pression maximale sur l'axe centrale jusqu'à une valeur nulle au voisinage de la limite de la zone de contact. Comme on peut le constater, l'ensemble des résultats varie considérablement en fonction de la densité de maillage ainsi qu'en fonction du nombre de points d'intégration utilisé. On constate également que le maillage correspondant à une longueur d'arête minimale de 1.25 mm donne de très mauvais résultats et en particulier, avec l'utilisation d'un seul point d'intégration. Malgré l'état de la solution, les schémas à trois et douze points présentent une solution moins oscillante le long du cylindre que celui à un seul point. Cette situation s'explique bien évidemment par l'incapacité du maillage à effectuer une représentation géométrique adéquate de la surface du cylindre au voisinage de la zone de contact ainsi qu'à la sous-intégration du champ de pression engendrée par l'utilisation d'un schéma à un seul point. Cependant, le maillage correspondant à une longueur d'arête minimale de 0.625 mm donne déjà de bien meilleurs résultats. On peut remarquer que les trois schémas

permettent d'obtenir une solution beaucoup plus uniforme le long du cylindre et en particulier, pour ceux à trois et douze points. Encore une fois, le schéma à un seul point, par son effet sous-intégrant, ne permet pas une représentation aussi régulière du champ de pression. En diminuant la longueur des arêtes en deçà de la longueur théorique de la zone de contact (b), on remarque, tel que montré à la Figure 6.10(c), que le champ de pression se stabilise et tend vers la solution théorique de 1000 MPa. Cependant, malgré une densité de maillage adéquate, le schéma à un seul point d'intégration génère toujours autant d'oscillations.

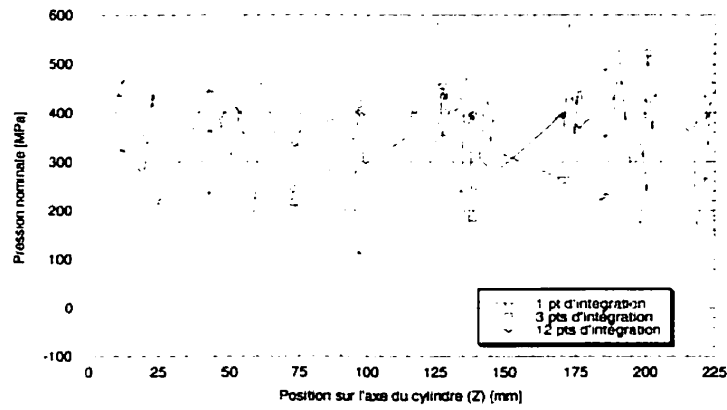
Finalement, la vérification de la solution numérique correspondant à la largeur de la zone de contact est obtenu en utilisant la même stratégie que précédemment (échantillonnage) mais en considérant une tolérance selon l'axe X correspondant à une largeur légèrement supérieure à la largeur théorique de la zone de contact. De cette façon, l'échantillonnage contient tous les nœuds contenus dans la zone théorique. Dans un tel contexte, la Figure 6.11 présente la distribution des pénétrations¹ résiduelles le long de cette zone et ce, en fonction de la densité de maillage et du schéma d'intégration utilisé. Fait assez remarquable, l'utilisation du maillage de plus faible densité avec un schéma à douze points d'intégration permet une assez bonne représentation de la zone de contact comparativement aux deux autres schémas. En augmentant la densité, la Figure 6.11(b) présente une nette amélioration de la qualité de la solution jusqu'à l'obtention d'une plage de pénétration totalement positive, telle que montrée à la Figure 6.11(c).

6.4 Blocs en compression

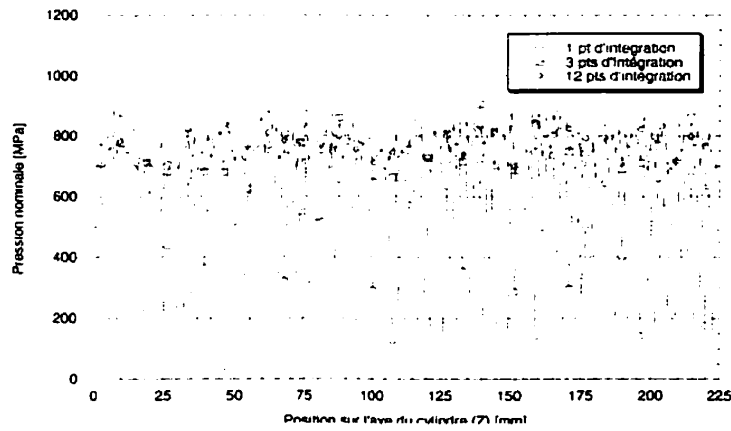
Le prochain exemple a comme principaux objectifs, de valider l'utilisation, en présence de grandes déformations, du modèle de contact avec frottement résolu à l'aide d'une méthode de lagrangien augmenté ainsi que la loi d'interface spécialisée à la modélisation de l'interface toron-mors d'ancrage. Pour ce faire, considérons le cas de deux blocs, reposant l'un sur l'autre, et soumis à un champ de compression à l'interface par l'entremise d'une poussée verticale du bloc supérieure sur le bloc inférieur. La Figure 6.12(a) présente le maillage utilisé ainsi que les conditions aux limites appliquées. On remarque que le bloc inférieur qui est entièrement encastré à sa base, est maillé à l'aide d'éléments hexaédriques à 20 nœuds. Quant à celui du haut, pour qui le déplacement en sa partie supérieure est limité à celui dans la direction verticale (\bar{u}), est maillé à l'aide d'éléments prismatiques à 15 nœuds. Comme on peut le constater sur le Figure 6.12(b), et compte-tenu de la taille différente des deux blocs, les densités de maillage identiques de ces derniers font en sorte que le traitement des conditions de contact et de frottement doit être effectué sur des maillages non alignés. Les frontières esclave et maître sont respectivement constituées d'éléments triangulaires à six nœuds et quadrangles à huit nœuds. Le Tableau 6.2 donne quelques informations concernant la densité des maillages ainsi que le nombre d'équations à résoudre. Les deux blocs sont constitués d'un matériau élastoplastique avec écrouissage isotrope dont les caractéristiques mécaniques sont:

- Module de Young: $E = 200000$ MPa

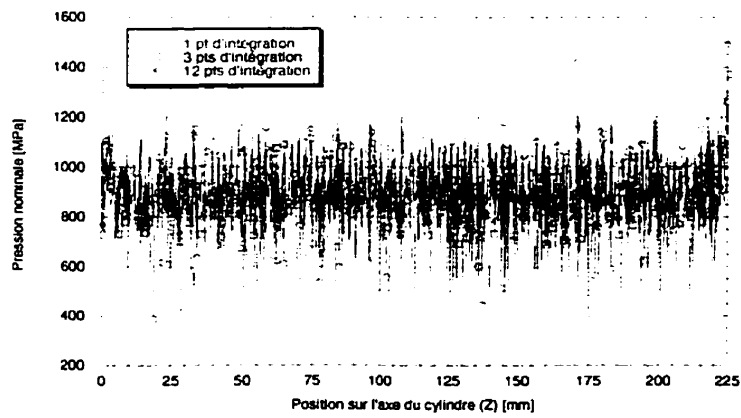
1. On rappelle qu'une pénétration positive correspond à une pression de contact non nulle.



(a) Maillage 1.250

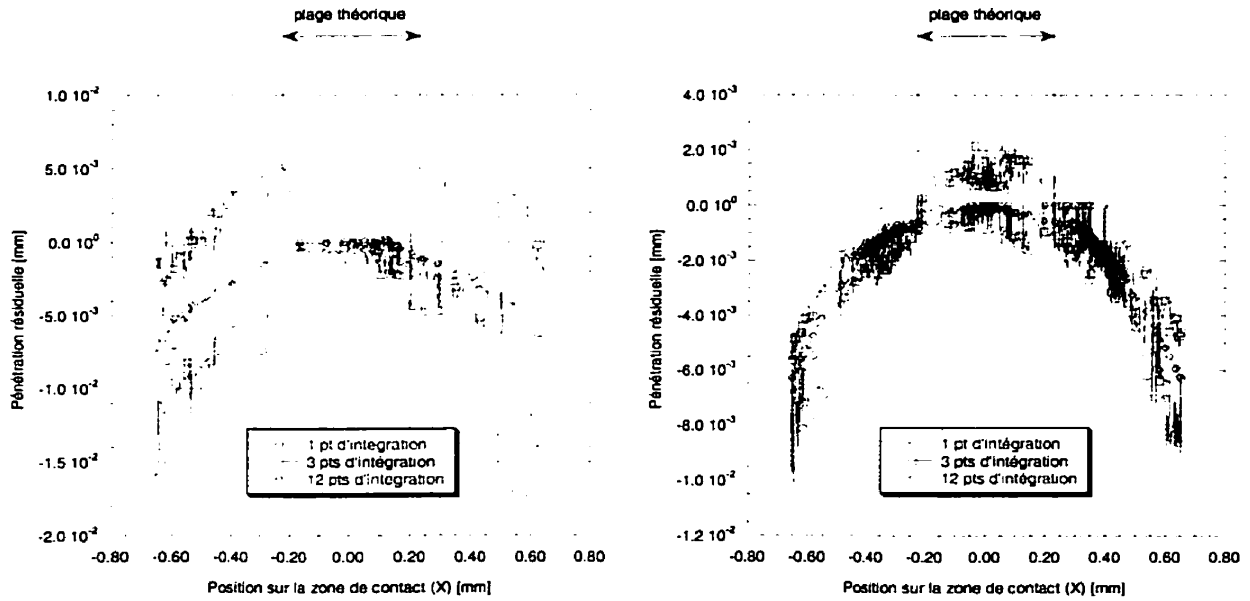


(b) Maillage 0.625



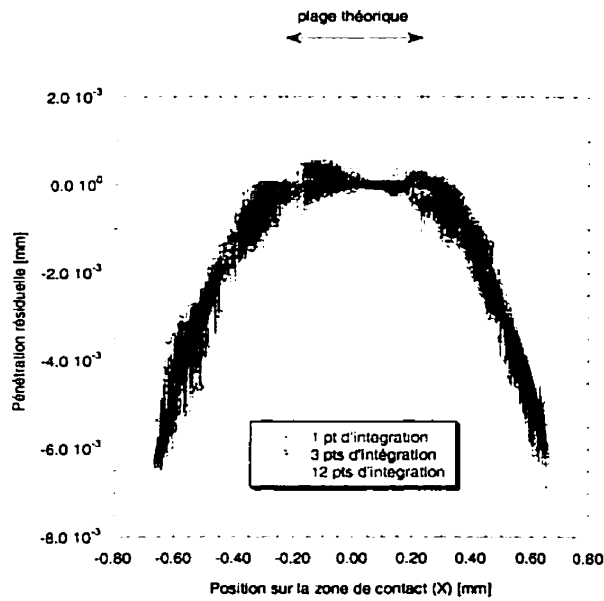
(c) Maillage 0.375

Figure 6.10 – Problème de Hertz: distribution du champ de pression sur la zone de contact



(a) Maillage 1.250

(b) Maillage 0.625



(c) Maillage 0.375

Figure 6.11 – Problème de Hertz: étendue de la zone de contact

- Coefficient de Poisson: $\nu = 0.30$
- Limite d'élasticité initiale: $\sigma_e = 400$ MPa
- Module d'écroutissage: $H = 50000$ MPa

jumelée à l'utilisation d'une dérivée objective de Green-Naghdi. Pour ce qui est de l'interface, on considère, selon l'analyse effectuée, des conditions sans frottement ou encore, une loi de frottement de Coulomb avec ($\mu = 0.3$).

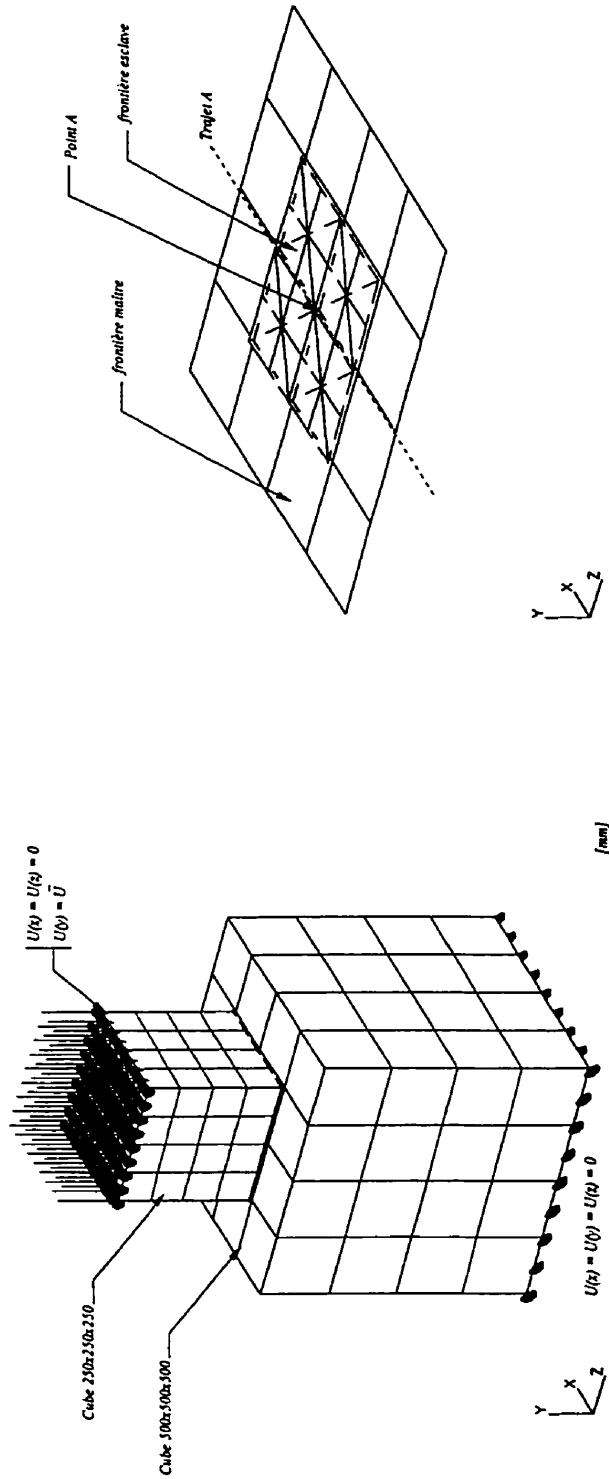
Tableau 6.4 – *Blocs en compression: quelques informations sur la densité de maillage*

Nombre d'éléments solides (H20,P15)	192
Nombre d'éléments de surface (Q8,T6)	48
Nombre d'interface de contact (T6)	1
Nombre d'éléments de contact	32
Nombre de nœuds	930
Nombre d'équations à résoudre	2352

Quant à la résolution du problème, elle est effectuée à l'aide de la méthode de Newton-Raphson avec pilotage du déplacement contrôlé \bar{u} (voir Figure 6.12(a)). Les interfaces de contact sont résolues en considérant des pénalités normale et tangente de l'ordre de 10^3 . L'intégration numérique utilisé pour les hexaèdres et les prismes sont respectivement des schémas de Gauss à 27 points ($3 \cdot 3 \cdot 3$) et de Hammer-Gauss à 9 points ($3 \cdot 3$). Pour ce qui est des interfaces de contact, on utilise un schéma de Hammer à trois points internes. Le problème est résolu en 21 pas de chargement. Le premier correspond à la mise en contact sur une interpénétration initiale de 1 mm et les suivants (20), avec une descente correspondant à $\bar{u} = 5.0$ mm. Au stade finale, le bloc supérieur est donc enfoncé dans le bloc inférieur d'une distance de l'ordre du cinquième de la hauteur du bloc inférieur (101 mm).

En tout premier lieu, et ce, pour des raisons purement académiques, nous avons procédé à la résolution du problème à l'aide des méthodes itératives afin de vérifier l'influence du frottement sur le comportement de chacune des méthodes. Considérant un préconditionnement de type SOR, la Figure 6.13 présente l'évolution du nombre d'itérations moyenné sur le pas nécessaire à chacune des méthodes testées en fonction du pas de chargement. On remarque une très faible influence de la présence de frottement si ce n'est qu'une légère stabilisation du système linéarisé pour ce qui est de la méthode Bi-CGSTAB. De plus, on constate que la méthode de GMRES est beaucoup plus sensible à l'augmentation de l'intensité de l'enfoncement que les deux autres méthodes et demande, par le fait même, un temps de résolution plus élevé.

Considérant l'utilisation d'une méthode de lagrangien augmenté, nous avons discuté au Chapitre 5 de l'intérêt de contrôler le taux de factorisation en phase d'augmentation lorsque le problème est résolu par une méthode directe (LU). En effet, les Figures 6.14(a) et 6.14(b) présentent respectivement la progression de la précision en fonction du temps CPU et du nombre d'itérations nécessaire au schéma de résolution de Newton-Raphson. On remarque que



(a) Maillage des blocs et conditions aux limites

(b) Définition des interfaces de contact

Figure 6.12 – Blocs en compression: maillage, conditions aux limites et interface de contact

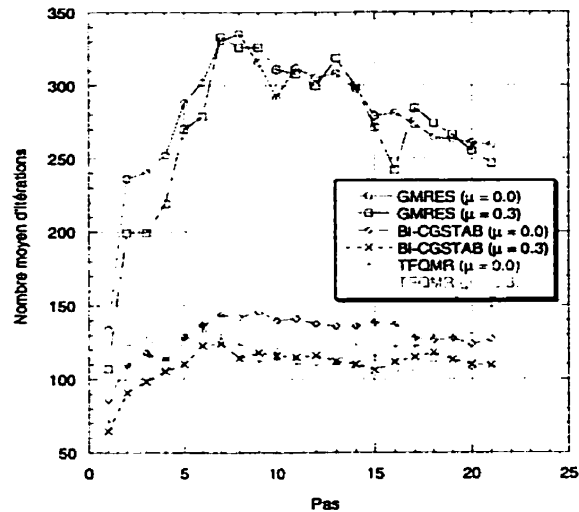


Figure 6.13 – Blocs en compression: résolution à l'aide de méthodes itératives

l'effort de calcul en présence de factorisation en phase d'augmentation est démesuré comparé au cas sans factorisation. Pour quatre augmentations des multiplicateurs de Lagrange, cas habituellement suffisant pour l'obtention d'une solution acceptable, le temps CPU pour le cas avec factorisation est augmenté par un facteur 3.5. En contrepartie, et tel que montré à la Figure 6.14(b), le nombre d'itérations nécessaire est très peu influencé par le fait de factoriser ou non en phase d'augmentation. Cette situation, qui est généralement respectée est basée sur le fait que les statuts de contact et de frottement devraient normalement rester constants en phase d'augmentation. Cependant, il est préférable de conserver une certaine latitude au niveau de la possibilité de factoriser de façon sélective en phase d'augmentation lorsque le nombre d'itérations, pour une même phase devient trop important. Au niveau des résultats obtenus, les Figures 6.15(a) et 6.15(b) montrent l'amélioration de la précision selon le nombre d'augmentations effectuées. Considérant le trajet A défini à la Figure 6.12(b), on constate, autant pour la pression nominale que le module de la contrainte nominale de cisaillement, une très piètre qualité dans le cas d'une simple régularisation par pénalisation. En contrepartie, on observe une amélioration significative de la qualité et ce, dès les deux premières augmentations. On remarque également que le contrainte nominale de cisaillement est plus difficile à converger que la pression nominale et ce, en raison de la nature complexe de l'évolution du frottement à l'interface.

Fait intéressant, la Figure 6.16 présente la décomposition de la pression nominale selon les composantes X, Y et Z. On remarque que cette situation est rendue possible en raison de l'évaluation, par le modèle de contact, des conditions de contact et de frottement sur la configuration déformée. Dans ce contexte, on remarque une correspondance parfaite entre

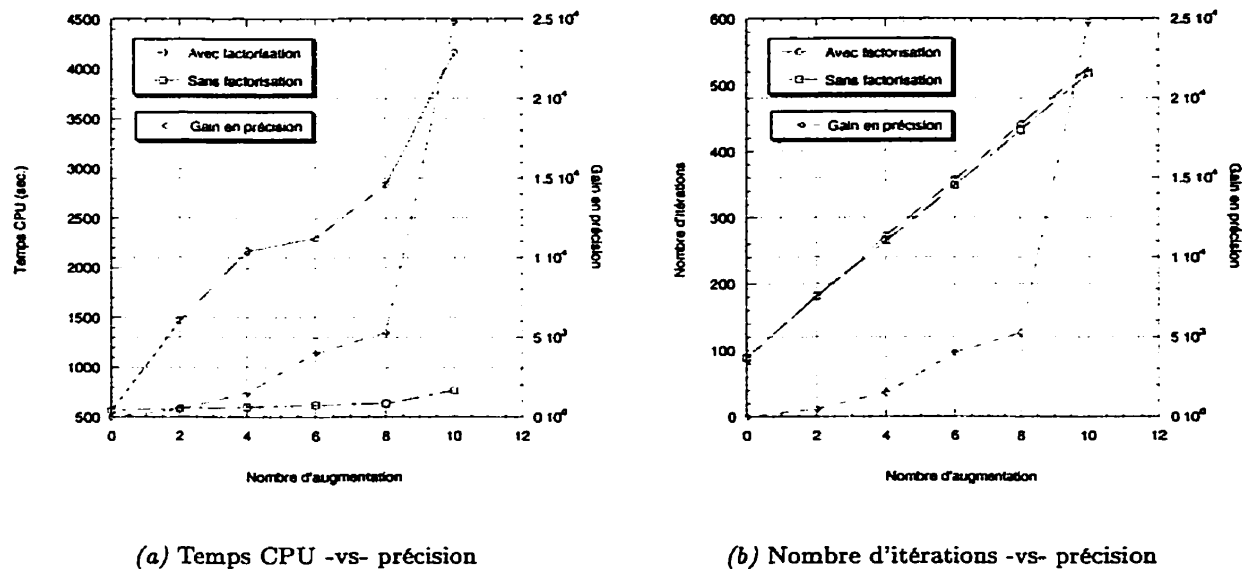
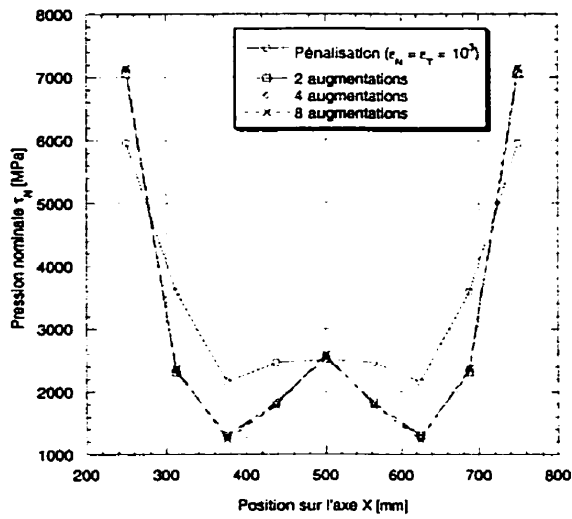


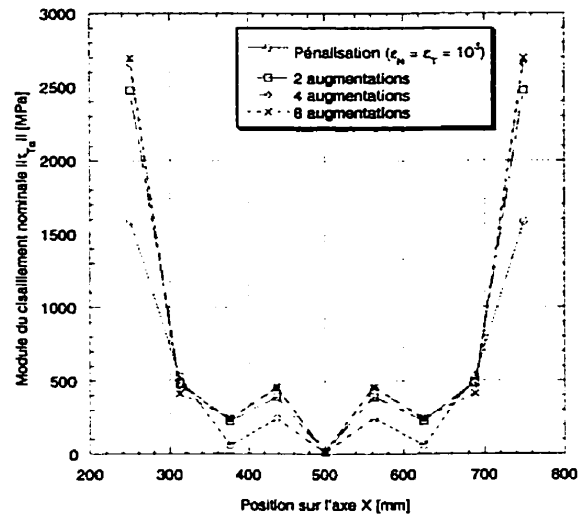
Figure 6.14 – Blocs en compression: influence du taux de factorisation en présence d'une méthode de lagrangien augmenté

les composantes selon X et Z ainsi qu'une prédominance évidente de la composante Y. Un examen des Figures 6.16(a) et 6.16(c) montre l'effet de confinement de la périphérie du bloc supérieur dans le bloc inférieur ainsi que de fortes pressions au niveau des coins, telles que présentées à la Figure 6.16(a). Conséquent à cette situation, la Figure 6.17 montre une représentation qualitative des statuts de contact agissant à l'interface. Considérant 0, 1 et 2 comme étant respectivement des conditions de non contact, contact collant et contact glissant, on remarque que le bloc supérieur est totalement en contact mais présente d'importantes zones de glissement selon les premier et troisième tiers des diagonales ainsi que des zones propices au décollement au voisinage du centre ainsi qu'au milieu des côtés occasionnée par un soulèvement potentiel dû au confinement dans le plan XZ.

La dernière partie de cet exemple concerne la validation de la loi de contact avec frottement spécialisé au cas de l'interface toron-mors d'ancrage. En particulier, on désire vérifier le comportement de la loi lors de la mise en contact des deux blocs. On rappelle brièvement que cette loi de comportement doit permettre une représentation hyperbolique de l'évolution de la pression nominale, une direction tangentielle sans glissement possible et une dernière direction permettant le glissement selon la loi de Coulomb. Pour ce faire, nous avons choisi les axes X et Z comme étant respectivement les directions avec et sans glissement. La loi de Coulomb est régularisée à l'aide d'une pénalisation de 10^4 avec un coefficient de frottement $\mu = 0.3$. Quant à la direction sans glissement, la pénalisation est fixée à 10^{10} . Simulant un écart initial $g_0 = 10$ mm, la Figure 6.18 montre l'évolution de la pression nominale au point A (voir Figure 6.12(b)) en fonction de la valeur du coefficient η . On remarque que plus le



(a) Direction normale



(b) Direction tangentielle

Figure 6.15 – Blocs en compression: qualité de la solution sur le trajet A selon le nombre d'augmentations

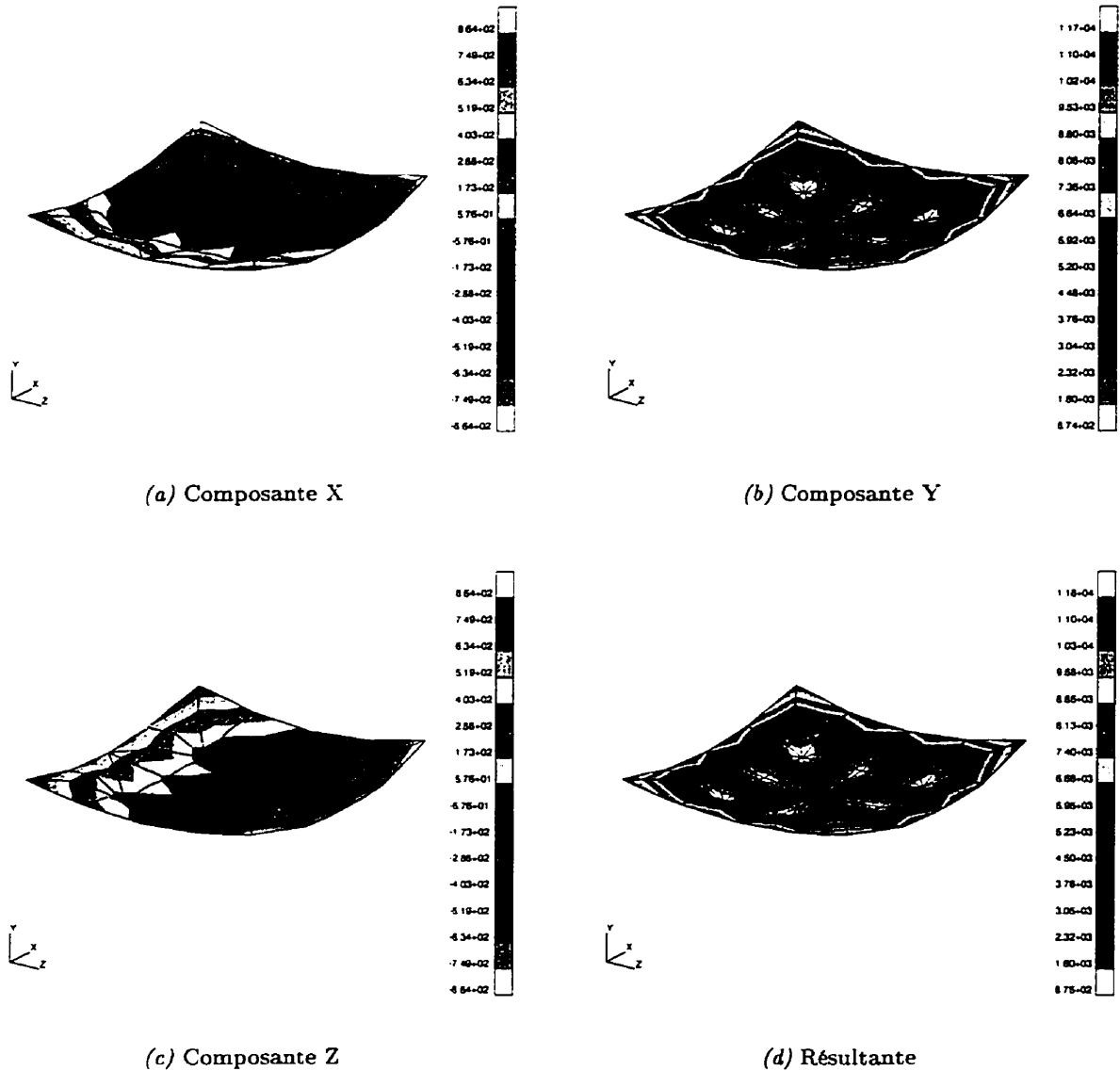


Figure 6.16 – Blocs en compression: composantes de la pression nominale à l'interface de contact à charge maximale

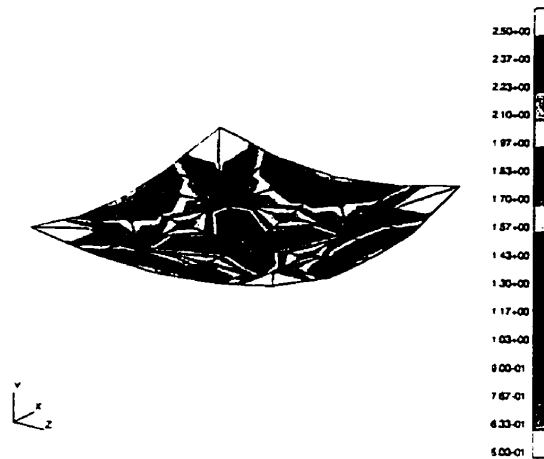


Figure 6.17 – Blocs en compression: statuts de contact à l'interface (charge maximale)

coefficient est petit, plus la pression nominale tend rapidement vers l'infini au voisinage de la frontière maître. Pour ce qui est du comportement dans le plan tangent, la Figure 6.19(a) montre effectivement un déplacement relatif des deux frontières dans la direction X , plus important près des limites de la frontière esclave. Quant à la direction tangentielle Z , la Figure 6.19(b) ne présente aucun déplacement relatif significatif au niveau de l'interface.

6.5 Glissement d'un bloc sur une plaque

Ce problème a comme principal objectif de vérifier l'aptitude du modèle à prendre en compte les grands déplacements relatifs ainsi que le respect de la loi de frottement durant une séquence de glissement. Pour ce faire, et tel que montré à la Figure 6.20, considérons le cas d'un bloc déformable reposant sur une plaque mince, elle aussi déformable, et soumis à un déplacement horizontal après avoir été préalablement comprimé contre la plaque par l'entremise d'un chargement perpendiculaire au plan de la plaque. La Figure 6.21 présente le maillage ainsi que les conditions aux limites appropriées. En particulier, on remarque que la plaque est encastree à sa base et que le bloc est retenu dans la direction Y afin d'éliminer tout déplacement de corps rigide dans cette même direction. Pour ce qui est de la direction X , on admet que les déplacements de corps rigides seront empêchés par les efforts de frottement à l'interface bloc-plaque. La plaque et le bloc sont discrétisés respectivement d'éléments hexaédriques à huit nœuds et prismatiques à six nœuds. Selon l'orientation des prismes, l'interface de contact, qui est constituée de la surface inférieure du bloc et de la totalité de la surface supérieure de la plaque, est entièrement discrétisée à l'aide d'éléments quadrangles à quatre nœuds. Le Tableau 6.5 présente quelques informations concernant la densité de maillage ainsi que le nombre d'équations à résoudre. Les deux pièces sont constituées d'un matériau élasto-

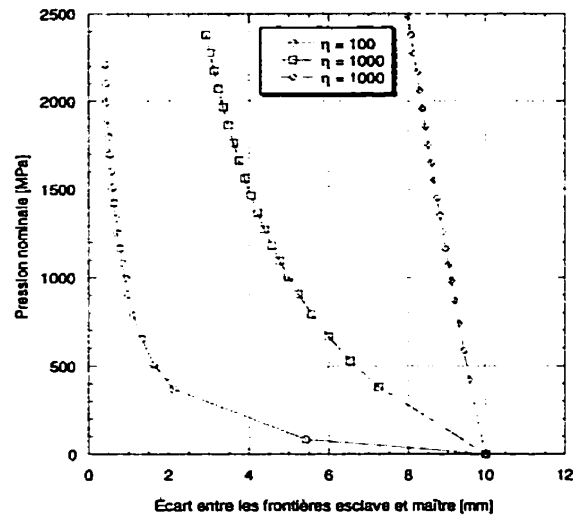


Figure 6.18 – *Blocs en compression: validation de la loi de comportement spécialisée dans la direction normale*

plastique avec écrouissage isotrope dont les caractéristiques mécaniques sont:

- Module de Young: $E = 200000$ MPa
- Coefficient de Poisson: $\nu = 0.30$
- Limite d'élasticité: $\sigma_e = 200$ MPa
- Module d'écrouissage: $H = 50000$ MPa

jumelée à l'utilisation d'une dérivée objective de Green-Naghdi. Pour ce qui est de l'interface de contact, on considère une loi de frottement de Coulomb avec $\mu = 0.3$.

Tableau 6.5 – *Glissement d'un bloc sur une plaque: quelques informations sur la densité de maillage*

Nombre d'éléments solides (H8,P6)	368
Nombre d'éléments de surface (Q4)	136
Nombre d'interface de contact	1
Nombre d'éléments de contact	16
Nombre de nœuds	566
Nombre d'équations à résoudre	1232

Quant à la résolution, elle est effectuée à l'aide de la méthode de Newton-Raphson utilisant diverses combinaisons de méthodes de pilotage permettant ainsi un contrôle aisé de l'évolution du problème autant dans les zones stables (pré- et post-critique) qu'au voisinage du point

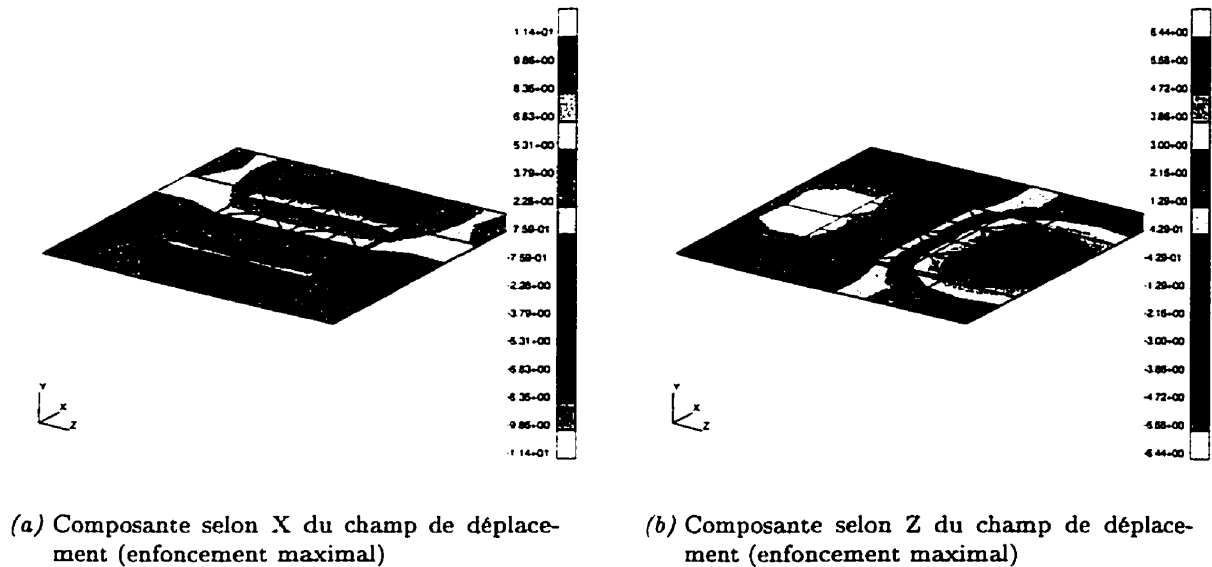


Figure 6.19 – *Blocs en compression: validation de la loi de comportement spécialisée dans le plan tangent*

critique correspondant au début du glissement du bloc. L'interface de contact est résolue en considérant des pénalités normale et tangente de l'ordre de 10^5 et 10^3 respectivement. L'intégration numérique utilisée pour les hexaèdres et les prismes sont respectivement des schémas de Gauss à 27 points ($3 \cdot 3 \cdot 3$) et de Hammer-Gauss à 9 points ($3 \cdot 3$). Pour ce qui est des interfaces de contact on utilise un schéma de Gauss à neuf points ($3 \cdot 3$).

Le bloc est initialement soumis à un chargement vertical correspondant à une pression uniforme de 200 MPa appliquée sur sa partie supérieure, telle que montrée à la Figure 6.21. Il importe de noter qu'une pénétration résiduelle de l'ordre de 10^{-8} est induite au niveau de l'interface afin de stabiliser la résolution au cours du premier pas. Tout en maintenant ce premier chargement, le bloc est ensuite soumis à une poussée horizontale menant celui-ci au glissement. Afin de permettre le passage de la zone critique (amorce du glissement), le pilotage est effectué comme suit:

1. Le chargement vertical est appliqué en un seul pas utilisant un pilotage en chargement imposé. Considérant les dimensions de la surface supérieure du bloc, la force verticale résultante est de 10 kN ($5 \cdot 10 \cdot 200$). Dès lors, la loi de Coulomb permet d'anticiper sur la force horizontale critique qui est de 3 kN ($\mu \cdot 10$). Selon les dimensions de la surface latérale du bloc (plan YZ), et considérant une pression unitaire, le paramètre de charge correspondant est de 200 ($3000/(3 \cdot 5 \cdot 1)$);
2. Le chargement horizontal est alors augmenté au voisinage du point critique (190) en cinq pas de 38 MPa en utilisant un pilotage en chargement imposé;

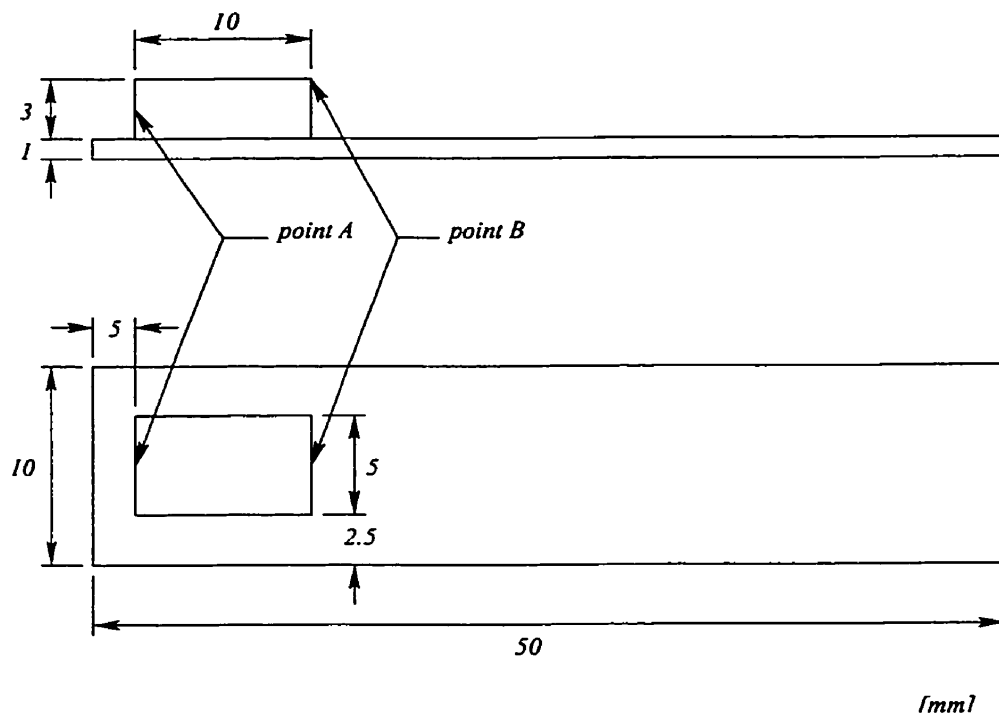


Figure 6.20 – Glissement d'un bloc sur une plaque: caractéristiques géométriques

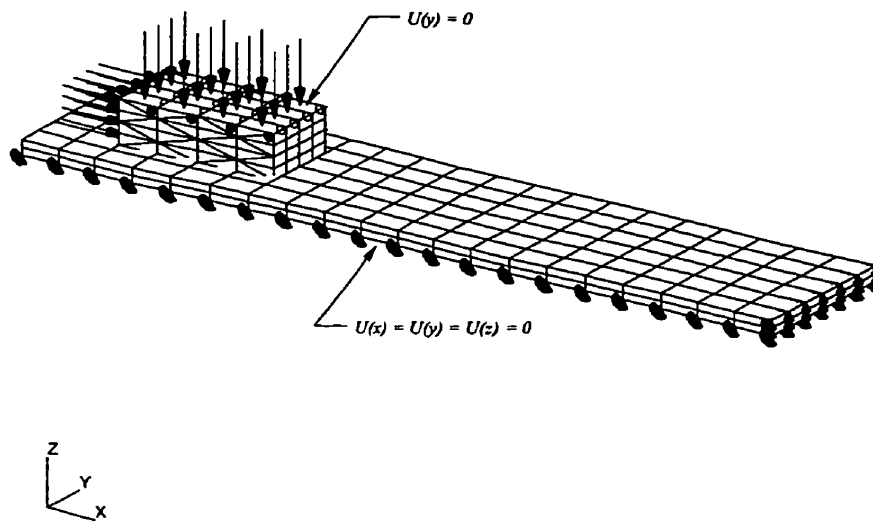
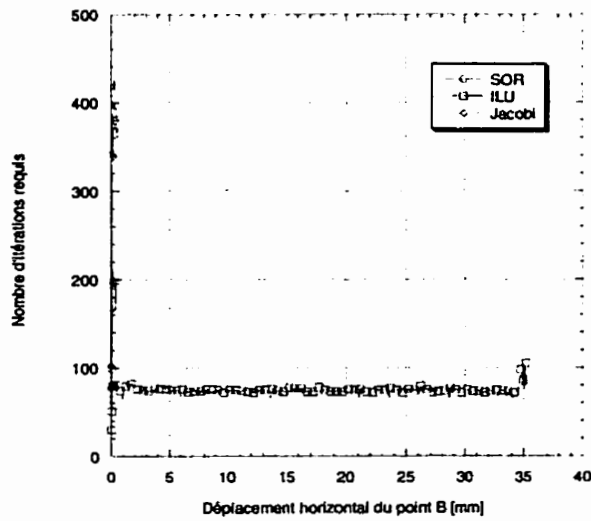


Figure 6.21 – Glissement d'un bloc sur une plaque: maillages et conditions aux limites

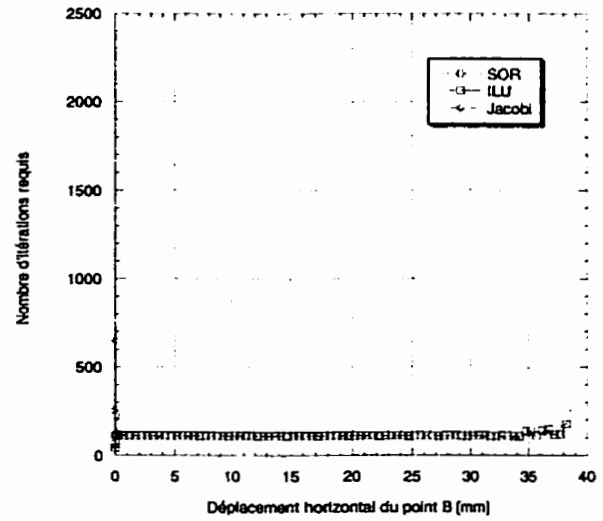
3. Le premier glissement est amorcé en considérant 10 pas utilisant une méthode de longueur d'arc appliquée sur un déplacement initial du point A (voir Figure 6.20) de 0.01 mm;
4. Le glissement entretenu en effectuant un pilotage en déplacement du point A de 0.1 mm jusqu'à divergence du schéma de Newton-Raphson.

Tel que proposée, la résolution du problème mène directement à une instabilité lors du passage au glissement. Cette situation est exclusivement provoquée par l'absence de conditions aux limites dans les direction X et Z. D'un point de vue numérique, et tel qu'exposé en détail au début du Chapitre 5, on anticipe que le système à résoudre sera stabilisé par les efforts de contact et de frottement à l'interface. Dès lors, malgré sa petite taille, il s'agit là d'un problème fortement non linéaire permettant de vérifier la robustesse des méthodes itératives à l'étude. La Figure 6.22 illustre le comportement de ces trois méthodes jumelées aux trois préconditionneurs préalablement définis au début de ce chapitre. Cette fois, on constate que les trois méthodes se comportent de façon passablement similaire, exception faite que seul le préconditionneur de type ILU permet l'obtention d'une solution complète. On rappelle que ce même préconditionneur n'avait pas permis l'obtention de solution pour le problème de la poutre courte en grandes transformations. La Figure 6.23 présente le détail de la Figure 6.22 au voisinage du point critique. On constate que le préconditionneur semble bien se comporter au cours des premiers pas de chargement mais devient totalement inapte avec l'augmentation de l'intensité des déplacements relatifs. On constate également une grande stabilité de la solution tout au long de la phase de glissement. En fin de course, la diminution de la surface de contact utile mène à un réajustement des efforts de contact et de frottement et provoquant, par le fait même, une légère modification du nombre d'itérations nécessaires à la résolution du système linéarisé.

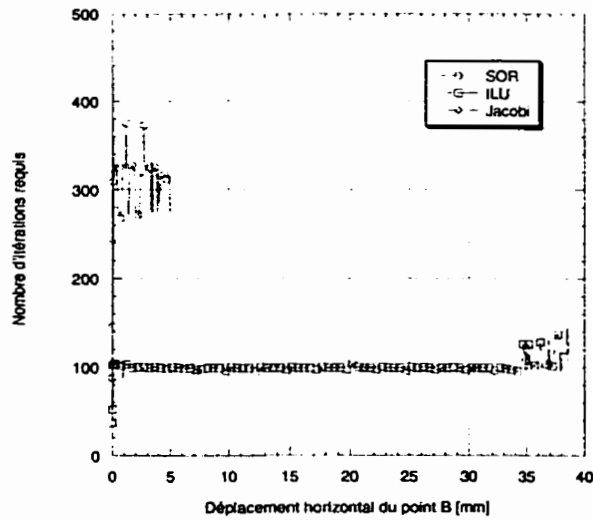
Conséquent à l'obtention de la solution, la Figure 6.24 présente l'évolution des réactions horizontale et verticale en fonction du déplacement du point B (voir Figure 6.20). En particulier, on constate sur la Figure 6.24(a) qu'une fois appliqué, le chargement vertical est transmis totalement à la base de la plaque tout au long du glissement. Dans la direction horizontale, la Figure 6.24(b) montre une augmentation régulière de la charge horizontale en début de chargement jusqu'à l'obtention du chargement critique qui correspond effectivement à la valeur anticipée. Par la suite, la réaction demeure constante jusqu'à ce que se produise une diminution de la surface de contact. À ce moment, le débalancement du bloc, produit par son arrivé en bout de plaque, génère un effet de levier et donc, de la pression normale. Cette situation telle qu'illustrée à la Figure 6.25, a pour effet de nécessiter un réajustement de l'effort horizontal due à la loi de Coulomb. Finalement, la Figures 6.26 présente l'évolution de la contrainte de von Mises en fonction de la position du bloc. On y remarque, entre autres, une légère plastification ainsi qu'une carte passablement constante de la contrainte de von Mises tout au long du glissement. En fin de course, le débalancement tend à produire un poinçonnement sur le bord de la plaque d'où l'augmentation substantielle de la contrainte.



(a) Méthode Bi-CGSTAB

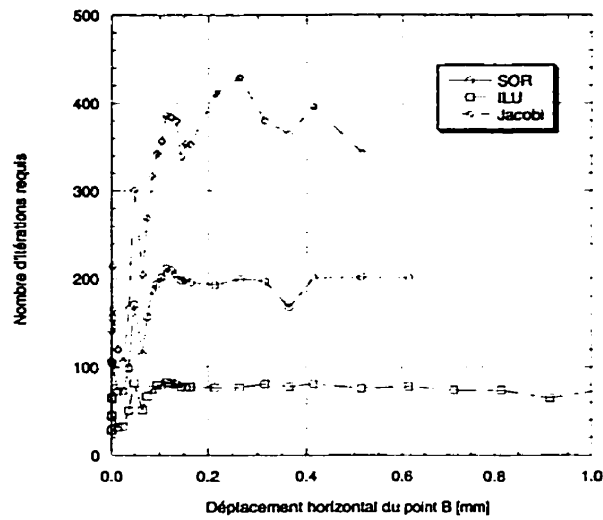


(b) Méthode GMRES

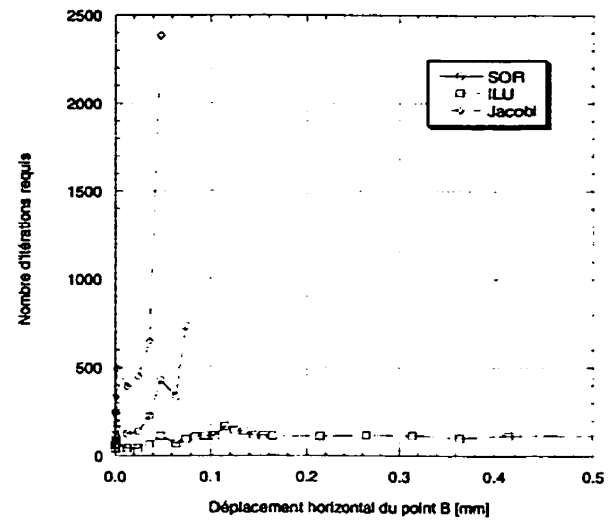


(c) Méthode TFQMR

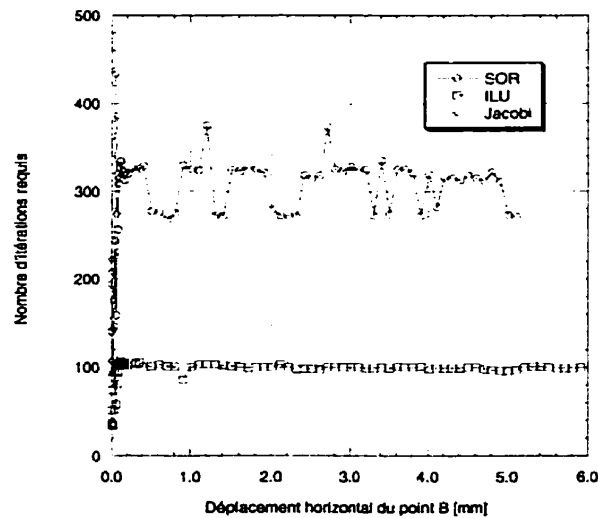
Figure 6.22 – Glissement d'un bloc sur une plaque: comportement des solveurs itératifs



(a) Méthode Bi-CGSTAB

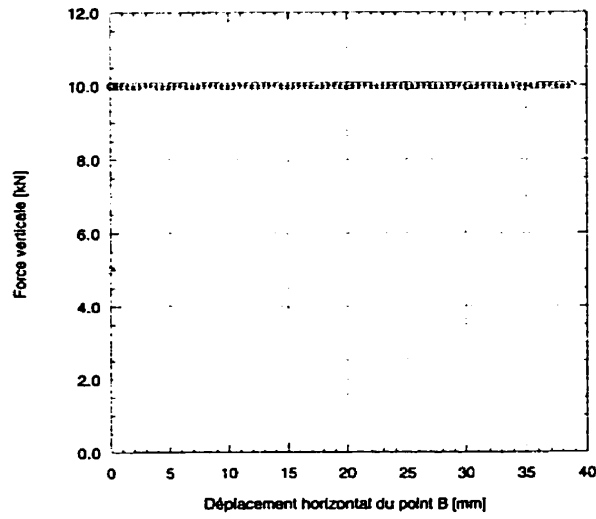


(b) Méthode GMRES

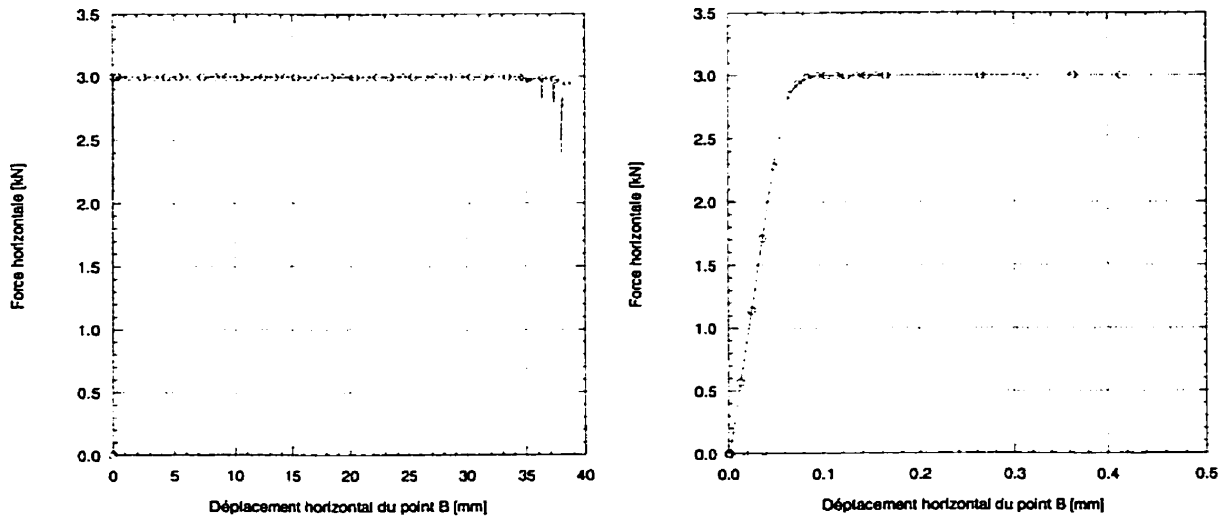


(c) Méthode TFQMR

Figure 6.23 – Glissement d'un bloc sur une plaque: comportement des solveurs itératifs (au voisinage du point critique)



(a) Réaction verticale



(b) Réaction horizontale

Figure 6.24 – Glissement d'un bloc sur une plaque: réactions d'appuis en fonction du déplacement horizontal au point B

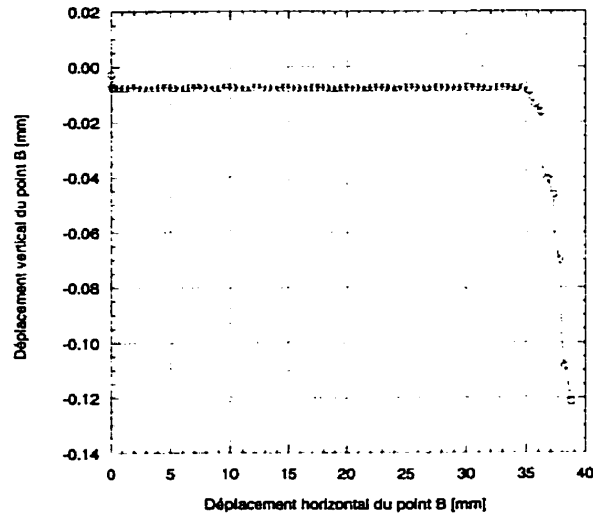


Figure 6.25 – *Glissement d'un bloc sur une plaque: déplacement vertical en fonction du déplacement horizontal au point B*

6.6 Formage d'une tôle mince

Comme dernier problème, on propose de vérifier le comportement du modèle de contact avec frottement dans un contexte de grandes transformations faisant intervenir plus d'une interface de contact ainsi qu'une progression importante de l'étendue des zones de contact. Pour ce faire, considérons le cas du formage d'une tôle mince circulaire, reposant sur une matrice rigide et sollicitée par l'entremise d'un outil hémisphérique situé au dessus de la tôle, lui-même mobilisé par un mécanisme quelconque. Tel que montrée sur la représentation axisymétrique de la Figure 6.27, on remarque que la tôle est retenue sur sa périphérie à l'aide d'un serre-flanc et n'est donc libre de se déformer qu'à partir de la limite intérieure de ce dernier.

Dans le but de traiter ce problème dans un contexte tridimensionnel, et compte-tenu de la symétrie de révolution présentée à la Figure 6.27, on propose de considérer une portion de 90° . La Figure 6.28 montre le maillage, les conditions aux limites ainsi que les interfaces de contact. Comme on peut le constater, l'indéformabilité de l'outil et de la matrice permettent de simplifier leur discrétisation géométrique à celle des éléments de recouvrement, nécessaires à la définition des frontières candidates au contact. La tôle est discrétisée à l'aide d'éléments hexaédriques à huit nœuds et les frontières candidates au contact, d'éléments quadrangles à 4 nœuds. Selon la définition même du problème, il importe de prendre en compte deux interfaces de contact. La première interface est définie par les frontières appartenant respectivement à l'outil et à la surface supérieure de la tôle tandis que la seconde est constituée de la surface inférieure de la tôle et celle de la matrice. Le Tableau 6.6 présente quelques informations concernant la densité de maillage ainsi que le nombre d'équations à résoudre. La tôle est

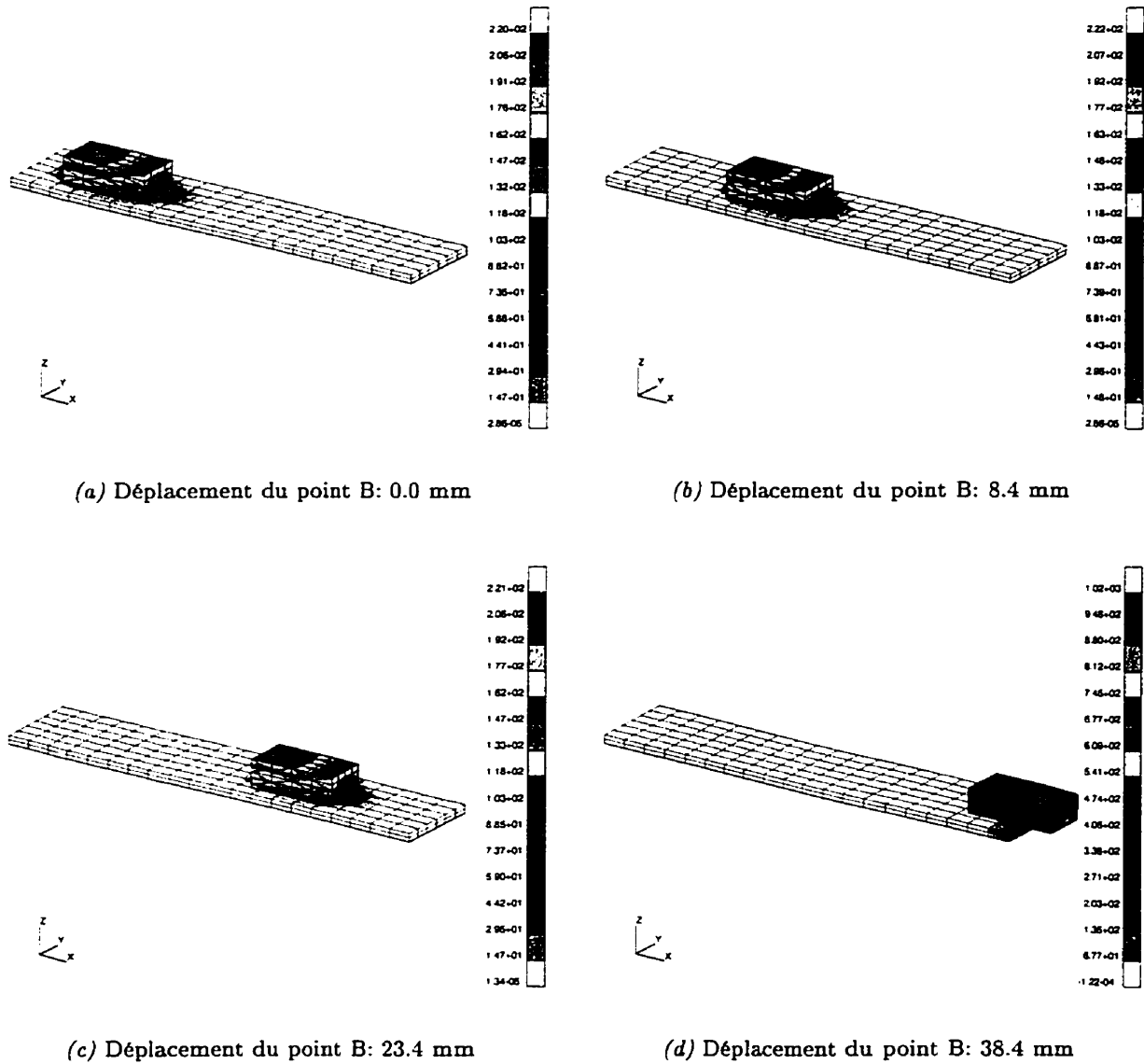


Figure 6.26 – Glissement d'un bloc sur une plaque: évolution de la contrainte de von Mises selon la position du bloc

constituée d'un matériau élastoplastique avec écrouissage isotrope dont les caractéristiques mécaniques:

- Module de Young: $E = 69000$ MPa
- Coefficient de Poisson: $\nu = 0.30$
- Limite d'élasticité: $\sigma_e = 589 (10^{-4} + \varepsilon_{ps})^{0.216}$

jumelée à l'utilisation d'une dérivée objective de Green-Naghdi. Pour ce qui est des interfaces de contact, on considère, selon l'analyse effectuée, une loi de frottement de Coulomb sans frottement ($\mu = 0.0$) et avec frottement ($\mu = 0.15$, $\mu = 0.30$).

Tableau 6.6 – *Formage d'une tôle mince: quelques informations sur la densité de maillage*

Nombre d'éléments solides (H8)	1410
Nombre d'éléments de surface (Q4)	2270
Nombre d'interface de contact	2
Nombre d'éléments de contact	interface #1: 500, interface #2: 675
Nombre de nœuds	3231
Nombre d'équations à résoudre	6050

Quant à la résolution du problème, elle est effectuée à l'aide de la méthode de Newton-Raphson avec pilotage du déplacement contrôlé \bar{u} (voir Figure 6.28) jusqu'à l'obtention d'un enfoncement maximal de l'outil de l'ordre de 30 mm. Les interfaces de contact sont résolues en considérant des pénalités normale et tangente de l'ordre de 10^4 , jumelées à une méthode de lagrangien augmentée (quatre augmentations). L'intégration numérique utilisée pour les hexaèdres est un schéma de Gauss à 27 points ($3 \cdot 3 \cdot 3$). Pour ce qui est des interfaces de contact on utilise un schéma de Newton-Cotes à quatre points ($2 \cdot 2$). Dans le contexte actuel, où la surface de l'outil est sphérique, l'utilisation d'un tel schémas permet la détection rapide de la première mise en contact au niveau des nœuds de l'outil. Le problème est résolu en 50 pas de chargement, permettant ainsi la mise en forme de la tôle.

Le problème que nous envisageons de résoudre fait partie intégrante d'une série de cas tests largement utilisée dans le processus de validation des modèles numériques. En particulier, Saleeb *et al.* (1994) présente certains résultats numériques en considérant une discrétisation axisymétrique du dit problème. Avant même de présenter les résultats obtenus, le Tableau 6.7 montre un exemple typique de convergence rencontrée lors de la résolution numérique. En particulier, on remarque une première série de cinq itérations menant ainsi à la convergence du problème de contact sans aucune contribution des multiplicateurs de Lagrange. À ce stade, les pénétrations et glissements réversibles correspondent donc à la solution obtenue par pénalisation. Par la suite s'enclenchent les quatre augmentations et pour lesquelles un minimum de deux itérations du schéma de Newton-Raphson sont exigées. Il importe de noter que l'ensemble des itérations inhérentes aux augmentations des multiplicateurs sont effectuées à l'aide de la matrice tangente évaluée à l'itération 5 et ne nécessite, par le fait même, qu'un faible effort de calcul. On constate également une convergence quadratique obtenue essentiellement

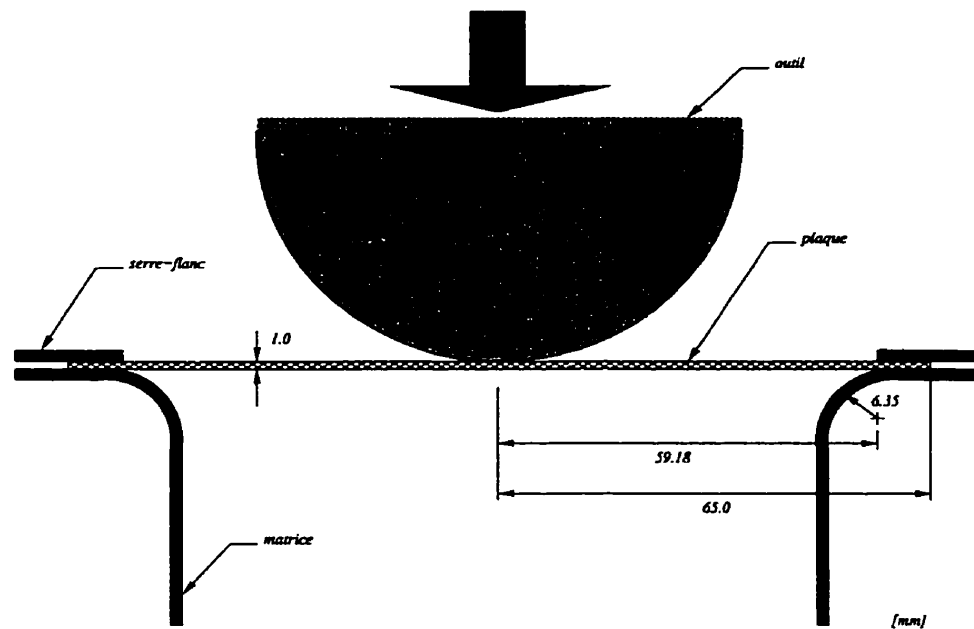


Figure 6.27 – Formage d'une tôle mince: caractéristiques géométriques du procédé

par l'imposition des conditions de contact au cours des augmentations. Seules les intensités des efforts aux interfaces peuvent varier et non les statuts de contact et de frottement.

Dans le but de vérifier l'aptitude du modèle à résoudre ce type de problème, la Figure 6.29 présente l'effort nécessaire à l'enfoncement de la sphère en fonction du coefficient de frottement. On constate aisément que le coefficient de frottement n'a que très peu d'influence sur l'énergie de déformation et ce, jusqu'à un enfoncement d'environ 20 mm. Au delà de ce niveau, l'effet du frottement commence à se faire sentir de façon beaucoup plus considérable. En fin de course (enfoncement de 30 mm), on constate que l'utilisation d'un coefficient de frottement de 0.3 nécessite une augmentation de l'effort nécessaire de l'ordre de 20%. Dans le même ordre d'idées, la Figure 6.30(a) montre l'influence du coefficient de frottement sur la distribution de la déformation radiale à la fibre supérieure et ce, pour un enfoncement de l'ordre de 20 mm. On remarque qu'au voisinage de la portion centrale de la tôle, la déformation radiale est grandement influencée par la valeur du coefficient de frottement qui tend à relaxer considérablement cette dernière. Cependant, on constate une inversion de cet effet bénéfique à partir d'une distance correspondant au quart du rayon de la tôle pour finalement devenir négligeable au voisinage du pic localisé près du serre-flanc. Ce niveau de déformation au voisinage du serre-flanc indique clairement la nécessité d'un raffinement du maillage afin de permettre une meilleure représentation du champ de déformation. Dans l'ensemble, on remarque que les résultats obtenus et tels que présentés aux Figures 6.29 et 6.30 sont tout à fait comparables à ceux obtenus par Saleeb *et al.* (1994). Quant à la distribution de la déformation radiale présentée à la Figure 6.30(b), les écarts sont probablement dues à l'utilisation d'une mesure de déformation différente de celle utilisée dans le cadre de cette thèse ainsi qu'à

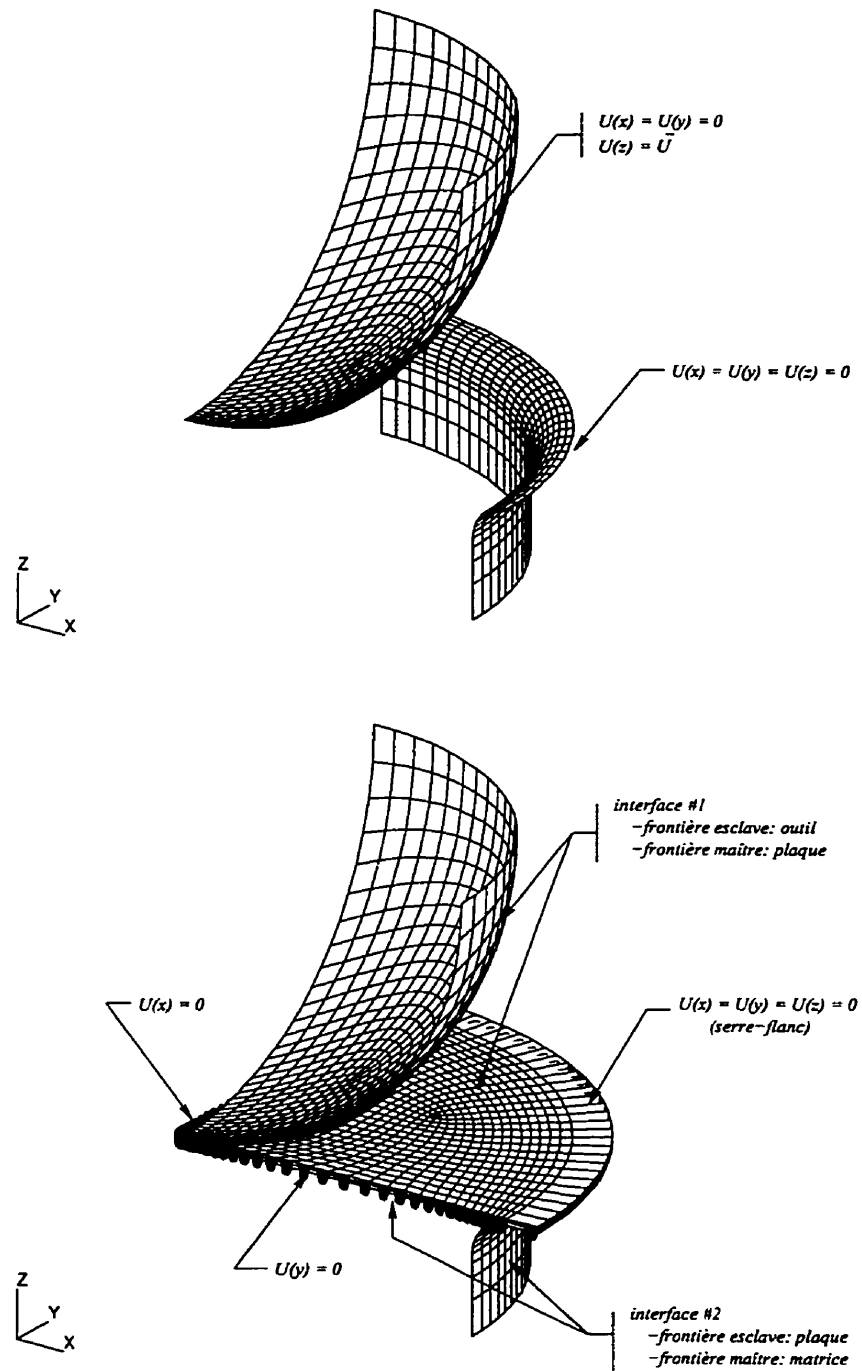


Figure 6.28 – Formage d'une tôle mince: maillages, conditions aux limites et interfaces de contact

la différence entre la densité des maillages utilisés pour la matrice rigide et l'outil.

Tableau 6.7 – *Formage d'une tôle mince: convergence typique pour un pas de chargement*

Itération	Déplacement (5.3a)	Résidu (5.3b)
1	1.00000E+00	3.85502E+00
2	3.37220E-01	3.75201E-02
3	2.30038E-02	2.95745E-02
4	1.76809E-03	1.55127E-03
5	5.89188E-04	4.57137E-04
Pénétration: interface #1: 0.00151237, interface #2: 0.000751213		
Glissement réversible: interface #1: 1.43103e-05, interface #2: 0.00010891		
Première augmentation		
6	4.28317E-03	5.63913E-03
7	2.62716E-04	4.65055E-04
Pénétration: interface #1: 0.000653001, interface #2: 0.000248323		
Glissement réversible: interface #1: 1.12134e-05, interface #2: 9.87133e-05		
Deuxième augmentation		
8	1.39967E-03	1.73759E-03
9	3.45721E-04	4.20531E-04
Pénétration: interface #1: 0.000580466, interface #2: 9.8907e-05		
Glissement réversible: interface #1: 7.62879e-06, interface #2: 6.60283e-05		
Troisième augmentation		
10	8.15926E-04	1.00391E-03
11	5.78585E-04	7.03783E-04
Pénétration: interface #1: 0.000529001, interface #2: 4.74329e-05		
Glissement réversible: interface #1: 5.15748e-06, interface #2: 3.9558e-05		
Quatrième augmentation		
12	8.09777E-04	1.02620E-03
13	1.07329E-03	1.31734E-03
14	1.10267E-03	1.34890E-03
15	4.41616E-04	1.43372E-03
Pénétration: interface #1: 0.000621092, interface #2: 2.6126e-05		
Glissement réversible: interface #1: 4.07995e-06, interface #2: 2.57603e-05		

Finalement, les Figures 6.31(a), 6.31(b) et 6.31(c) montrent l'influence du frottement sur l'étendu ainsi que sur l'intensité de la déformation plastique équivalente en fin de course (enfoncement de 30 mm). On constate aisément que la tôle subit de grandes transformations correspondant à un niveau de déformation maximale de l'ordre de 45% pour le cas sans frottement ($\mu = 0.0$) jusqu'à une valeur de l'ordre de 32% pour le cas avec $\mu = 0.3$. On remarque également que contrairement au cas sans frottement ($\mu = 0.0$), où le niveau de déformation décroît du centre de la tôle vers le serre-flanc, les cas avec frottement présentent une zone de déformation maximale localisée approximativement au quart du rayon de la tôle.

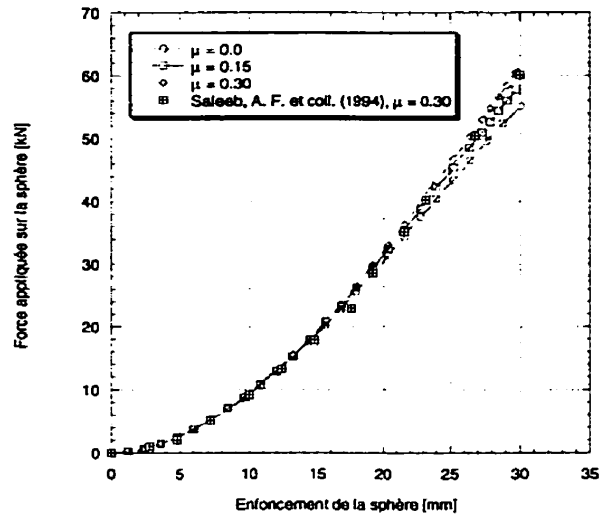
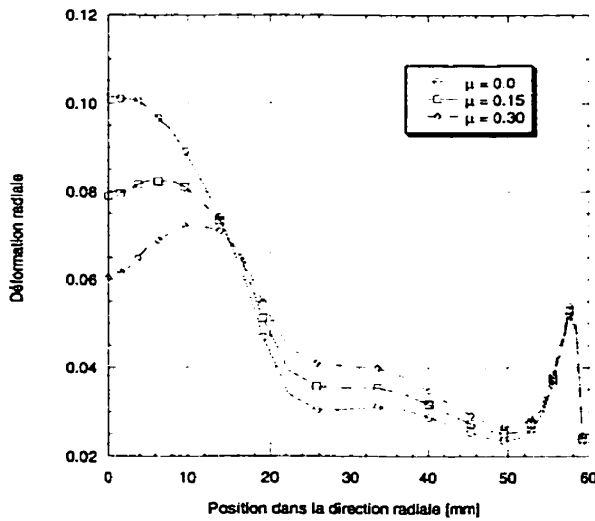
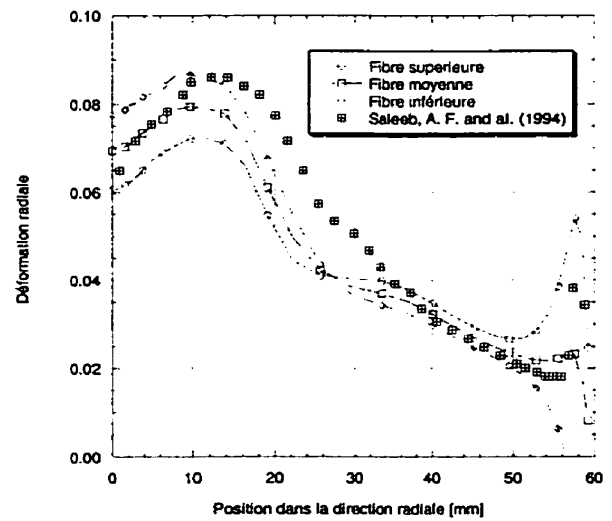


Figure 6.29 – Formage d’une tôle mince: force appliquée sur la sphère en fonction de son enfoncement



(a) Influence du coefficient de frottement (fibre supérieure)



(b) Comparaison des résultats ($\mu = 0.30$)

Figure 6.30 – Formage d’une tôle mince: distribution de la déformation radiale selon la direction radiale (enfoncement = 20 mm)

La position de cette concentration correspond évidemment à l'endroit où la contribution du frottement est maximale (aire tribulaire maximale avant la perte de contact). Fait intéressant, on peut remarquer sur ces mêmes figures, et en particulier, sur celles avec coefficients de frottement non nuls, la présence d'une certaine dissymétrie selon la direction circonférentielle. En effet, compte-tenu de la portion considérée (90°), la discrétisation de la sphère (voir Figure 6.28) mène directement à l'apparition d'une sollicitation ne respectant pas exactement les conditions d'axisymétrie. Cette situation provoque donc l'apparition d'une légère flexion autour de l'axe radial et par le fait même, une augmentation de l'intensité de la plastification le long de l'axe radial au voisinage du huitième de la circonférence (45°). Il importe de noter que cette situation peut être partiellement corrigée en augmentant la densité de maillage dans la direction cinconférentielle ou encore, en diminuant la portion considérée.

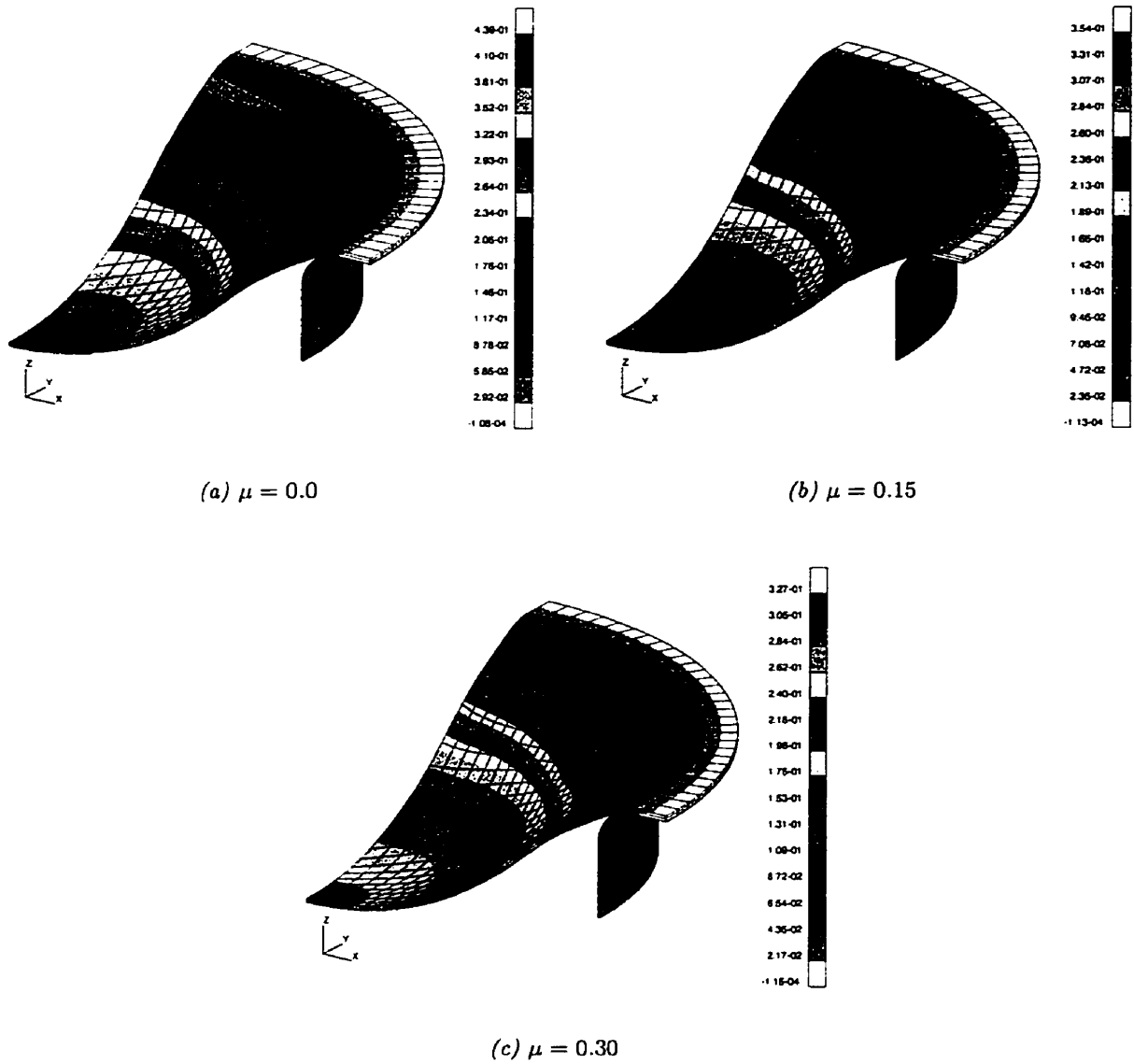


Figure 6.31 – Formage d’une tôle mince: déformation plastique équivalente (enfouissement = 30 mm)

Chapitre 7

Étude des dispositifs d'ancrage multitorons

7.1 Généralités

Ce chapitre a comme principal objectif l'étude du comportement déformationnel de différents dispositifs d'ancrage multitorons par la méthode des éléments finis. L'approche utilisée permet, entre autres, de considérer les grandes transformations susceptibles de se produire dans les diverses composantes des dispositifs. On entend ici, par grandes transformations, l'intensité des déformations ainsi que des déplacements relatifs aux diverses interfaces de contact.

L'intérêt d'une telle étude fait suite à un programme à la fois expérimental et numérique de recherche mené par Bastien (1992) sur l'étude du comportement des dispositifs d'ancrage mono- et multitorons. Pour ce qui est du volet expérimental, les essais effectués sur les dispositifs d'ancrage multitorons de type LH19T15 du procédé LH de la société Spie-Batignolles (Spie-Batignolles, 1986), ont permis, en plus de recueillir de nombreuses données provenant de l'instrumentation (flèches, déformations, enfoncement des mors d'ancrage, etc.), d'observer la présence de déformations permanentes dans le bloc d'ancrage et en particulier, au voisinage des alvéoles coniques sans toutefois pouvoir les quantifier. Dans le même ordre d'idées, il a été démontré que l'utilisation de plots tronconiques ou de systèmes toron-mors d'ancrage n'avait que très peu d'influence sur le comportement déformationnel global du bloc d'ancrage et ce, malgré la différence importante entre l'enfoncement des plots et celui des systèmes toron-mors d'ancrages. En contrepartie, rien n'est mentionné quant aux effets locaux d'une telle variante, exception faite d'une modification permanente de la conicité des alvéoles situées dans la portion centrale du bloc d'ancrage. Quant au volet numérique de cette étude, les analyses par éléments finis ont permis de prédire la plage de comportement des dispositifs d'ancrage et de confirmer certaines observations obtenues expérimentalement. En particulier, il a été possible de confirmer la présence de grandes déformations élastoplastiques dans le bloc d'ancrage ainsi

que l'influence marquée de l'intensité du coefficient de frottement agissant à l'interface mors d'ancrage-alvéole conique sur le comportement déformationnel du dispositif. En contrepartie, il fut à toute fin pratique impossible d'obtenir des résultats numériques pour des coefficients de frottement intermédiaires ($0 < \mu < \infty$) et ce, en raison de la faible robustesse du modèle utilisé.

Plus récemment, une série d'analyses ont été effectuées par Odobasic (1998) sur le même dispositif ci-haut mentionné ainsi que sur un dispositif A19K15S du procédé K de la société Freyssinet (Freyssinet, 1988) et ce, afin de déterminer l'influence des non-linéarités matérielles (petites déformations élastoplastiques) sur la densité de maillage optimale à utiliser. Malgré le grand intérêt de l'ouvrage, l'auteur n'a utilisé qu'une représentation linéaire des champs de déplacement ainsi qu'une formulation du problème de contact en petits déplacements relatifs ne permettant pas une représentation adéquate de l'évolution des conditions de contact et de frottement à l'interface mors d'ancrage-alvéole conique.

Selon ces dernières constatations, nous proposons donc de diviser ce chapitre en deux parties. La première présente une étude comparative de trois dispositifs d'ancrage multitorons. Après une brève description des dispositifs, du mode de mise en charge ainsi que les détails propres aux analyses par éléments finis, on y présente l'ensemble des résultats permettant de vérifier et de comparer leur comportement sous chargement en service ainsi qu'à l'ultime des câbles de précontrainte.

Finalement, et compte-tenu des restrictions associées à l'utilisation de plots tronconiques, la seconde partie présente une étude paramétrique permettant la détermination du comportement global d'un système toron-mors d'ancrage à l'aide de la loi de comportement proposée au Chapitre 3. En particulier, le calage de la loi de comportement est effectué sur un dispositif d'ancrage monotoron de type LH1T15 du procédés LH de la société Spie-Batignolles (Spie-Batignolles, 1986) à l'aide d'une méthode par réseau neuromimétique et ce, en considérant les résultats expérimentaux obtenus de Michaud et Bastien (1996). On notera que cette approche permet une utilisation ultérieure du système toron-mors d'ancrage dans le cadre d'une analyse sur un dispositif d'ancrage multitorons complet.

7.2 Étude comparative de trois dispositifs d'ancrage

Cette section présente une étude comparative de trois dispositifs d'ancrage multitorons actuellement utilisés dans le domaine du génie civil pour la mise en précontrainte des ouvrages en béton¹. Pour ce faire, on propose de solliciter les dispositifs d'ancrage à l'aide de plots tronconiques (voir Figure 1.5) à un niveau de chargement correspondant à la limite ultime des câbles de précontrainte. Dès lors, il devient possible de vérifier le comportement de chacun des dispositifs en regard de l'utilisation des câbles usuels mais aussi, d'anticiper sur l'utilisation potentielle de ces mêmes dispositifs avec des câbles composés de torons à résistance améliorée.

1. Il importe de noter que l'effet du béton sur le comportement des dispositifs d'ancrage n'est pas pris en compte dans le cadre de cette étude.

La comparaison est essentiellement basée sur l'évaluation du comportement déformationnel des dispositifs d'ancrage. Plus spécifiquement, on propose de s'attarder à l'évolution ainsi qu'à l'intensité de certains paramètres caractéristiques du comportement du dispositif d'ancrage tels que:

- la flèche au voisinage du centre du bloc d'ancrage (perte de précontrainte);
- l'enfoncement du plot dans les alvéoles (perte de précontrainte);
- l'intensité ainsi que la distribution de la contrainte de von Mises;
- l'intensité ainsi que la distribution de la déformation plastique équivalente;
- l'intensité du volume plastifié.

7.2.1 Description des dispositifs

Les dispositifs d'ancrage étudiés dans le cadre de cette thèse sont les dispositifs LH19T15S du procédé LH de la société Spie-Batignolles (Spie-Batignolles, 1986), A19K15S du procédé K de la société Freyssinet (Freyssinet, 1988) et finalement, CS 6-31 du procédé CS de la société VSL (VSL, 2000). Il s'agit de dispositifs d'ancrage passablement différents et constitués tous trois d'un bloc d'ancrage, d'une plaque d'ancrage ainsi que d'un système de mors d'ancrage caractéristiques du procédé. Cette sous-section présente donc une brève description des caractéristiques géométriques et mécaniques des diverses composantes des dispositifs.

7.2.1.1 Propriétés géométriques

Précisons dès maintenant que les caractéristiques géométriques des dispositifs d'ancrage, telles que présentées dans les lignes qui suivent sont incomplètes et ne permettent, en aucun cas, une représentation complète des dispositifs. Les données fournies permettent cependant de faire ressortir les principales caractéristiques géométriques nécessaires à l'interprétation ainsi qu'à la comparaison des résultats obtenus.

Dispositifs LH19T15S

Le dispositif d'ancrage LH19T15S, qui s'identifie au procédé **LH**, permet la mise en tension d'un câble constitué de **19** Torons de classe **SUPER**, d'un diamètre de **15.7** mm. Tel que montré à la Figure 7.1, le bloc d'ancrage est de forme cylindrique et possède un diamètre de **220** mm ainsi qu'une épaisseur de **75** mm. Le bloc est constitué de **19** alvéoles ayant une portion conique d'un diamètre maximal de **34** mm défini sur une hauteur de **50** mm suivie d'une portion cylindrique de **20** mm sur une hauteur de **25** mm. La paroi inclinée fait donc un angle de **7.0 °** avec l'axe longitudinale du bloc d'ancrage. Ces dernières sont disposées selon trois cercles concentriques possédant chacun six alvéoles, la dernière étant située au centre.

Quant à la plaque d'ancrage, celle-ci est constituée d'une pièce carrée de **350** mm de côté et une épaisseur de **50** mm. Afin de permettre le passage du câble de précontrainte, un trou

d'un diamètre de 178 mm est percé en son centre. Le bloc d'ancrage repose sur la plaque et est en contact sur une surface passablement restreinte définissant une bande circulaire d'environ 20 mm (voir Figure 7.1).

Dispositifs A19K15S

Le dispositif d'ancrage A19K15S, identifié au procédé **K**, permet, tout comme le précédent, d'effectuer la mise en tension d'un câble constitué de **19** Torons de classe SUPER, d'un diamètre de 15.7 mm. La lettre **A** indique qu'il s'agit d'un ancrage actif². Tel que montré à la Figure 7.2, le bloc d'ancrage a la forme d'un cône tronqué dont la surface supérieure, de forme sphérique, possède un diamètre de 210 mm et une surface inférieure plane d'un diamètre de 210 mm. D'une épaisseur de 65 mm, le bloc est constitué de 19 alvéoles ayant une portion conique d'un diamètre maximal de 30 mm définie sur une hauteur de 45 mm suivie d'une portion cylindrique de 24 mm sur une hauteur de 25 mm. Encore une fois, la paroi inclinée des alvéoles fait un angle de 7.0° avec l'axe longitudinale du bloc d'ancrage. À l'exception de celle située au centre, les alvéoles, sont disposées selon deux cercles concentriques et inclinées selon l'axe longitudinale. Les alvéoles contenues sur le cercle extérieur sont inclinées d'un angle de 5.0° tandis que celles contenues sur le cercle intérieur le sont d'un angle de 1.25°.

Pour ce qui est de la plaque, cette dernière est formée d'une pièce rectangulaire de 370 mm par 330 mm et d'une épaisseur de 65 mm. Afin de permettre le passage du câble de précontrainte, un trou d'un diamètre de 175 mm est percé en son centre. Le bloc d'ancrage repose sur la plaque et est en contact sur une surface passablement restreinte définissant une bande circulaire d'environ 21 mm (voir Figure 7.2).

Dispositifs CS 6-31

En tout premier lieu, il importe de mentionner que l'étude du dispositif d'ancrage CS 6-31 a été effectuée dans le cadre d'un contrat de recherche entre la société VSL et l'Université Laval. Ce contexte d'étude implique, par le fait même, une certaine confidentialité en ce qui a trait aux caractéristiques géométriques, matérielles ainsi qu'aux résultats obtenus. Cependant, après consultation avec les gens concernés, il nous a été possible de présenter un minimum d'informations permettant de faire ressortir les principales caractéristiques géométriques du dispositif.

Contrairement aux deux autres dispositifs d'ancrage, le dispositif d'ancrage CS 6-31 a été conçu afin de permettre la mise en tension d'un câble constitué de **31** torons de classe SUPER, d'un diamètre de 15.7 mm. Tel que montré à la Figure 7.3, le bloc d'ancrage a la forme d'un pseudo-cylindre de forme hexagonale dont la surface supérieure possède un côté long de 260 mm, un côté court de 226 mm ainsi qu'une hauteur totale de 100 mm. La partie hexagonale se termine peu avant la zone d'appui et se noie dans un cylindre de 272 mm de diamètre. Une

2. L'ancrage actif est celui où la mise en tension des câbles est effectuée.

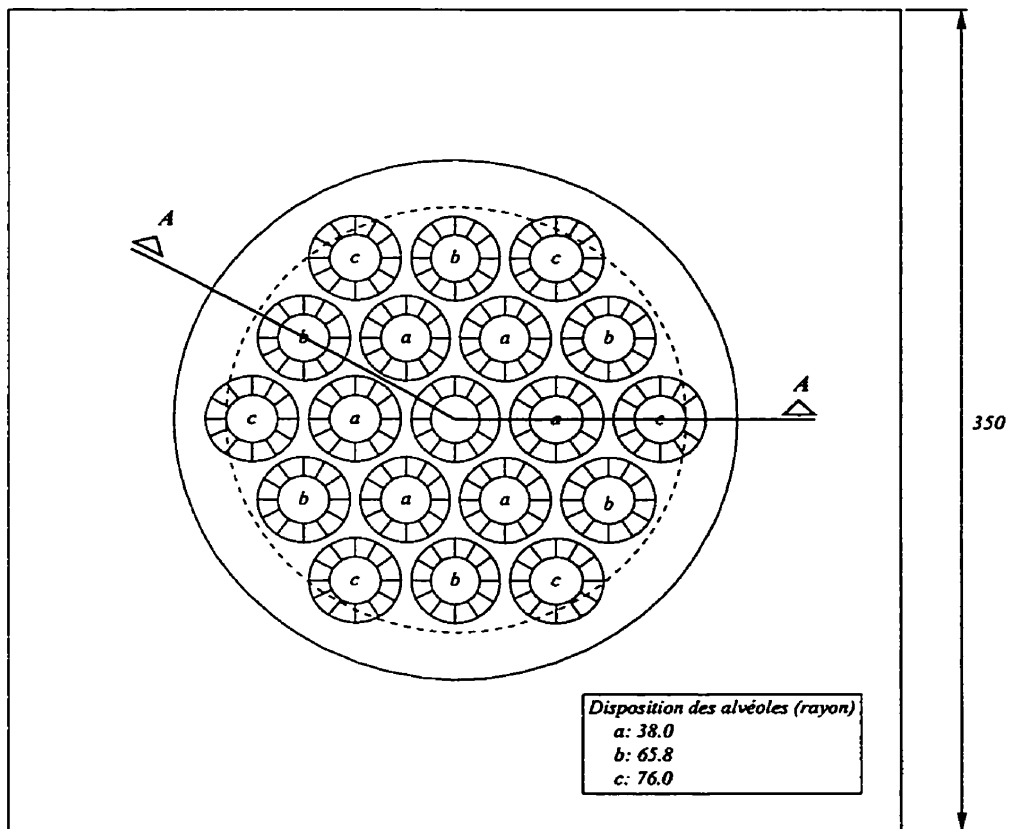
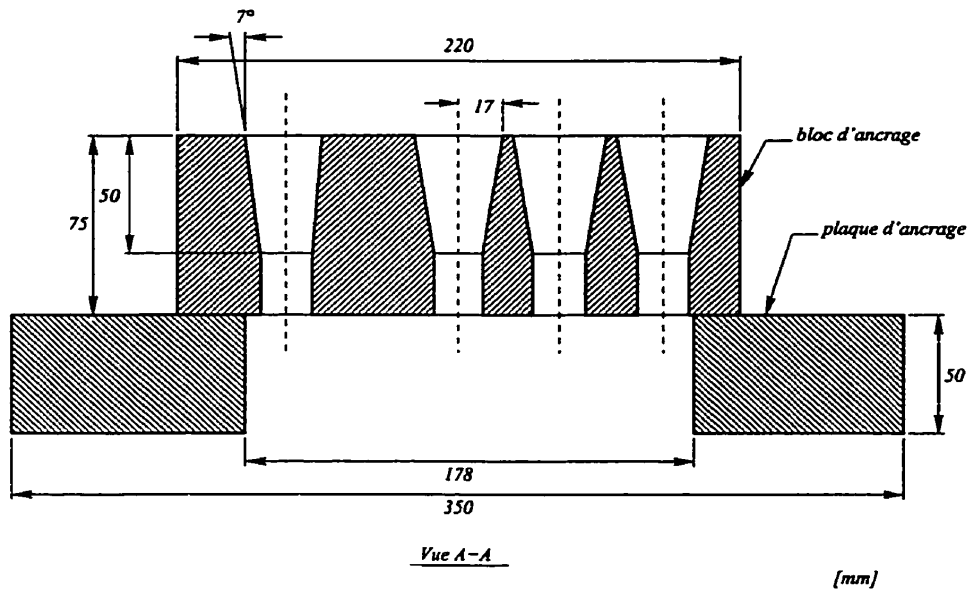


Figure 7.1 – Caractéristiques géométriques du dispositif LH19T15S

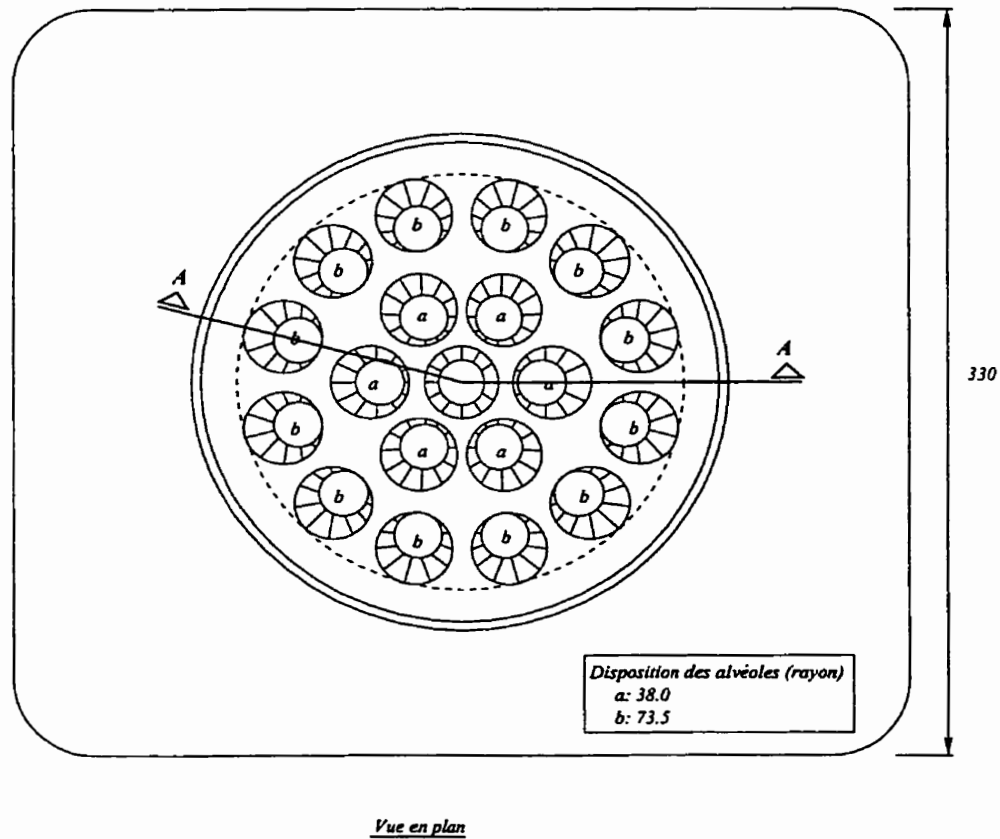
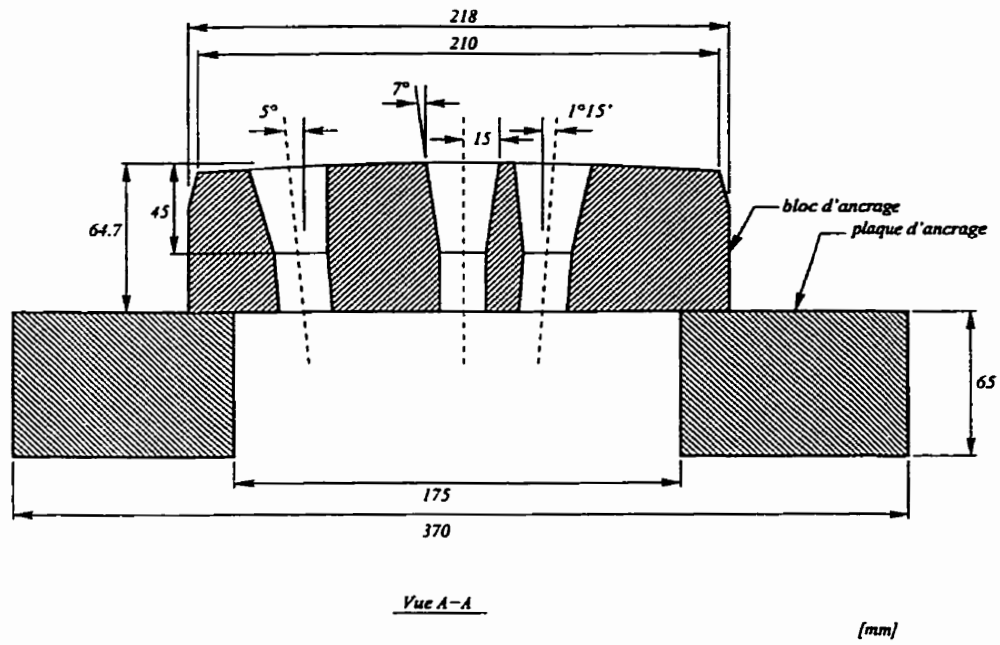


Figure 7.2 - Caractéristiques géométriques du dispositif A19K15S

des particularités de ce dispositif est la présence d'une partie inférieure surbaissée à partir de la partie supérieure de la plaque et correspondant au tiers de la hauteur totale. Chacune des 31 alvéoles possède une portion conique d'un diamètre maximal de 29 mm définie sur une certaine hauteur suivie d'une portion cylindrique sur le reste de la hauteur. Comme pour les deux autres dispositifs, la paroi inclinée fait un angle de 7.0° avec l'axe longitudinale du bloc. À l'exception de celle située au centre, les alvéoles, sont disposées selon quatre cercles concentriques contenant six alvéoles pour les trois plus petits rayons et douze sur le plus grand.

Pour ce qui est de la plaque, la grande complexité de cette dernière a mené, sous la recommandation de la société VSL, à l'utilisation d'une plaque équivalente. Telle que montrée à la Figure 7.3, la plaque est constituée d'un profilé en U de forme circulaire possédant un diamètre extérieur de 380 mm. Les parois du profilé sont d'une épaisseur de 10 mm pour les composantes verticales et de 15 mm pour la composante horizontale. Une autre particularité de ce dispositif est la présence d'un coulis dans la définition de la plaque.

7.2.1.2 Propriétés mécaniques

De façon générale, chaque dispositif d'ancrage possède des propriétés mécaniques qui lui sont propres et ce, pour chacune des composantes. Les notices techniques des procédés LH et K indiquent clairement les nuances d'acier de chacune des composantes et fournissent, par le fait même, les résistances minimales garanties. Dans la plupart des cas, ces valeurs sous-estiment les résistances réelles des composantes et font généralement abstraction des traitements thermiques effectués durant la phase d'usinage. Finalement, on remarquera dans ces notices (Freyssinet, 1988; Spie-Batignolles, 1986), que les nuances utilisées par les deux procédés sont très similaires. Dans ce contexte, on se propose d'utiliser les propriétés mécaniques obtenues par Bastien (1992) sur des échantillons de dispositifs d'ancrage testés en laboratoire et ce, pour les dispositifs LH19T15S et A19K15S. Le Tableau 7.1 présente l'ensemble de ces propriétés.

Tableau 7.1 – Propriétés mécaniques des dispositifs LH19T15S et A19K15S

Composante	Limite élastique	Limite ultime	Allongement ultime
	σ_e (MPa)	σ_u (MPa)	ϵ_u (%)
Bloc d'ancrage	400	750	15
Plaque d'ancrage	260	400	22
Clavette	400	n/d	n/d
Module de Young: $2 \cdot 10^5$ MPa, Coefficient de Poisson: 0.30			

Quant au procédé CS 6-31, la nature confidentielle des propriétés mécaniques ne nous permet pas de les exposer dans ce document. Cependant, il demeure possible de mentionner que les matériaux constituant ce dispositifs sont de même nature que les deux autres ci-haut

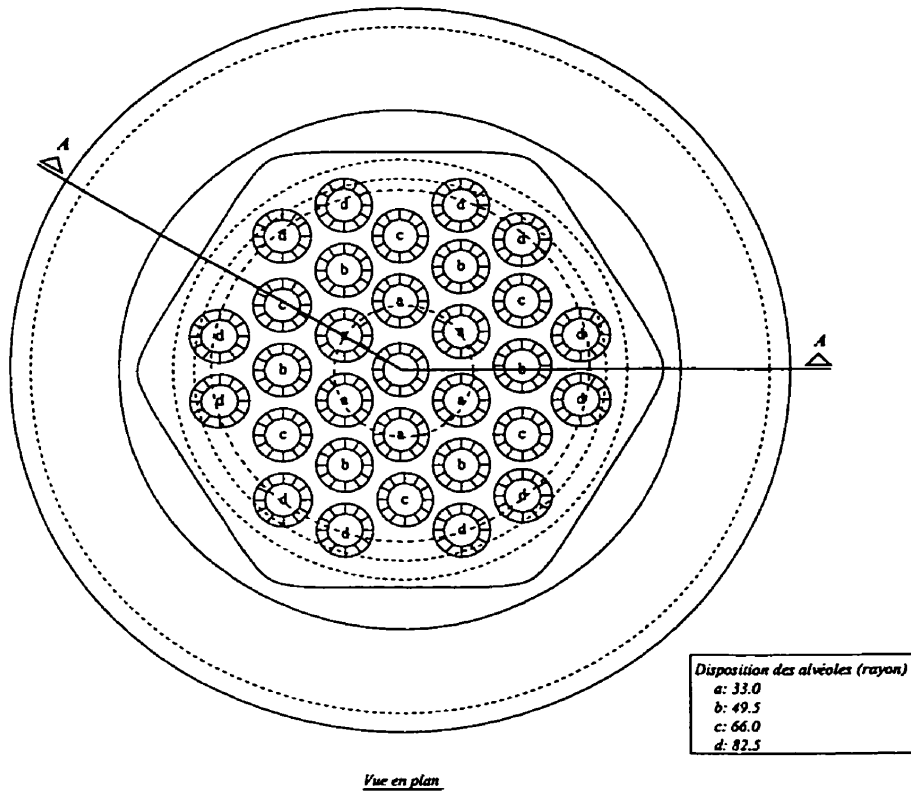
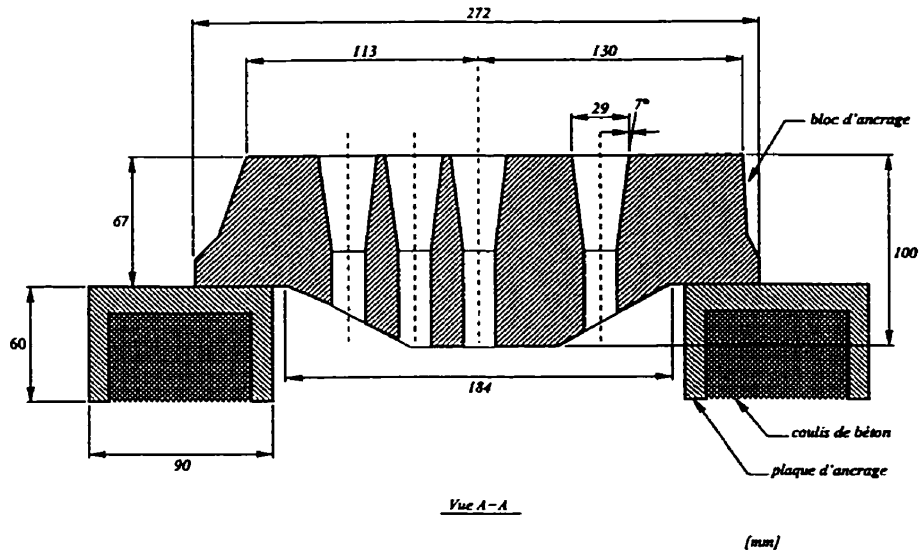


Figure 7.3 – Caractéristiques géométriques du dispositif CS 6-31

mentionnés, exception faite du coulis de béton (voir Figure 7.3) qui est considéré élastique mais dont les propriétés mécaniques ne peuvent être divulguées.

Finalement, en raison de la non disponibilité des divers coefficients de frottement agissant aux interfaces plot-alvéole conique et bloc d'ancrage-plaque d'ancrage, nous proposons donc de considérer ceux obtenus par Marceau (1993) suite à un calage sur des résultats expérimentaux effectués par Bastien (1992) sur des dispositifs d'ancrage LH1T15S du procédé LH de la société Spie-Batignolles (Spie-Batignolles, 1986). Il nous semble tout à fait adéquat de faire cette hypothèse, compte-tenu de la grande similitude des finis et duretés de surface des matériaux en cause. Dans cette optique, les coefficients de frottement retenus dans le cadre de cette étude sont tels que montrés au Tableau 7.2.

Tableau 7.2 – Coefficients de frottement utilisés

Interface	Coefficient de frottement
Plot-alvéole conique	$\mu_{pb} = 0.11$
Bloc d'ancrage-plaque d'ancrage	$\mu_{bp} = 0.30$

7.2.2 Mise en charge des dispositifs

L'ensemble des dispositifs d'ancrage à l'étude sont utilisés pour la mise en tension de câbles composés de torons dont les caractéristiques sont données au Tableau 7.3. Comme on peut le constater, et tel que prescrit par les différents organismes de normalisation (BPEL, 1990; CAN/CSA-S6-88, 1988), les conditions admissibles en service ne permettent de solliciter un toron au-delà d'une contrainte à l'origine (au niveau de l'ancrage) supérieure à 80% de la contrainte nominale de rupture. Avec de tels torons, les dispositifs d'ancrage LH19T15S et A19K15S peuvent être utilisés pour une charge maximale en service de 4237 kN ($19 \cdot 223$) tandis que le dispositif CS 6-31 doit admettre un chargement de 6913 kN ($31 \cdot 223$).

Tableau 7.3 – Caractéristiques d'un toron T15S

Section effective (mm^2)	150
Contrainte nominale de rupture (MPa)	1860
Force nominale de rupture (kN)	279
Contrainte maximale à l'origine (MPa)	1488
Force maximale à l'origine (kN)	223
Module de Young: $2 \cdot 10^5$ MPa, Coefficient de Poisson: 0.30	

Dans le calcul précédent, la force maximale à l'origine en service est directement obtenue en effectuant le produit de la contrainte par l'aire effective du toron ($150mm^2$). Dans le cadre de cette étude, on se propose d'effectuer la mise en tension des dispositifs d'ancrage à l'aide de plots tronconiques, tels que montrés à la Figure 1.5. Par cette astuce, on simplifie

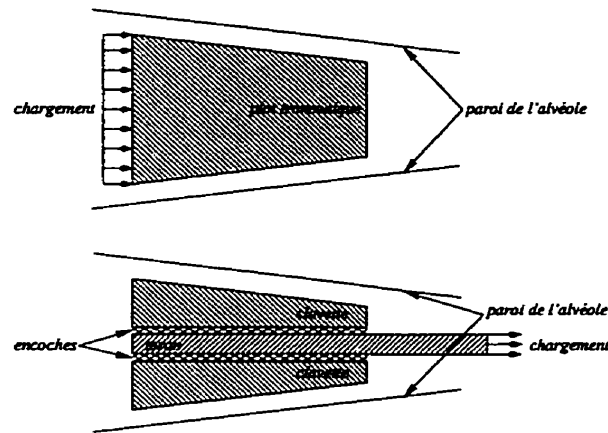


Figure 7.4 – Mise en charge des dispositifs d'ancrage: système toron mors d'ancrage -vs- plot tronconique

grandement le processus de mise en tension en modifiant le mode de transfert des efforts au bloc d'ancrage. Tel que montré à la Figure 7.4, une utilisation rigoureuse d'un système toron-mors d'ancrage, implique un transfert de la charge du toron aux mors d'ancrage et de chacune des clavettes constituant le mors au bloc d'ancrage. Avec l'utilisation des plots tronconiques, on fait l'hypothèse que le toron et les clavettes forment un tout monolithique, menant ainsi à une répartition uniforme de la charge transmise au niveau de la périphérie du plot. Dans un tel contexte, et tel que montré à la Figure 7.4, il devient possible d'induire la charge dans chacun des plots par l'entremise d'une pression uniforme sur la partie supérieure du plot et ce, dans une direction coaxiale à l'axe de l'alvéole. Le Tableau 7.4 présente les contraintes équivalentes compte-tenu de la différence entre l'aire effective d'un toron et celle de la partie supérieure d'un plot, basé sur le diamètre maximal de l'alvéole.

Tableau 7.4 – Équivalence des contraintes admissibles selon le dispositif d'ancrage

	LH19T15S	A19K15S	CS 6-31
Diamètre maximal de l'alvéole (mm)	34.00	30.00	29.29
Section effective (mm ²)	907.92	706.85	673.70
Contrainte nominale de rupture (MPa)	307	395	414
Contrainte maximale à l'origine (MPa)	246	316	331

7.2.3 Analyses par éléments finis

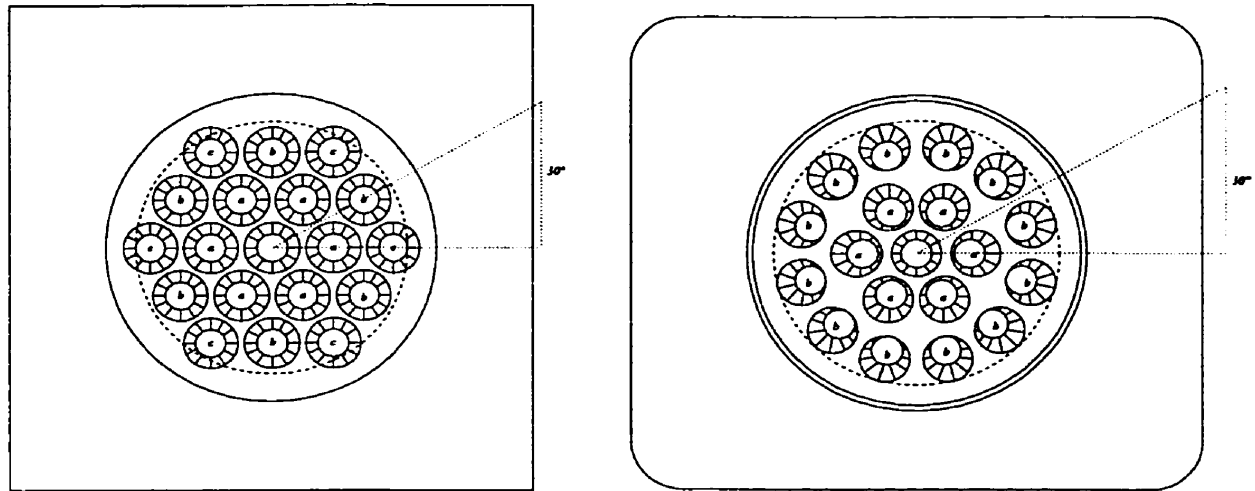
Une étude du comportement déformationnel de dispositifs d'ancrage tels que ceux proposés dans le cadre de cette thèse, nécessite la prise en compte de divers phénomènes. Considérant les observations expérimentales (Bastien, 1992), il importe de prendre en compte le comportement élastoplastique des composantes du dispositif susceptibles d'être sollicitées au-delà de leur

limite d'élasticité ainsi que l'évolution des conditions de contact et de frottement aux diverses interfaces. En particulier, les dispositifs d'ancrage à l'étude présentent $(n + 1)$ interfaces de contact où n représente le nombre d'alvéoles coniques. La dernière interface correspond à celle située entre le bloc et la plaque d'ancrage.

Compte-tenu de la symétrie matérielle, de la répartition particulière des alvéoles ainsi que de l'utilisation de plots tronconiques, chaque dispositif est analysé en considérant une portion de ce dernier définie selon la symétrie de cette répartition. La Figure 7.5 présente la portion considérée pour chacun des dispositifs. Comme on peut le constater, les trois dispositifs d'ancrage possèdent une symétrie de 30° , ce qui permet une diminution considérable de la quantité de matière à prendre en compte lors de la résolution. Maintenue à l'aide d'une relation linéaire ainsi que d'une condition de symétrie, cette condition de symétrie implique nécessairement une mise en tension uniforme et simultanée des plots tronconiques.

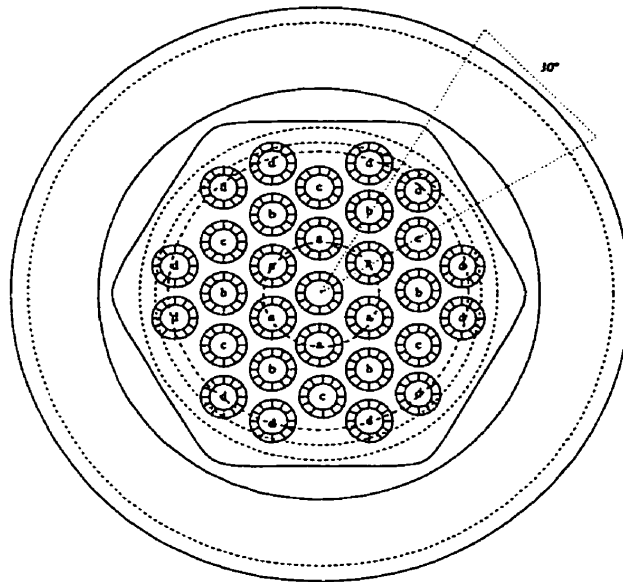
Une des grandes préoccupations lors de l'étape de discrétisation est sans contredit le choix du niveau d'interpolation à utiliser ainsi que la densité de maillage permettant l'obtention de résultats satisfaisants. Dans le cadre de cette étude, il nous a été possible de bénéficier des résultats d'une étude de convergence menée par Odobasic (1998) sur les dispositifs d'ancrage LH19T15S et A19K15S. Considérant que l'auteur a utilisé des maillages à interpolation linéaire, une formulation en petites déformations élastoplastiques ainsi qu'un modèle de contact de type nœud à nœud, on peut admettre que la non-linéarité du problème résolu est passablement moindre que celle correspondant à notre approche. Nous proposons d'utiliser les densités de maillages notées LH19T15S_3 et A19K15S_3 tels que présentés dans Odobasic (1998), mais en considérant une interpolation isoparamétrique quadratique. Pour ce qui est du dispositif CS 6-31, nous avons utilisé la densité de maillage utilisé dans le cadre du contrat de recherche mais en considérant, encore une fois, une interpolation isoparamétrique quadratique. Cette approche, quoique plus coûteuse au niveau de la résolution, permet l'obtention de résultats d'une grande qualité et en particulier, dans les zones de fort gradient de déformations. Les Figures 7.6, 7.7 et 7.8 présentent les maillages utilisés pour chacun des dispositifs à l'étude. On y remarque entre autres les conditions de symétrie, les conditions d'encastrement sous la plaque d'ancrage ainsi que la disposition des plots tronconiques.

Pour ce qui est des interfaces de contact, ces dernières sont définies à partir d'un recouvrement des surfaces candidates au contact et ce, en considérant les densités de maillage des solides correspondants. Au niveau des interfaces plot-alvéoles, les frontières esclaves sont portées par les plots et les frontières maîtres par les alvéoles. À l'interface bloc-plaque, les frontières esclave et maître sont portés respectivement par le bloc et la plaque. Les Figures 7.9, 7.10 et 7.11 présentent, pour chacun des dispositifs, la disposition des interfaces de contact. Afin de respecter la continuité des champs de déplacements aux interfaces de contact, ces dernières sont discrétisées à l'aide d'éléments quadrangles à huit nœuds et triangulaires à six nœuds. Le Tableau 7.5 présente quelques informations concernant les densités de maillage ainsi que le nombre d'équations à résoudre. Chacune des interfaces est régie par une loi de Coulomb utilisant les coefficients de frottement tels que donnés au Tableau 7.2.



(a) Dispositif LH19T15S

(b) Dispositif A19K15S



(c) Dispositif CS 6-31

Figure 7.5 – Symétrie des dispositifs d'ancrage selon la répartition des alvéoles

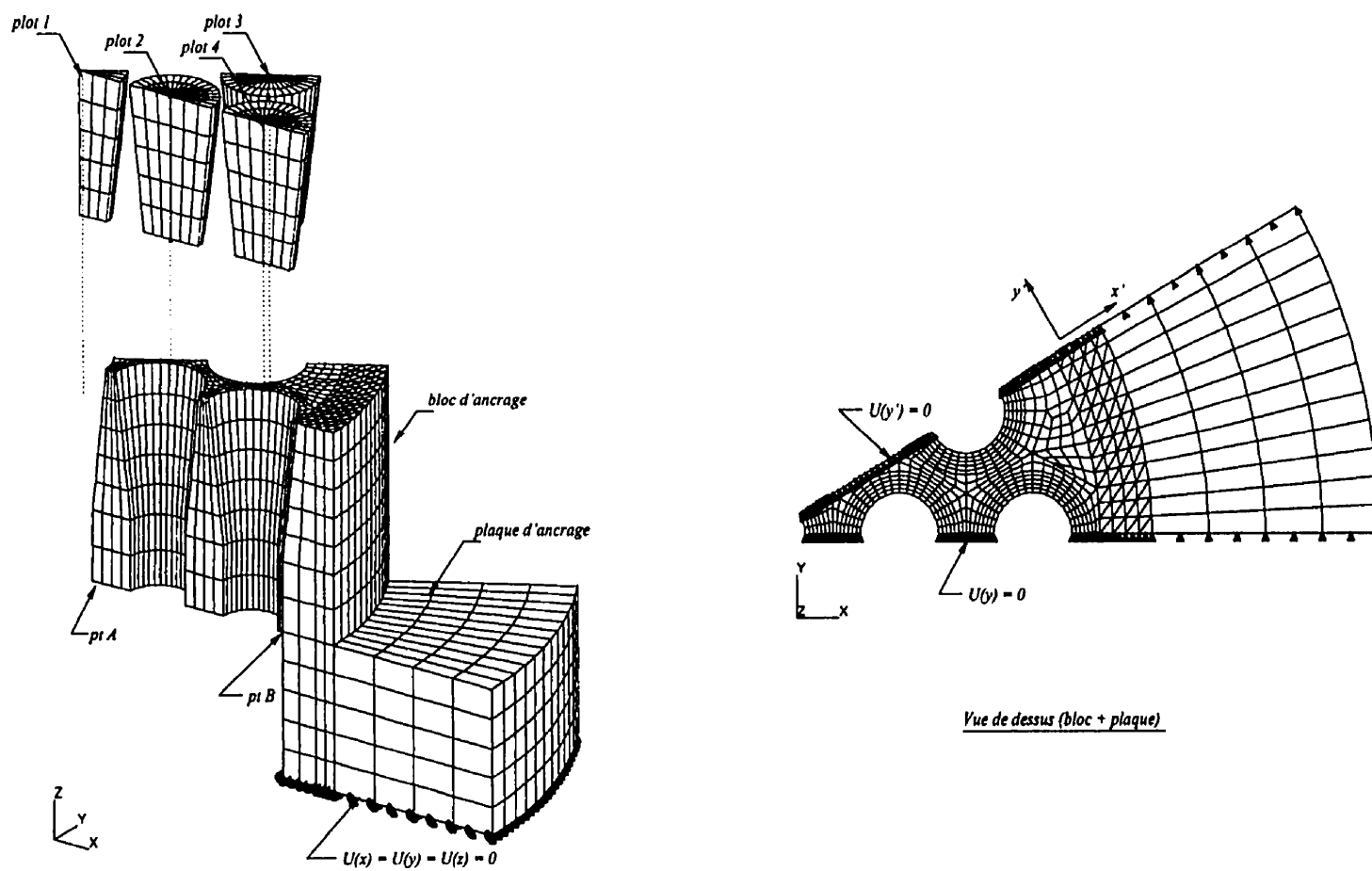


Figure 7.6 – Dispositifs d'ancrage LH19T15S: maillages utilisés et conditions aux limites

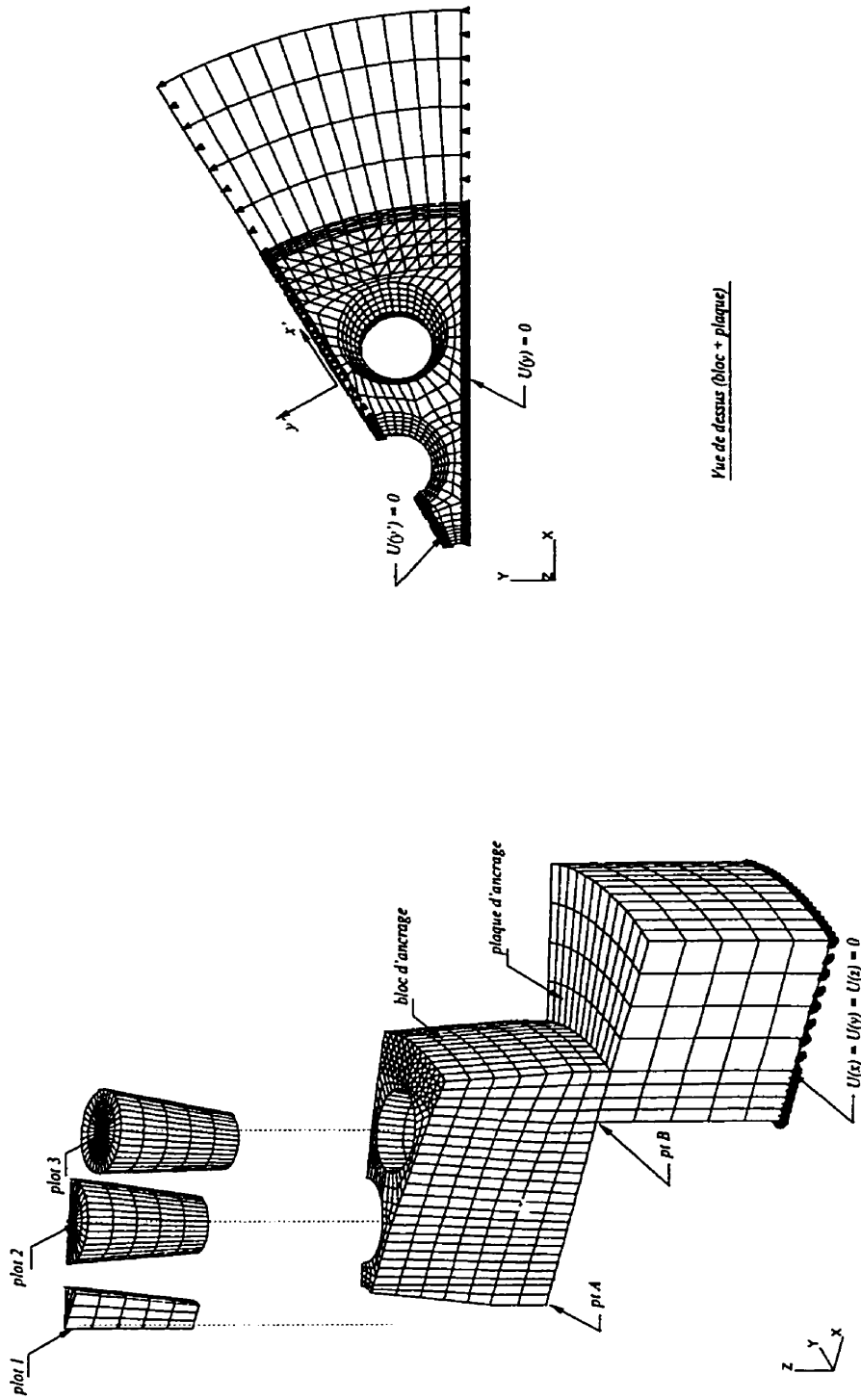


Figure 7.7 – Dispositifs d'ancrage A19K15S: maillages utilisés et conditions aux limites

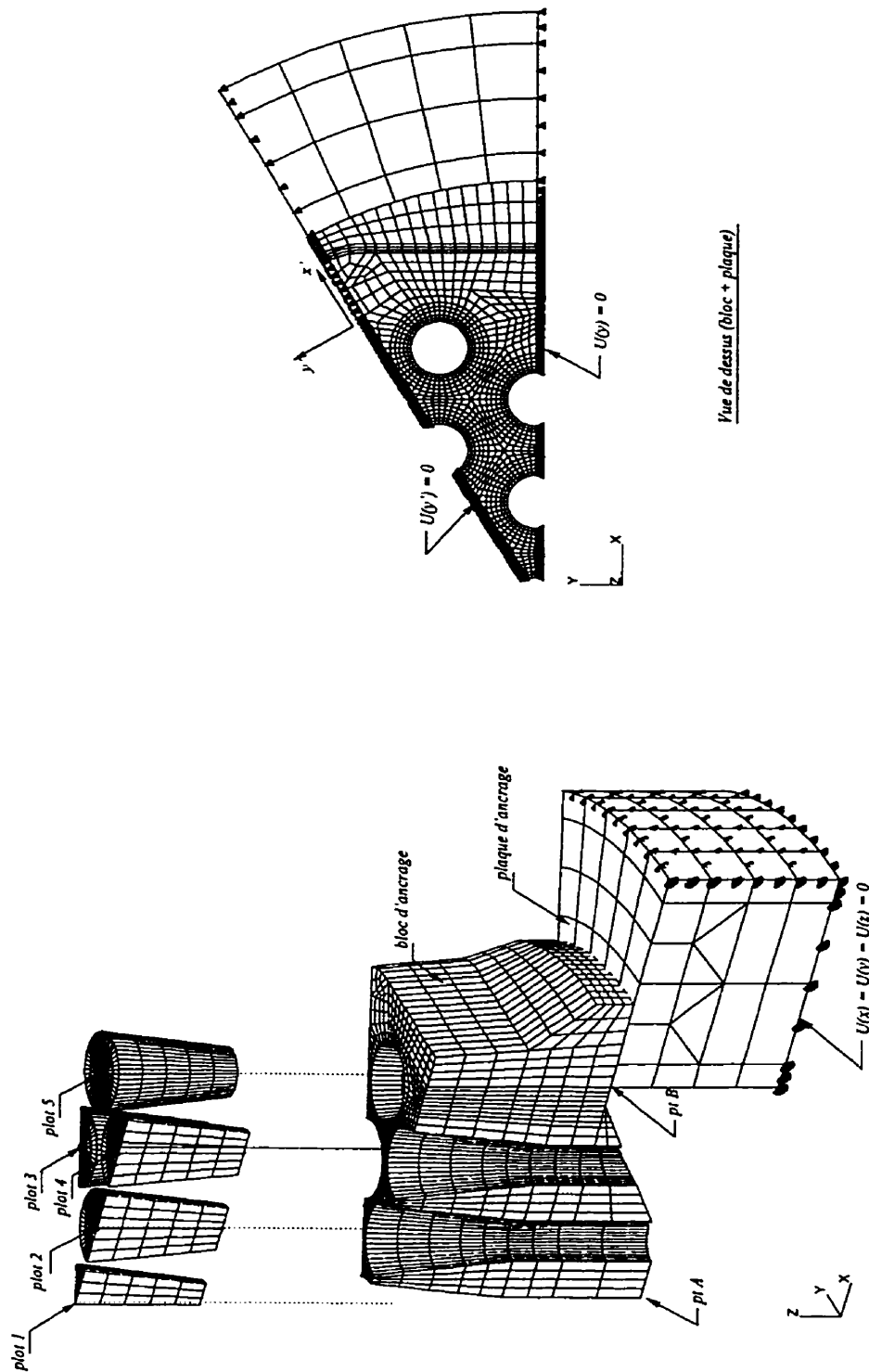


Figure 7.8 – Dispositifs d'ancrage CS 6-31: maillages utilisés et conditions aux limites

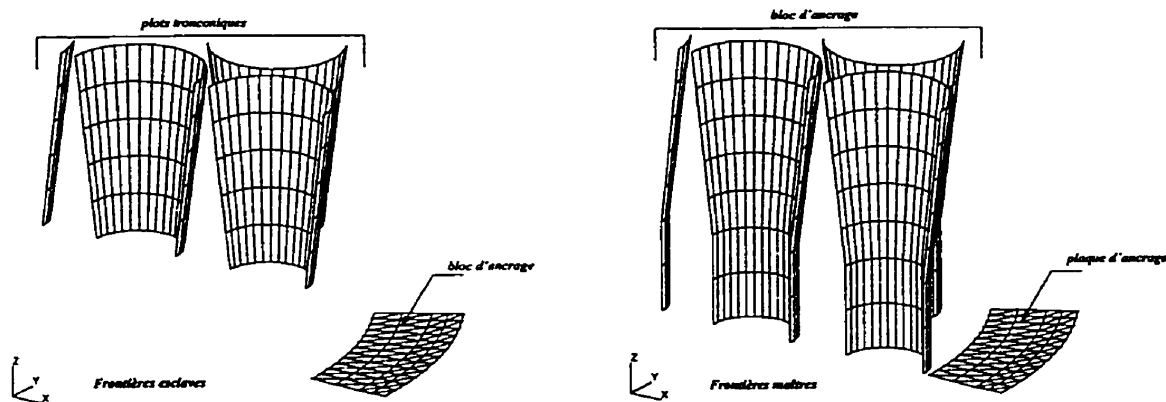


Figure 7.9 – Définition des interfaces de contact sur le dispositif LH19T15S

Tableau 7.5 – Dispositifs multitorons: quelques informations sur les densités de maillage utilisés

	LH19T15S	A19K15S	CS 6-31
Nombre d'éléments solides (P15,H20)	3269	3017	5053
Nombre d'éléments de surface (Q8,T6)	876	876	1828
Nombre d'interface de contact	5	4	6
Nombre d'éléments de contact	381	381	737
Nombre de nœuds	14591	13462	25599
Nombre d'équations à résoudre	41109	37771	74186

Compte-tenu des propriétés mécaniques présentées au Tableau 7.1 ainsi que celle du dispositif CS 6-31, les blocs d'ancrage ainsi que les plaques d'ancrage sont modélisés en considérant une loi de comportement élastoplastique en grandes transformations, telle que présentée aux Chapitres 2 et 4 avec une représentation objective du taux de contrainte par une dérivée de Jaumann. Quant aux plots tronconiques, les données du Tableau 7.1 permettent l'utilisation d'une simple loi de comportement élastique en petites déformations (mesure de Green-Lagrange).

Tel que mentionné dans les chapitres précédents, les problèmes que nous tentons de résoudre dans le cadre de cette thèse sont fortement non linéaires et nécessitent l'utilisation de méthodes de résolution et de pilotage adaptées. Dans le contexte des dispositifs d'ancrage, les trois problèmes ont été résolus à l'aide de la méthode de Newton-Raphson jumelée à une technique de pilotage en longueur d'arc dont l'incrément initial est déterminé en pilotant le déplacement vertical (Z) du centre de la face supérieure du plot tronconique central. Le paramètre de charge est associé à une distribution de pression uniforme sur cette même surface de chacun des plots et tel que montré à la Figure 7.4. Les interfaces de contact sont résolues en considérant des pénalités normales et tangentielles de 10^5 jumelées à 4 augmentations des mul-

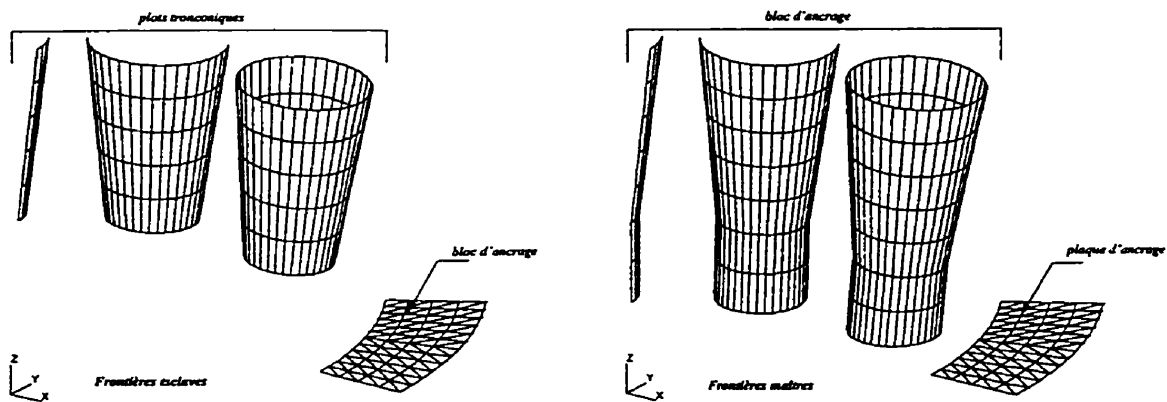


Figure 7.10 – Définition des interfaces de contact sur le dispositif A19K15S

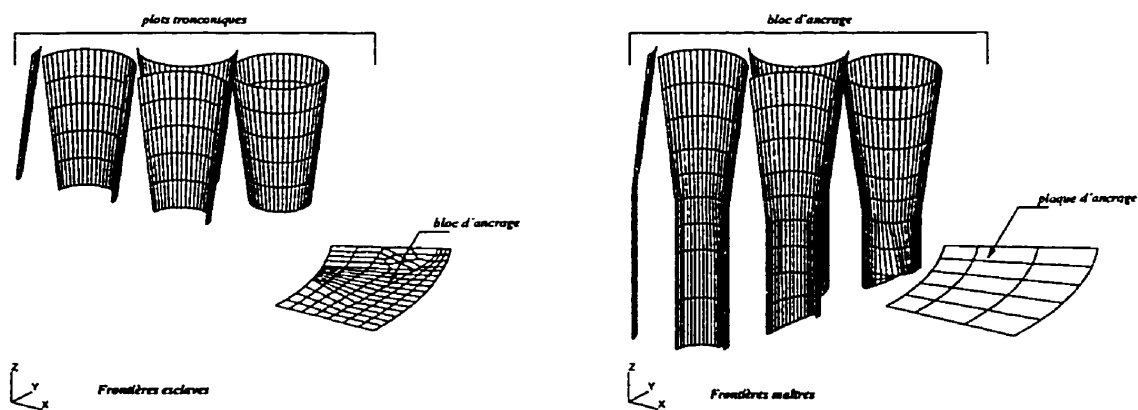


Figure 7.11 – Définition des interfaces de contact sur le dispositif CS 6-31

tiplicateurs de Lagrange sans factorisation (la matrice tangente est constante). L'intégration numérique est obtenue en considérant un schéma de Gauss $3 \cdot 3 \cdot 3$ pour les hexaèdres et de Hammer-Gauss $3 \cdot 3$ pour les prismes triangulaires. Au niveau des éléments de contact, l'intégration est effectuée à l'aide d'un schéma de Gauss $3 \cdot 3$ pour les quadrangles et de Hammer (3 pts internes) pour les triangles. Considérant le nombre d'équations à résoudre (voir Tableau 7.5), les systèmes d'équations linéarisés associés aux dispositifs LH19T15S et A19K15S ont été résolus à l'aide d'une méthode directe (LU) tandis que celui du dispositif CS 6-31 l'a été à l'aide d'une méthode itérative de type BCGS préconditionnée par une technique de type SOR. Considérant que la solution de ce système constitue une correction du schéma de Newton-Raphson, nous avons limité la précision à atteindre par la méthode itérative à trois ordres de grandeurs (10^{-3}). Globalement, la convergence du schéma de Newton-Raphson est obtenue lorsque les normes (5.3) atteignent respectivement 10^{-3} et 10^{-2} .

Les trois problèmes ont été résolus sur un ordinateur SGI Origin 2000 du RQCHP³. Le Tableau 7.6 présente quelques données relatives à la résolution. Comme on peut le constater, la similitude dans le nombre d'itérations par pas ainsi que le nombre de factorisation indique que la non-linéarité des trois problèmes est passablement identique. Pour ce qui est du dispositif CS 6-31, l'absence de factorisation indique l'utilisation d'une méthode itérative. On rappelle qu'avec l'utilisation d'une telle méthode, il devient impossible de résoudre les augmentations des multiplicateurs de Lagrange par simple substitution car la matrice tangente n'est pas factorisée. Dans ce contexte, la procédure itérative doit être effectuée à chaque itération de Newton-Raphson, ce qui explique le temps moyen par pas pour la résolution du dispositif CS 6-31. En contrepartie, si on regarde le temps CPU à résoudre chaque équation, on remarque que la résolution du système linéarisé du dispositif CS 6-31 est environ 10% plus rapide que pour les deux autres dispositifs et ce, malgré une densité de maillage plus importante. Ces dernières constatations montrent effectivement l'intérêt des méthodes itératives pour la résolution des problèmes de grandes tailles.

Tableau 7.6 - Quelques informations relatives à la résolution numérique

	LH19T15S	A19K15S	CS 6-31
Nombre de pas	19	49	28
Nombre moyen d'itérations par pas	15.3	15.5	15.8
Nombre moyen de factorisations par pas	6	5.8	0
Temps CPU moyen par pas (min.)	314	253	471
Temps CPU moyen par iter (min.)	20.9	16.9	29.8
Temps CPU moyen par équation (sec.)	0.031	0.027	0.024

3. Réseau québécois de calcul haute performance. Pour de plus amples informations: <http://www.rqchp.qc.ca/>

7.2.4 Résultats obtenus et discussion

Tel que donné au Tableau 7.3, les trois dispositifs d'ancrage ont été soumis à une mise en tension maximale correspondant à la limite ultime de l'ensemble des torons composant un hypothétique câble de précontrainte. Sachant pertinemment que les dispositifs ne sont pas tous utilisés avec le même nombre de torons (19 et 31), l'ensemble des résultats présentés réfèrent à la charge correspondant à un seul toron et non à la charge totale induite dans le dispositif. Cette méthode permet une meilleure comparaison des résultats obtenus. De plus, il importe de noter qu'en raison de la nature confidentielle des informations relatives au dispositif CS 6-31, la majorité des résultats sont présentés de façon adimensionnelle sans toutefois compromettre l'aspect comparatif de l'étude. Pour ce qui est de l'étude proprement dite, nous proposons de baser la comparaison des dispositifs sur l'aptitude de ces derniers à maintenir un bon comportement en service et de vérifier la possibilité d'utiliser ces derniers avec des torons à haute performance. Les technologies actuelles permettent l'obtention de torons possédant des limites ultimes de l'ordre de 2500 à 3000 MPa. Il est donc de grand intérêt de vérifier si les dispositifs existants sont aptes à supporter de telles mises en tension. Pour ce faire, on se propose d'étudier certains aspects que nous jugeons déterminants sur le comportement déformationnel des dispositifs d'ancrage.

En tout premier lieu, et ce dans le but de familiariser le lecteur avec le comportement global d'un dispositif d'ancrage, la Figure 7.12 présente la déformée à l'ultime obtenue pour chacun des dispositifs. Comme on peut le constater, les dispositifs se comportent grossièrement comme un disque métallique épais reposant librement sur un appui déformable. Le jeu de déplacements relatifs des plots tronconiques (absents sur la figure) dans les alvéoles amène une modification importante de la rigidité globale en cours de chargement. De ce fait, le bloc d'ancrage subit généralement une flexion passablement prononcée ainsi qu'un effort tranchant important au voisinage de l'appui. Tel que montré sur les Figures 7.1, 7.2 et 7.3, l'ouverture intérieure de la plaque d'ancrage est souvent à proximité d'une série d'alvéoles. La Figure 7.13 présente le ratio du volume plastifié⁴ en fonction de l'évolution de la mise en tension. Comme on peut le constater, aucun bloc d'ancrage ne subit de plastification significative en deça d'un chargement de 100 kN. Au-delà de cette charge, les blocs d'ancrage des dispositifs LH19T15S et A19K15S commencent à se plastifier jusqu'à des volumes plastifiés en service de l'ordre de 35% et 65% respectivement. Dans les mêmes conditions, le bloc du dispositif CS 6-31 commence à se plastifier autour de 150 kN jusqu'à un volume plastifié en service qui ne dépasse pas les 15%. Au delà de cette limite, on remarque que les blocs des dispositifs LH19T15S et A19K15S montrent une augmentation importante de l'étendue de la plastification (> 80%). Pour ce qui est du dispositif CS 6-31, le volume plastifié du bloc atteint tout de même les 45%. À ce stade-ci, il est déjà possible de s'interroger sur la possibilité d'utiliser ces dispositifs avec des torons à résistance améliorée. Quant à la plaque d'ancrage, la Figure 7.13(b) indique que la plastification n'est pas vraiment significative, exception faite pour le dispositif CS 6-31. Cependant, on rappelle que cette plaque n'est qu'une représentation supposée équivalente de

4. Le volume plastifié est obtenu en considérant l'ensemble des sous-volumes élémentaires (points d'intégration) où la déformation plastique équivalente est non nulle. Par la suite, on divise la somme des sous-volumes par le volume total du domaine.

la plaque réelle. La faible proportion d'acier ainsi que la présence de coulis de béton sont les principaux responsables de ce résultat.

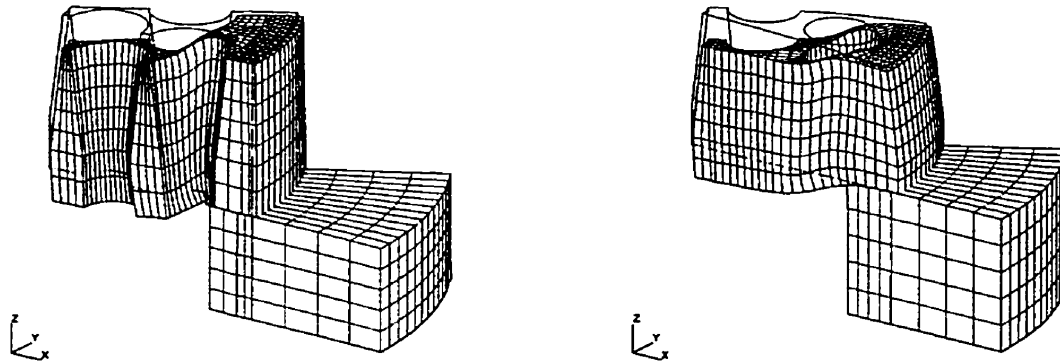
Conséquent à l'apparition de la plastification, la Figure 7.14 présente la flèche totale sur la flèche⁵ correspondant à la première plastification. Comme on peut le constater, les trois dispositifs permettent d'obtenir des flèches en service entre 1.5 et 3 fois celle obtenue à la première plastification. Au delà de cette limite, les dispositifs LH19T15S et A19K15S montrent des flèches de l'ordre de 12 fois celle obtenue à la première plastification, ce qui est le double de celle obtenue pour le dispositif CS 6-31. Nonobstant l'intensité des flèches, la Figure 7.14 montre également que les dispositifs LH19T15S et A19K15S subissent une perte importante de rigidité au voisinage de 200 kN; perte qui ne survient qu'à la limite en service pour le dispositif CS 6-31.

Autre résultat important, l'enfoncement des plots tronconiques. Malgré le fait que nous ne pouvons associer directement l'enfoncement des plots dans les alvéoles à la perte de précontrainte dans les torons, il est tout de même intéressant de vérifier les patrons d'enfoncement selon le dispositif d'ancrage. Tel que mentionné précédemment, le comportement d'un dispositif d'ancrage multitorons est assimilable à une plaque épaisse en flexion. Dans un tel cas, il importe de minimiser l'enfoncement des plots tronconiques afin de conserver le plus de matière dans la partie supérieure du bloc et ce, dans le but de préserver la rigidité flexionnelle. Un enfoncement important des plots aura donc pour effet de réduire la rigidité et ainsi, de produire une flèche plus grande. La Figure 7.15 présente l'enfoncement relatif⁶ des plots pour chacun des dispositifs à l'étude. Comme on peut le constater, l'enfoncement des plots est plus important pour ceux situés en périphérie du bloc d'ancrage. Cette situation était prévisible en raison de l'ovalisation possible des alvéoles périphériques causée par l'effet de confinement des alvéoles centrales et du poinçonnement au niveau de l'interface bloc d'ancrage-plaque d'ancrage. De plus, on remarque que le dispositif CS 6-31 permet une meilleure retenue des plots, limitant l'enfoncement maximal à l'ultime à 0.6 mm, comparativement aux dispositifs LH19T15S et A19K15S qui permettent des enfoncements maximaux à l'ultime de l'ordre de 3.2 mm et 2.4 mm respectivement.

Jusqu'à maintenant, les résultats étudiés ont permis de cerner le comportement global des dispositifs d'ancrage. Dans ce qui suit, nous allons vérifier certaines caractéristiques internes du comportement déformationnel des dispositifs. Considérons, dans un premier temps, les Figures 7.16, 7.17 et 7.18 qui présentent la distribution de la plastification dans les trois blocs d'ancrage pour des conditions d'utilisation en service. Les valeurs présentées correspondent à la déformation plastique équivalente normalisée par la déformation correspondant à la limite élastique du matériau. Comme on peut le constater, les trois dispositifs semblent concentrer l'étendue de la plastification au niveau des alvéoles périphériques. Cependant, se sont les dispositifs LH19T15S et CS 6-31 qui semblent les plus touchés par la plastification. En effet, la configuration des alvéoles tend à créer un détachement de la portion centrale du bloc

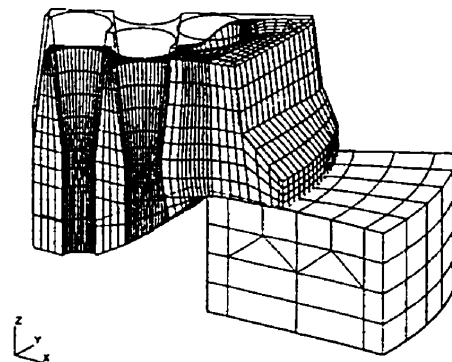
5. La flèche est obtenue par la différence entre les déplacements selon l'axe Z des points A et B tels que montrés aux Figures 7.6, 7.7 et 7.8

6. On calcule l'enfoncement d'un plot par la différence entre les déplacements selon l'axe Z du centre d'un plot et celui d'un point reposant sur l'alvéole en un même rayon.



(a) Dispositif LH19T15S

(b) Dispositif A19K15S



(c) Dispositif CS 6-31

Figure 7.12 – Déformée des dispositifs d'ancrage à l'ultime

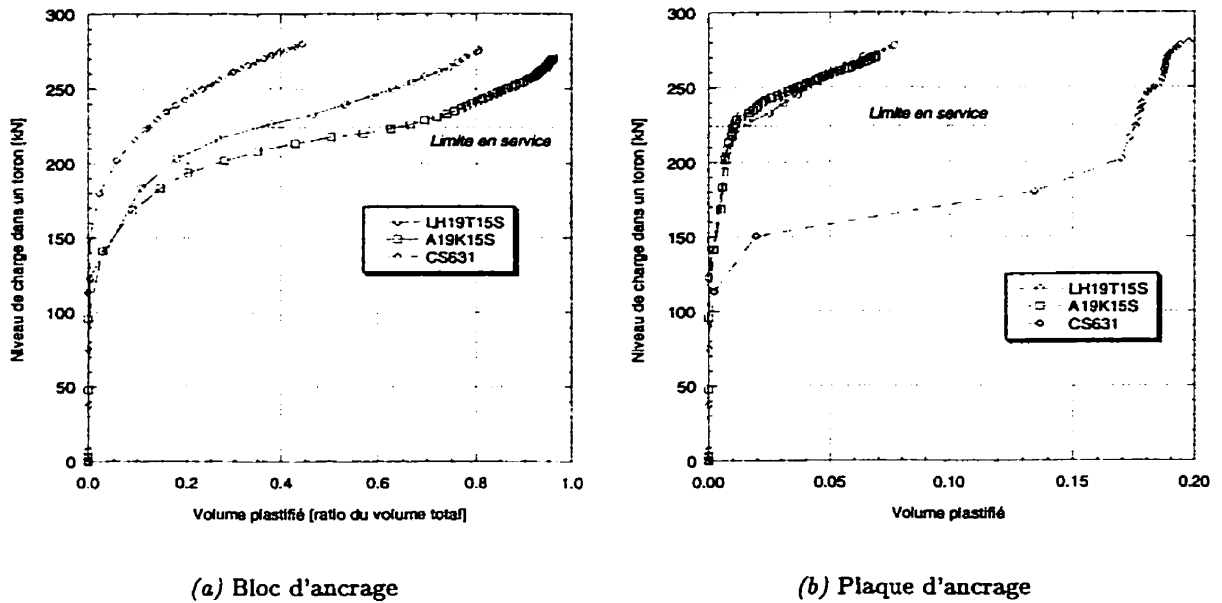


Figure 7.13 – Volume plastifié en fonction du niveau de charge

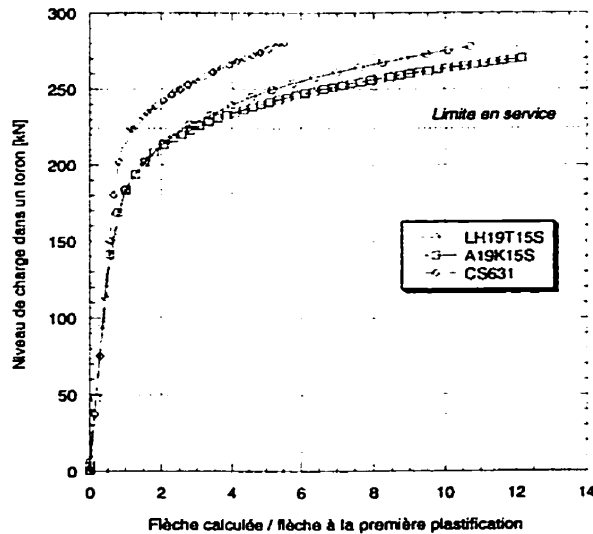
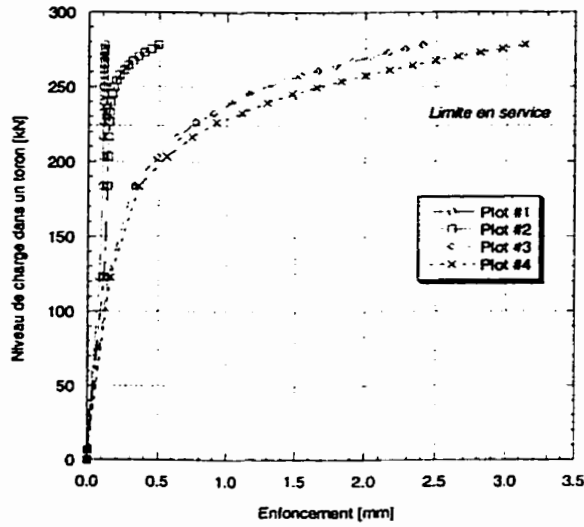
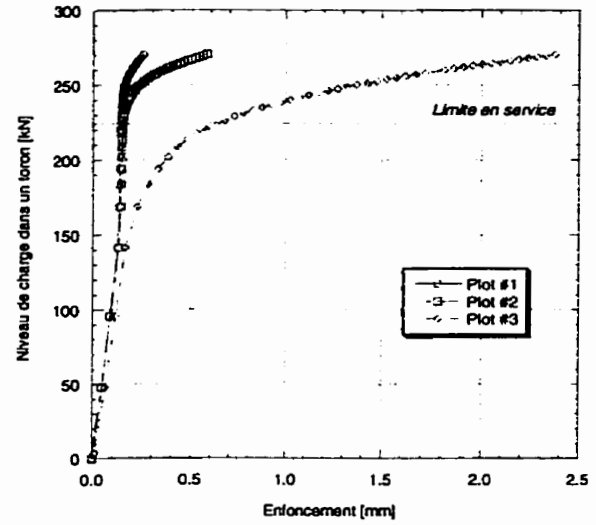


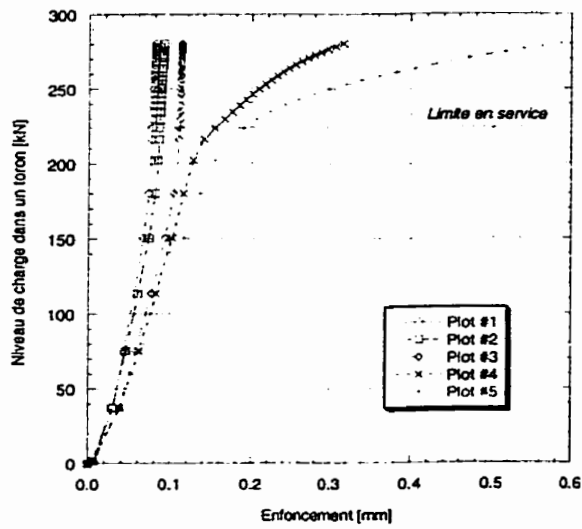
Figure 7.14 – Flèche des dispositifs d'ancrage en fonction du niveau de charge



(a) Dispositif LH19T15S



(b) Dispositif A19K15S



(c) Dispositif CS 6-31

Figure 7.15 – Enfoncement des plots en fonction du niveau de charge

d'ancrage. Malgré cette remarque, c'est le dispositif CS 6-31 qui maintient la plus faible progression de l'intensité de la déformation plastique. Pour ce qui est du dispositif A19K15S, l'inclinaison de l'alvéole en périphérie tend à faire progresser la plastification vers le bord, ce qui constitue un avantage important. Dans le même ordre d'idée les Figures 7.19, 7.20 et 7.21 présentent les distributions de la contrainte de von Mises normalisée par la limite élastique du matériau. On constate aisément que les trois dispositifs présentent des zones où la contrainte de von Mises est sur le point d'atteindre la limite d'élasticité du matériau (≈ 1.0). Ce constat vient corroborer l'augmentation subite du volume plastifié au voisinage de la limite en service. Aussi, compte-tenu de l'étendue de cette contrainte, on anticipe aisément qu'une faible augmentation du chargement provoquera une augmentation du volume plastifié. En contrepartie, pour une utilisation en service, c'est le dispositif CS 6-31 qui subit la plus faible augmentation de sa contrainte de von Mises (35 % de la limite d'élasticité).

Finalement, la Figure 7.22 présente les statuts de contact aux diverses interfaces pour des conditions d'utilisation en service. Il s'agit là de valeurs scalaires extrapolées permettant de qualifier la tendance de la cinématique de contact. Les statuts possibles sont:

- 0 Non contact
- 1 Contact sans glissement
- 2 Contact avec glissement

Dans l'ensemble, on peut identifier des zones de glissement en plusieurs endroits, notamment, au niveau de l'interface bloc d'ancrage- plaque d'ancrage. Plus spécifiquement, on remarque sur le dispositif LH19T15S, une zone de glissement concentrée au voisinage des alvéoles 2, 3 et 4. De plus, on remarque que ces trois alvéoles centrales sont dans une condition de type glissement-non glissement, permettant d'affirmer que ces dernières subissent une certaine ovalisation. Quant à l'alvéole centrale, on remarque très peu de glissement montrant ainsi l'effet de confinement au voisinage du centre du bloc d'ancrage. Pour ce qui est du dispositif A19K15S, on remarque une tendance tout à fait similaire à celle du précédent dispositif. En particulier, on constate aisément que les alvéoles 2 et 3 tendent à s'ovaliser dans la direction radiale. Finalement, le dispositif CS 6-31 présente une très forte proportion de zones de glissement expliquée par l'état de confinement provoqué par la zone de non glissement au centre du bloc d'ancrage.

Compte-tenu des résultats présentés jusqu'à maintenant, il semble tout indiqué de dire que c'est le dispositif CS 6-31 qui semble le mieux adapté à son utilisation en service. La faible intensité et étendue des déformations plastiques équivalentes relatives ainsi que l'intensité de la flèche relative montrent que le dispositif CS 6-31 possède une bonne réserve de rigidité en service. De plus, la mise en charge à l'ultime de ce dispositif montre que ce dernier possède la ductilité nécessaire au bon fonctionnement en service (sécurité). En contrepartie, on conclut rapidement à l'inaptitude de ces dispositifs à être utilisés avec des torons à résistance améliorée. En effet, comme on peut le constater sur les Figures 7.23, 7.25 et 7.25, les dispositifs d'ancrage LH19T15S, A19K15S et CS 6-31 présentent une augmentation importante de l'intensité de la déformation plastique équivalente normalisée de l'ordre de 204 %, 223 % et 470 % respectivement. On remarque que malgré le fait que le dispositif CS 6-31 présente le plus

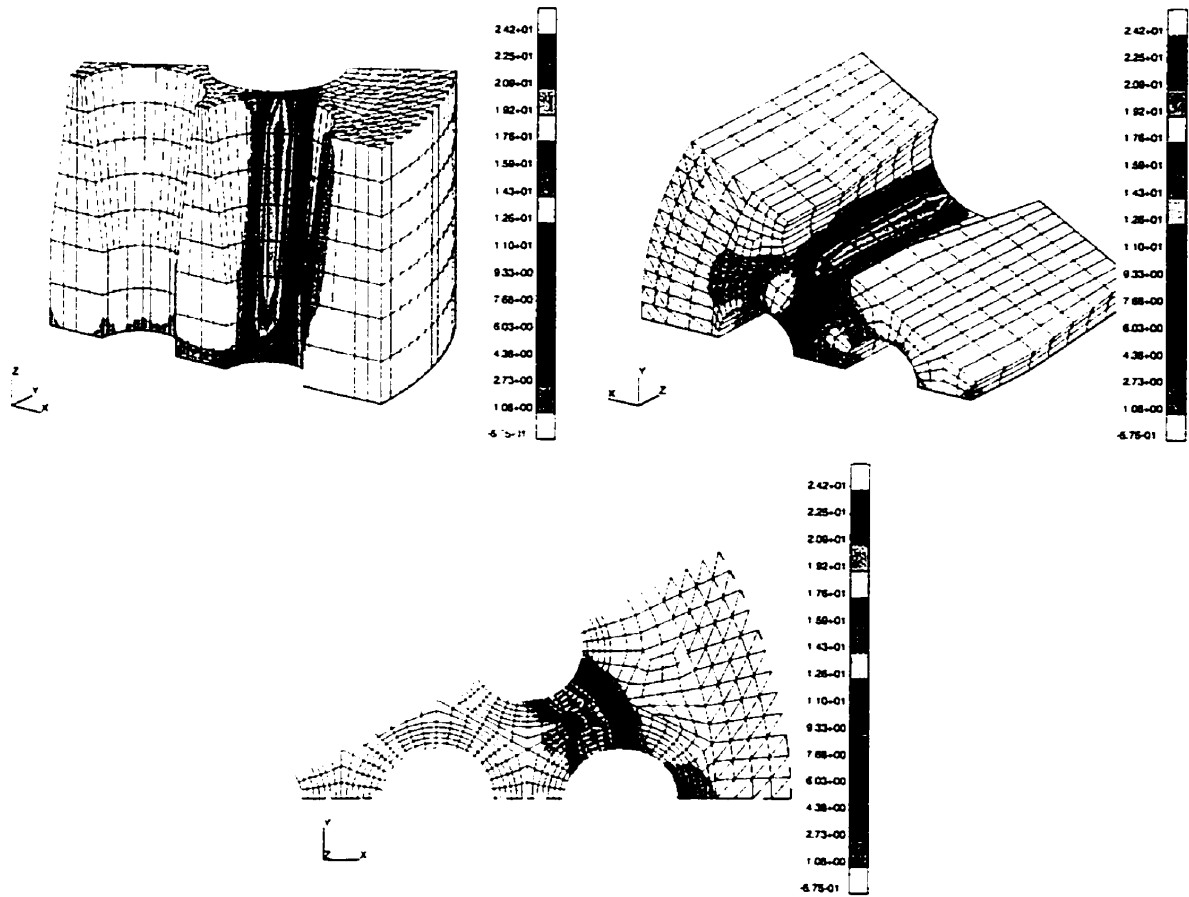


Figure 7.16 – Déformation plastique équivalente normalisée en service (LH19T15S)

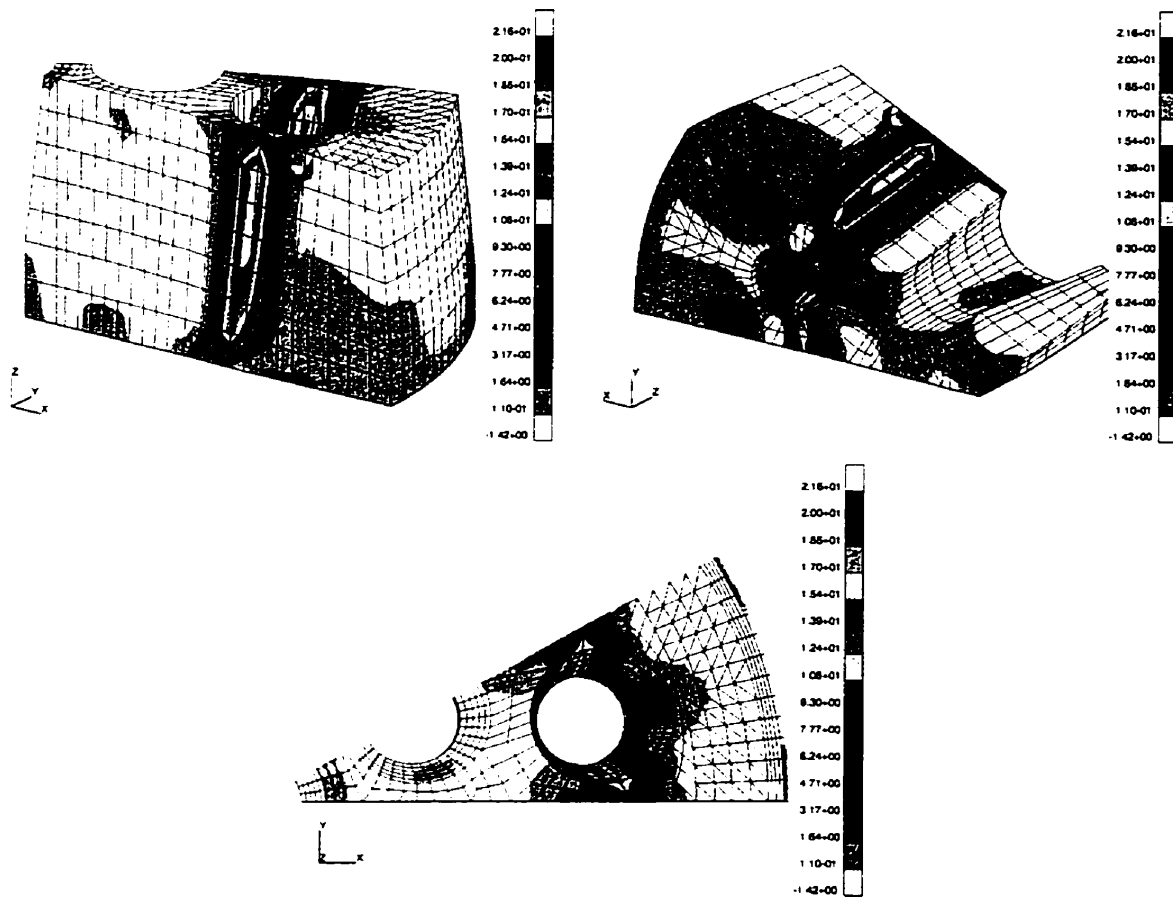


Figure 7.17 - Déformation plastique équivalente normalisée en service (A19K15S)

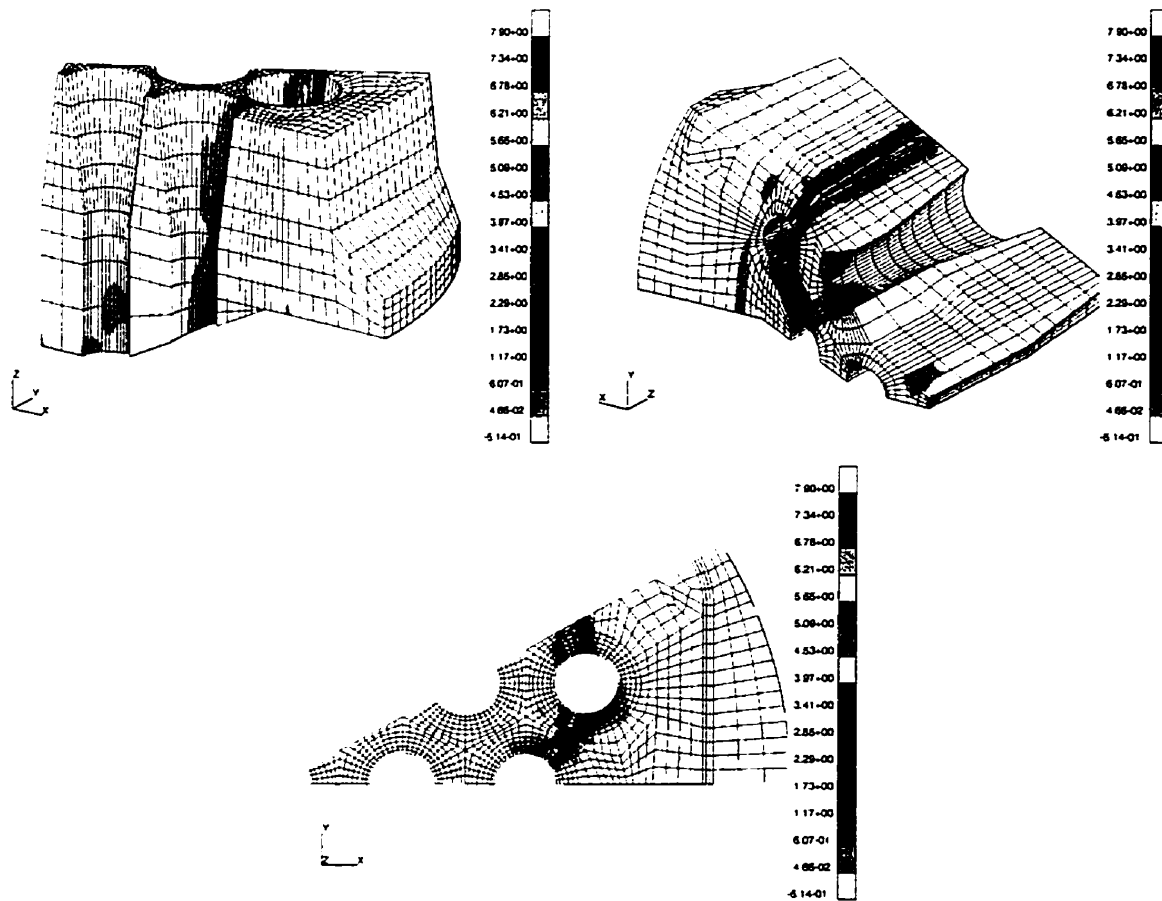


Figure 7.18 – Déformation plastique équivalente normalisée en service (CS 6-31)

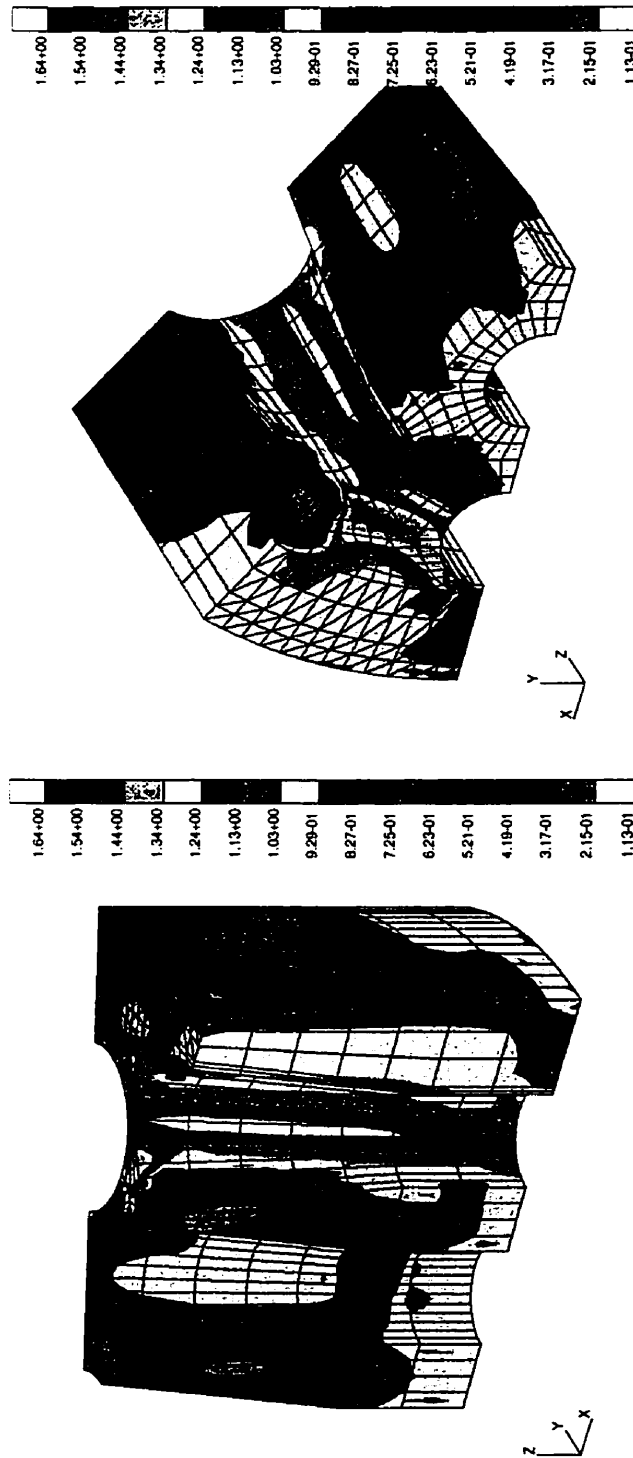


Figure 7.19 - Contrainte de von Mises normalisée en service (LH19T15S)

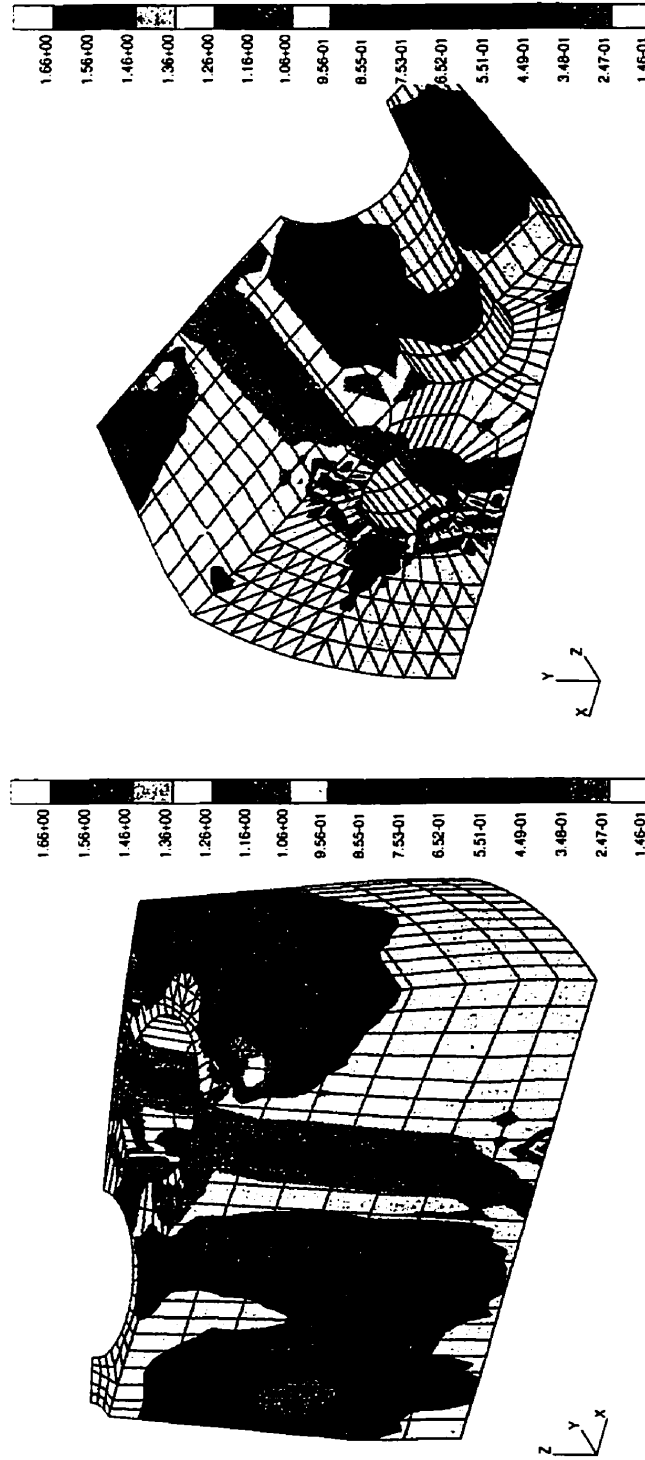


Figure 7.20 - Contrainte de von Mises normalisée en service (A19K15S)

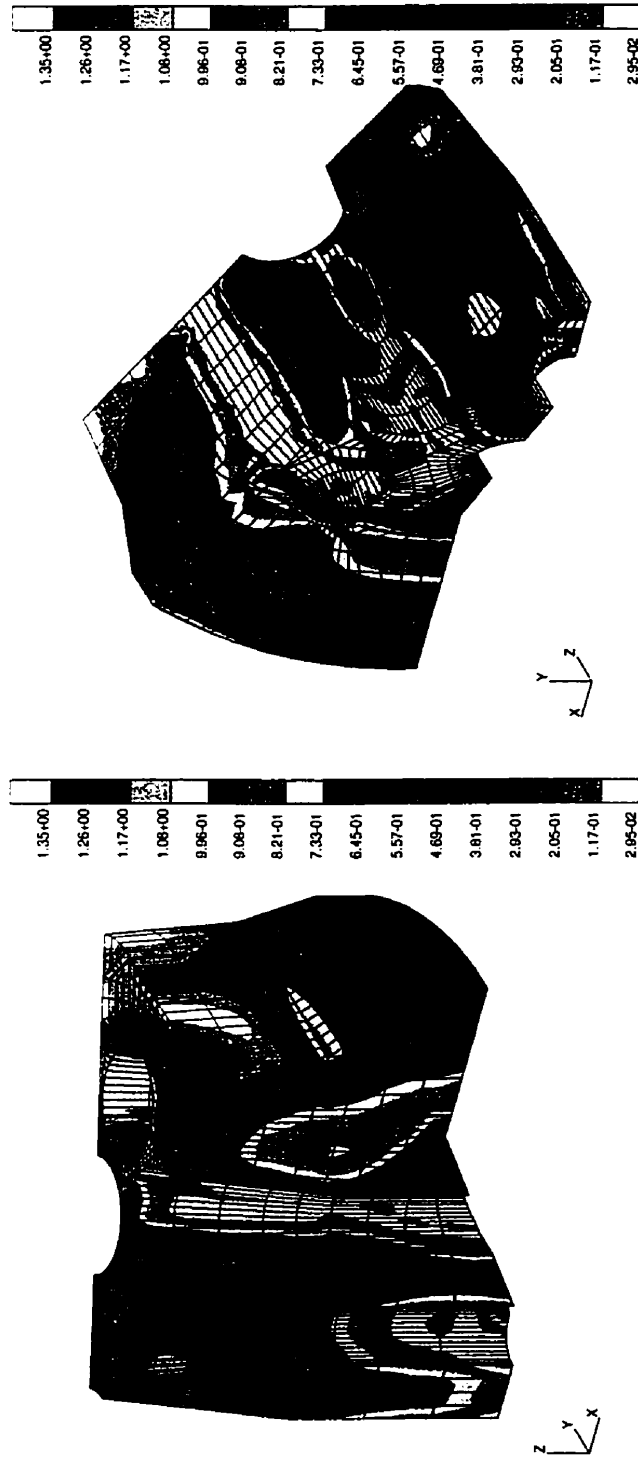
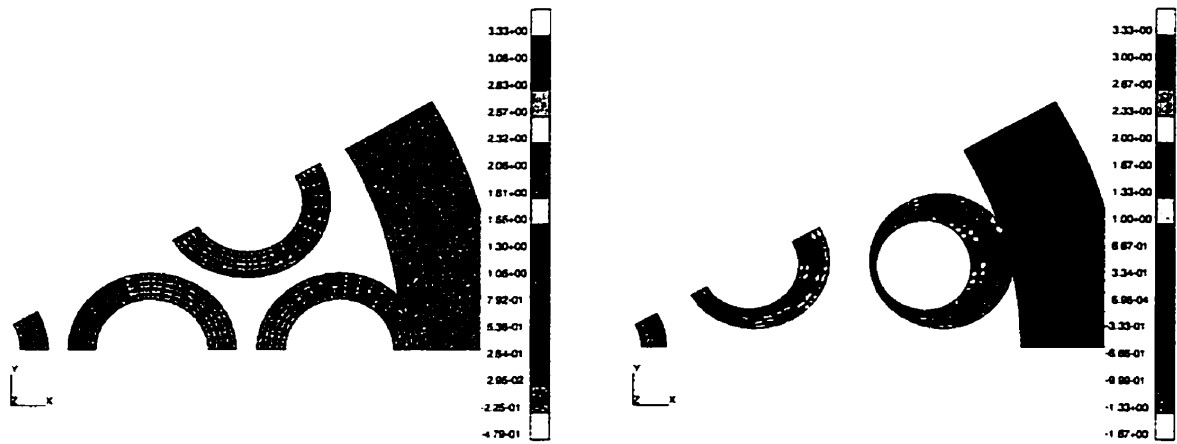
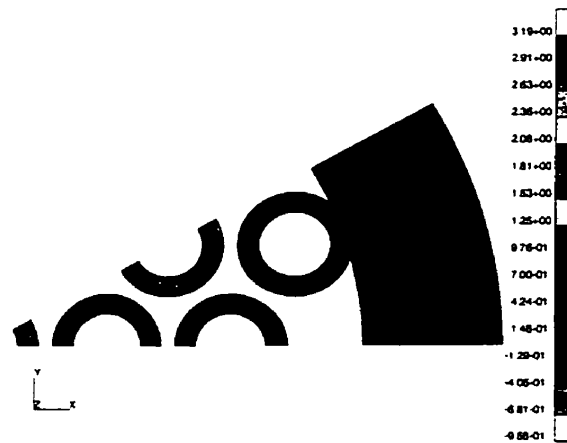


Figure 7.21 – Contrainte de von Mises normalisée en service (CS 6-31)



(a) Dispositif LH19T15S

(b) Dispositif A19K15S



(c) Dispositif CS 6-31

Figure 7.22 – Statuts de contact aux interfaces en service

faible volume plastifié à l'ultime (voir Figure 7.13(a)), c'est tout de même ce dernier qui se dégrade le plus rapidement au delà de la limite en service. Cette situation s'explique par le fait que sous l'augmentation de la charge, le dispositif CS 6-31 n'a pu propager adéquatement la plastification dans le bloc au détriment d'une augmentation de l'intensité de la déformation plastique équivalente. Quant aux deux autres dispositifs (LH19T15S et A19K15S), l'augmentation de l'intensité de la plastification a été plus faible en raison d'une meilleure distribution de la plastification dans les blocs d'ancrage. Dans le même ordre d'idées, les Figures 7.26, 7.28 et 7.28 montrent également une détérioration importante des dispositifs. Considérant les contraintes de von Mises normalisées maximales, on remarque que les dispositifs LH19T15S, A19K15S et CS 6-31 subissent une augmentation respective de 15 %, 9 % et 25 %. Ce constat montre encore une fois la détérioration prédominante du dispositif CS 6-31 au-delà de la limite d'utilisation en service. Finalement, les distributions des statuts de contact aux interfaces, tels que présentés à la Figure 7.29, montrent une augmentation substantielle des zones allant du décollement au contact sans glissement. Cette situation a pour effet de diminuer considérablement l'effet de confinement des plots dans les alvéoles et par le fait même, la rigidité globale des blocs d'ancrage.

7.3 Étude paramétrique à l'interface toron-mors d'ancrage

L'étude que nous venons de mener sur les dispositifs d'ancrage multitorons a été effectuée en considérant une représentation équivalente du système toron-mors d'ancrage à l'aide de plots tronconiques (voir Figure 1.5). On rappelle que cette stratégie, jumelée aux caractéristiques mécaniques et géométriques des dispositifs, a permis d'exploiter une certaine symétrie et par le fait même, de simplifier considérablement le problème. Cependant, le contexte d'utilisation réel de ces dispositifs est toute autre. En effet, des tests expérimentaux menés sur des dispositifs d'ancrage mono- (Michaud et Bastien, 1996; Bastien, 1992) et multitorons (Bastien, 1992) à l'aide de plots tronconiques et systèmes toron-mors d'ancrage réels ont permis de faire ressortir l'influence de ces derniers sur le comportement déformationnel des dispositifs. Entre autres, les dispositifs étudiés à l'aide de systèmes toron-mors d'ancrage présentent un enfoncement supérieur des mors d'ancrage dans les alvéoles et par le fait même, des déformations supérieures en périphérie du bloc d'ancrage. Cependant, rien n'est mentionné quant à l'intensité ainsi qu'à l'étendue de la plastification dans ce dernier. On rappelle, et tel que mentionné au Chapitre 3, que le surcroît de rigidité, engendré par l'utilisation d'un plot tronconique ne permet pas de reproduire fidèlement l'enfoncement d'un mors d'encrage en fonction du chargement. Cette différence de rigidité est bien entendu une conséquence de la nature monolithique du plot, comparativement à un système toron-mors d'ancrage, où les trois clavettes composant le mors sont libres de se déformer dans la direction circonférentielle et de pénétrer le toron au niveau des encoches (voir Figure 3.10) sous l'effet des pressions radiales provoquées par l'enfoncement du mors dans l'alvéole. Il importe de noter qu'il aurait été très intéressant de modéliser également le comportement de chacun des fils du toron afin de déterminer la distribution des efforts dans ce dernier. L'auteur en est parfaitement conscient, mais le mandat actuel est plutôt de déterminer un comportement équivalent d'un

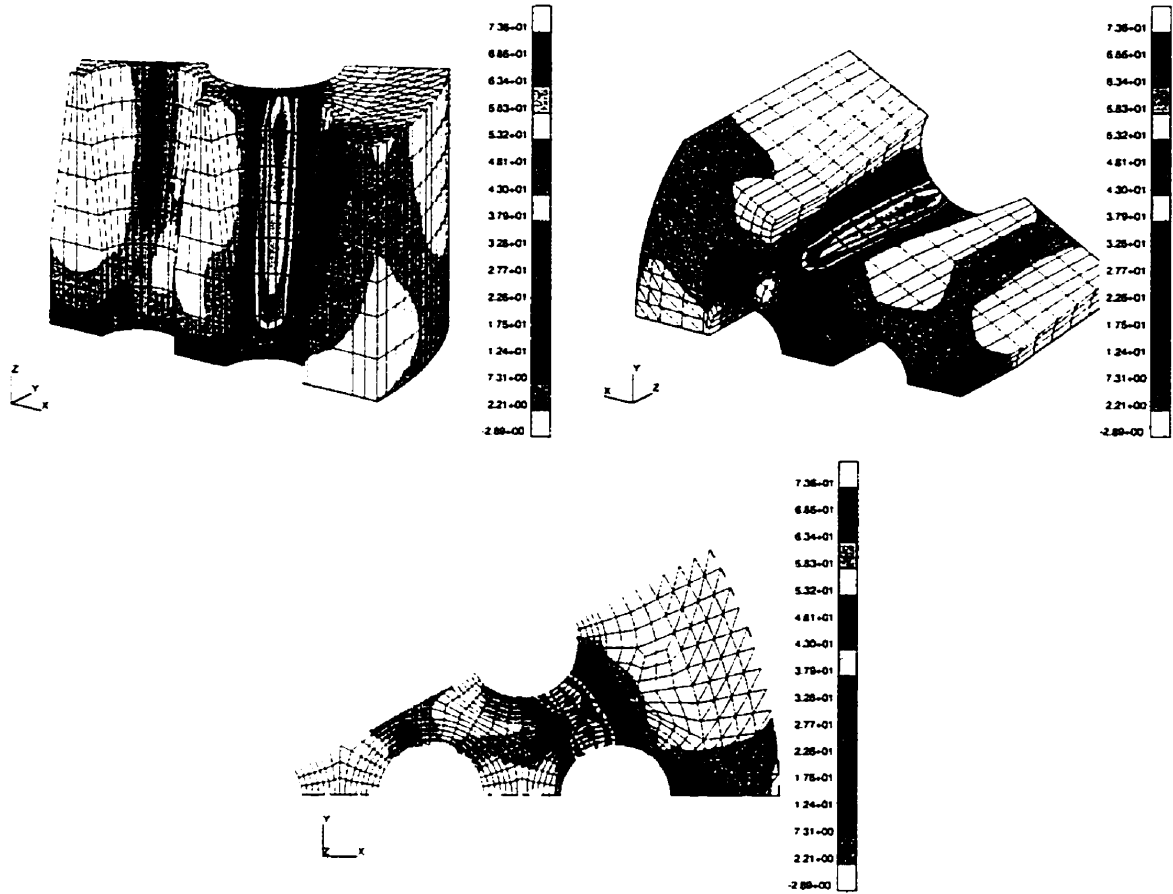


Figure 7.23 – Déformation plastique équivalente normalisée à l'ultime (LH19T15S)

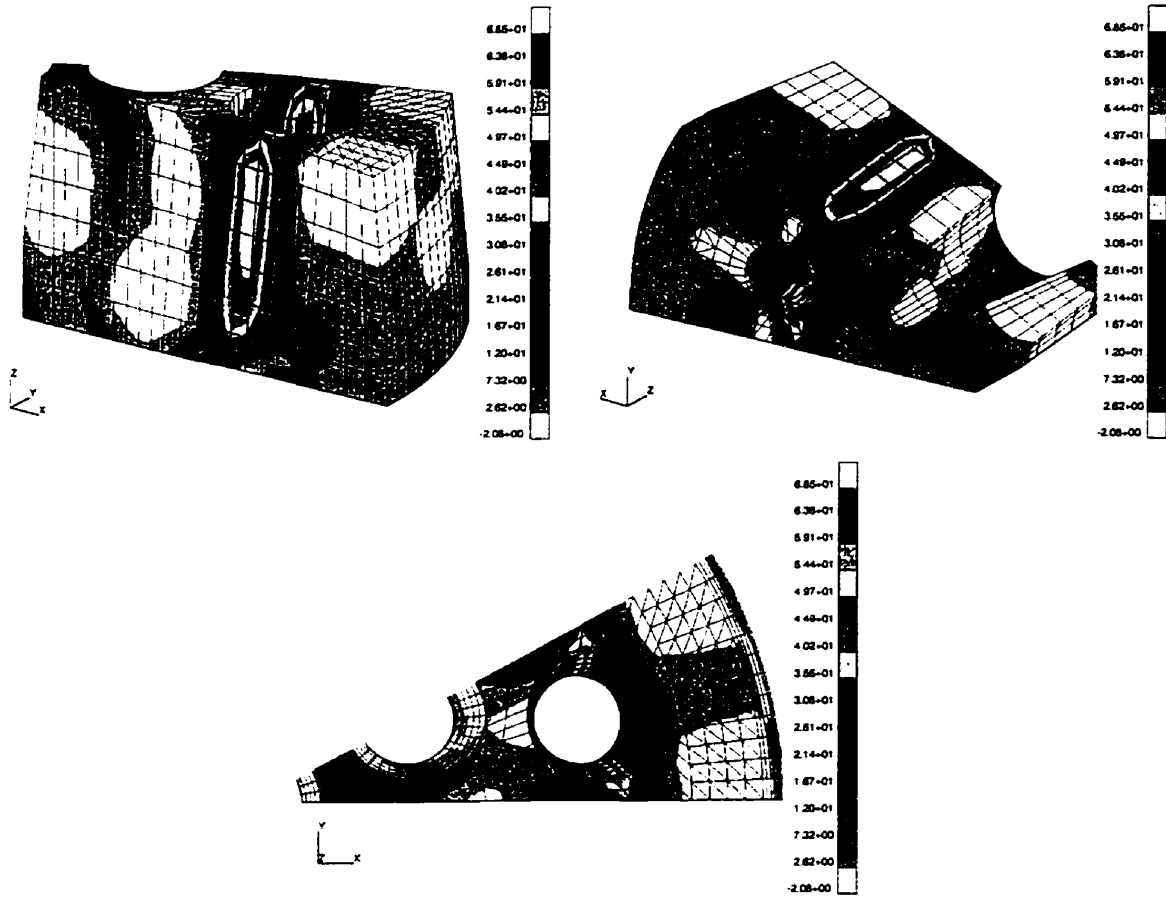


Figure 7.24 – Déformation plastique équivalente normalisée à l'ultime (A19K15S)

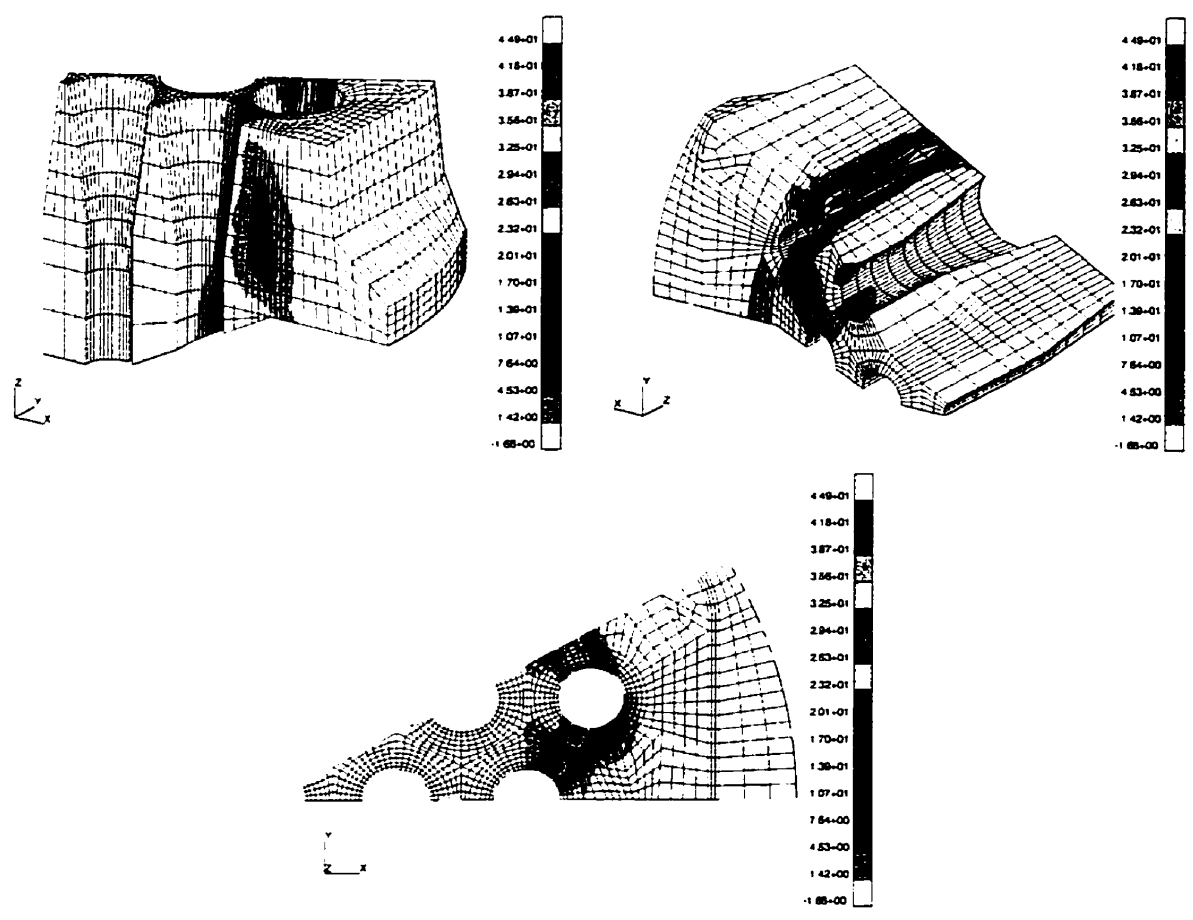


Figure 7.25 – Déformation plastique équivalente normalisée à l'ultime (CS 6-31)

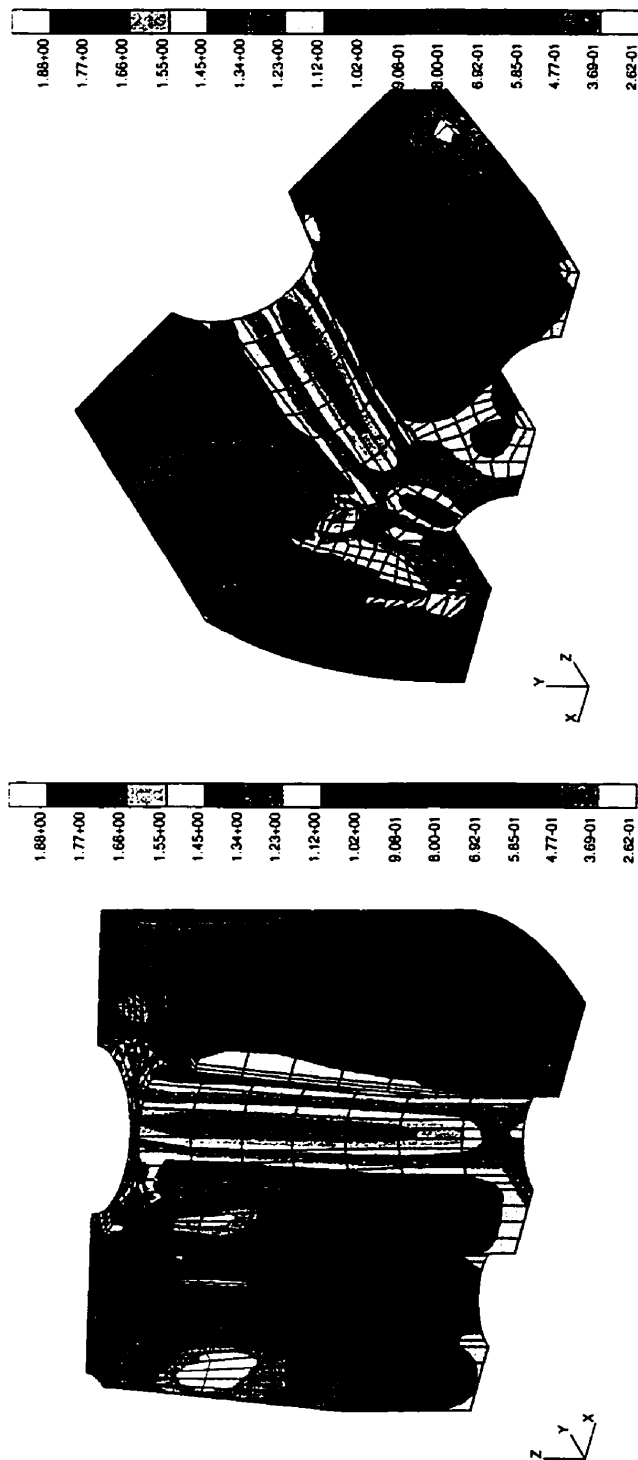


Figure 7.26 – Contrainte de von Mises normalisée à l'ultime (LH19T15S)

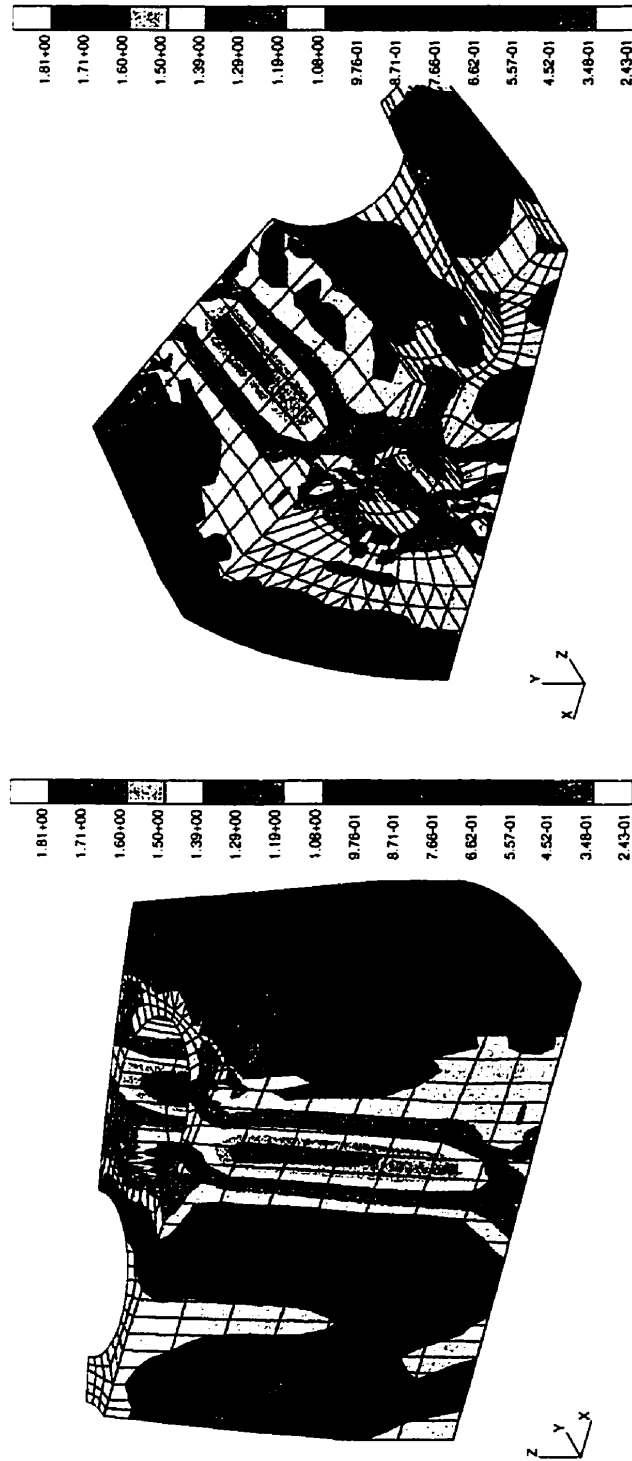


Figure 7.27 – Contrainte de von Mises normalisée à l'ultime (A19K15S)

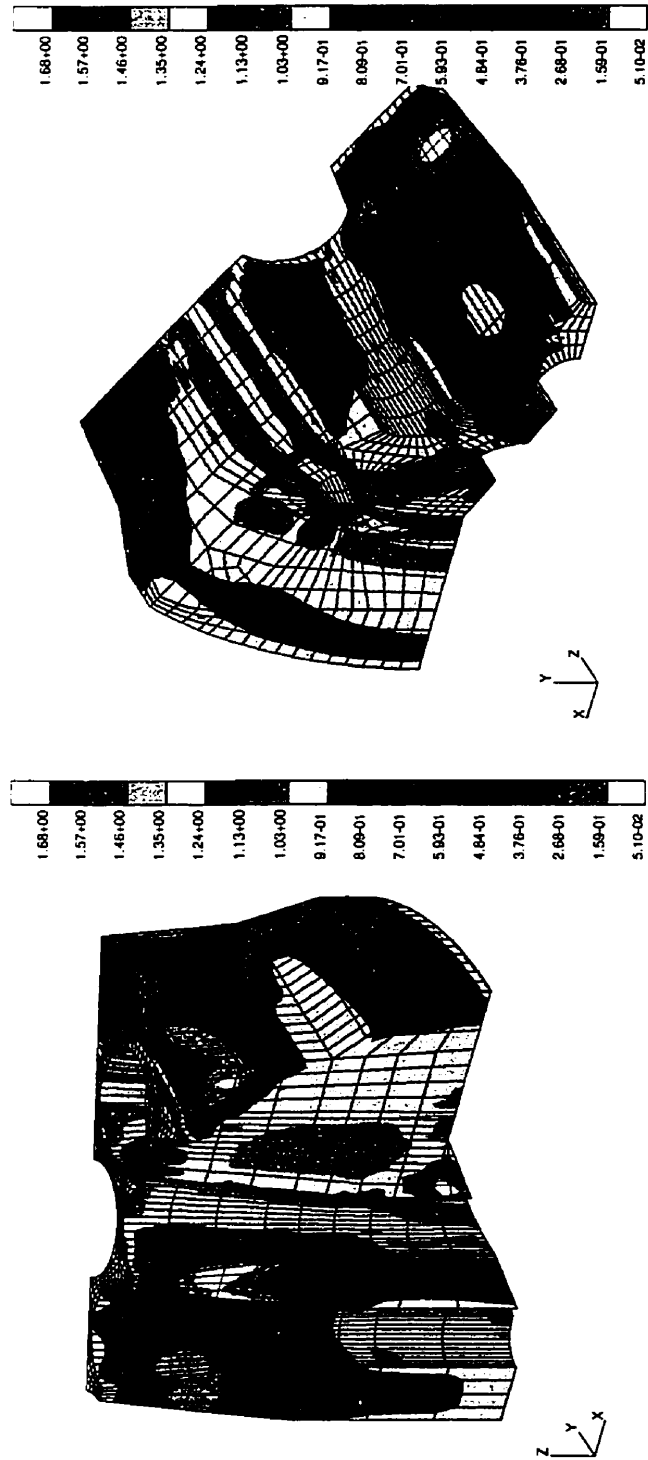
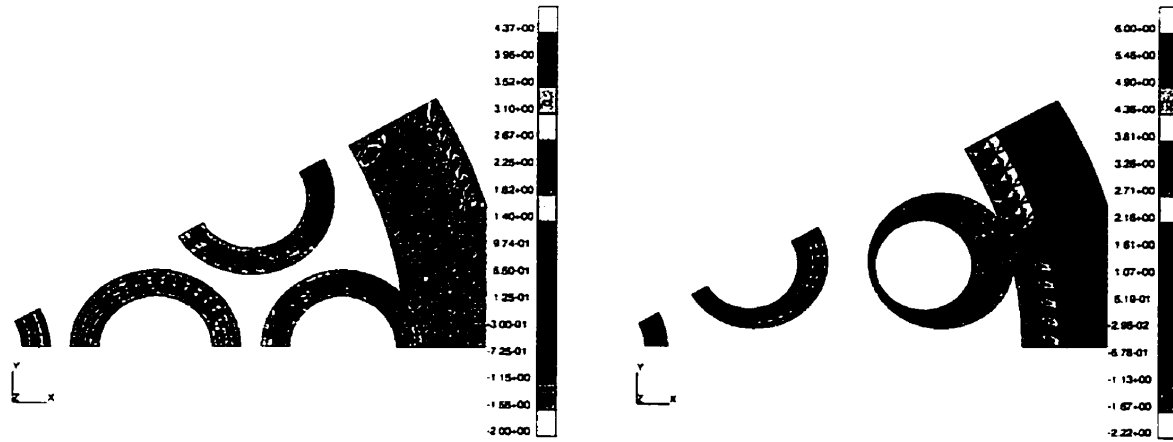
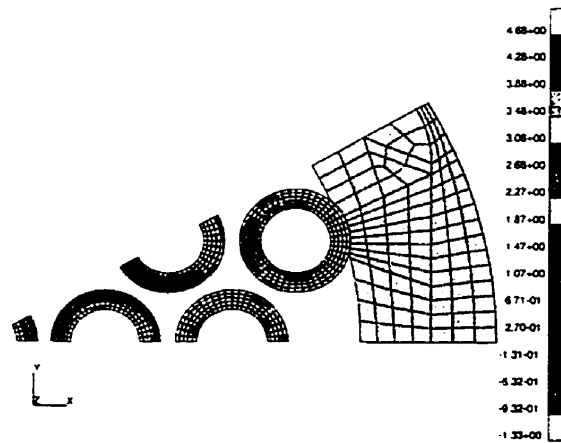


Figure 7.28 - Contrainte de von Mises normalisée à l'ultime (CS 6-31)



(a) Dispositif LH19T15S

(b) Dispositif A19K15S



(c) Dispositif CS 6-31

Figure 7.29 – Statuts de contact aux interfaces à l'ultime

système toron-mors d'ancrage afin de reproduire le plus fidèlement possible le transfert des efforts du mors au bloc d'ancrage. De plus, une première étude numérique menée par Renault (2000) sur le comportement d'un système toron-mors d'ancrage a permis de constater que le comportement interne du toron ainsi que la plage potentielle des propriétés mécaniques des clavettes n'influent en rien (ou très peu) le comportement du dispositif. En contrepartie, la pénétration des encoches dans le toron ainsi que la distribution des clavettes autour du toron ont un effet prédominant sur le comportement du dispositif.

Dans la présente étude, on propose de concentrer les efforts sur la bonne représentation de l'effet de l'enfoncement d'un système toron-mors d'ancrage dans un alvéole conique sur le comportement déformationnel d'un dispositif d'ancrage. Pour ce faire, on entend déterminer le comportement à l'interface toron-mors d'ancrage à l'aide du modèle spécialisé présenté aux Chapitres 3 et 4 et de considérer, par le fait même, la nature distincte des trois clavettes composant le mors d'ancrage. De plus, sachant que la tension admissible en service dans un toron est la même quelque soit la nature du dispositif d'ancrage (BPEL, 1990; SETRA, 1990), il paraît opportun de procéder à la détermination des paramètres sur un dispositif monotoron de même nature (diamètre des torons, propriétés d'interface, etc.) que le dispositif d'ancrage multitorons. Quant à la procédure de calage, celle-ci consiste à coupler la résolution par éléments finis avec un algorithme de réseaux neuromimétiques (Henchi *et al.*, 1997), technique tout à fait appropriée pour des problèmes d'identification de paramètres physiques de systèmes complexes.

Cette section présente donc une description du dispositif d'ancrage à l'étude, quelques informations relatives au programme expérimental ayant permis l'obtention des résultats nécessaires au calage et finalement, la stratégie proposée permettant la détermination des paramètres à caler.

7.3.1 Description du dispositif d'ancrage

Le dispositif d'ancrage monotoron étudié dans le cadre de cette thèse est celui de type LH1T15 de la société Spie-Batignolles (Spie-Batignolles, 1986). Tel qu'illustré à la Figure 7.30, ce dernier est constitué généralement d'un bloc de forme cylindrique de 50 mm de diamètre et d'une hauteur de 55 mm. Comme son nom l'indique, ce dispositif est constitué d'une seule alvéole conique d'un diamètre maximal (partie supérieure) de 34 mm. Définie sur la hauteur totale du bloc, cette alvéole possède donc, tout comme le dispositif LH19T15, un angle de 7.0° avec l'axe longitudinal. Pour ce qui est du mors d'ancrage, celui-ci est constitué de trois composantes métalliques, appelées clavettes, reliées entre elles à l'aide jonc métallique. Règle générale, les clavettes s'enfilent autour du toron pour buter contre la paroi interne de l'alvéole. En parallèle à cette action, la surface interne de chaque clavette agrippe le toron et coince par l'intermédiaire des encoches présentes sur les clavettes. Comme on peut le constater, la face externe de chacune des clavettes fait un angle de 7.25° par rapport à l'axe longitudinal. La face interne étant parallèle à ce même axe, il est fort probable que cette écart de 0.25° avec la paroi de l'alvéole soit maintenue après enfillement du mors d'ancrage autour du toron. Tout comme les dispositifs multitorons, ce dispositif est généralement appuyé sur une plaque

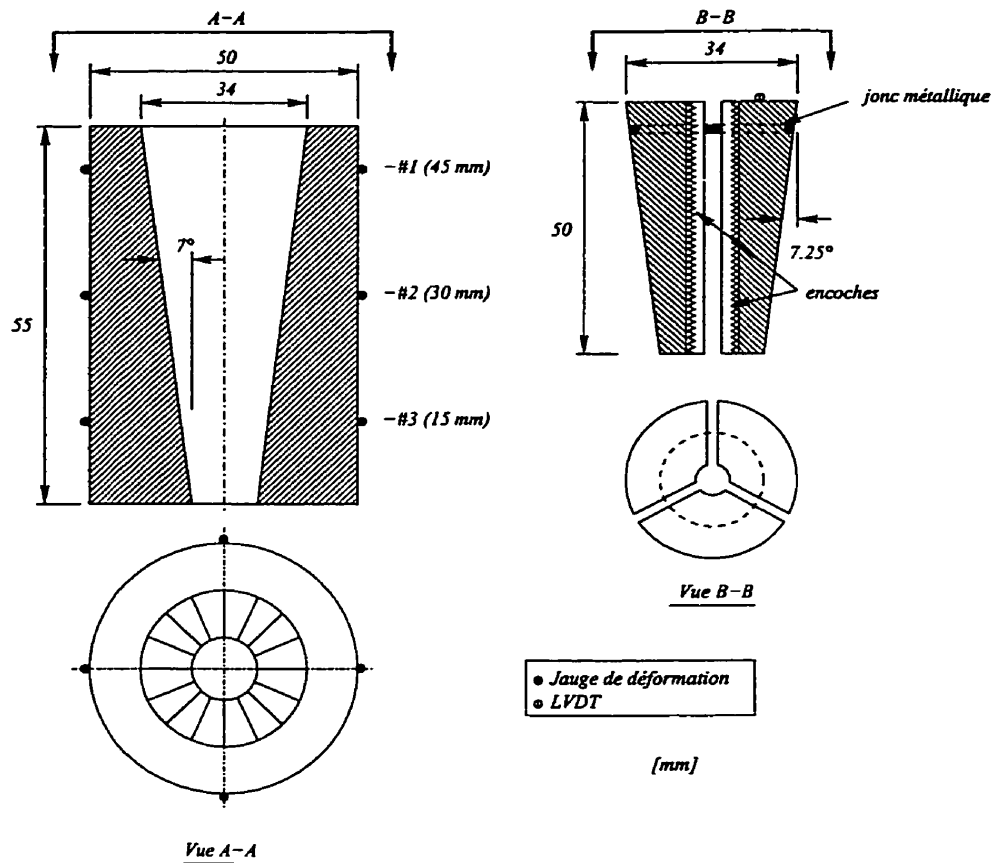


Figure 7.30 – Caractéristique géométrique du dispositif LH1T15

épaisse lors de la mise en tension. Cependant, en raison des conditions expérimentales, cette dernière n'est pas considérée dans le cadre de cette étude. Au niveau des interfaces, ce type de dispositif monotoron compte trois interfaces. Une première entre le toron et le mors d'ancrage, une seconde entre le mors d'ancrage et la paroi interne de l'alvéole et finalement, une troisième entre la face inférieure du bloc et l'appui rigide.

Pour ce qui est des propriétés mécaniques, le bloc ainsi que le mors d'ancrage du dispositif LH1T15 sont constitués des mêmes matériaux que le dispositif LH19T15S. On réfère donc le lecteur au Tableau 7.1 quant aux valeurs à utiliser. Comme son nom l'indique, le dispositif LH1T15 est utilisé pour la mise en tension d'un toron standard (contrairement au toron de type SUPER) dont les caractéristiques sont présentées au Tableau 7.7.

Tableau 7.7 – Caractéristiques d'un toron T15

Section effective (mm^2)	139
Contrainte nominale de rupture (MPa)	1770
Force nominale de rupture (kN)	246
Contrainte maximale à l'origine (MPa)	1416
Force maximale à l'origine (kN)	197
Module de Young: $2 \cdot 10^5$ MPa, Coefficient de Poisson: 0.30	

7.3.2 Résultats expérimentaux

L'ensemble des résultats expérimentaux utilisés dans le cadre de cette étude sont ceux proposés par Bastien (1992) et Michaud et Bastien (1996). Les essais furent menés au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées ainsi que dans les laboratoires du Département de génie civil de l'Université Laval.

Brièvement, la procédure expérimentale consiste à effectuer un suivi de l'évolution du champ de déformation en périphérie du bloc d'ancrage ainsi que de l'enfoncement du mors d'ancrage dans l'alvéole conique et ce, pour une mise en charge correspondant aux conditions d'utilisation en service. Selon le Tableau 7.7, l'effort à induire dans le toron est de 197 kN correspondant à 80% de la limite ultime de rupture du toron. Pour ce faire, le bloc d'ancrage fut instrumenté à l'aide de douze jauges de déformations bidirectionnelles localisées uniformément sur sa périphérie et ce, à trois positions le long de l'axe longitudinale (15, 30 et 45 mm). Finalement, un capteur de déplacement de type LVDT fut installé sur la partie supérieure du mors d'ancrage afin de permettre le suivi de son enfoncement. La Figure 7.30 montre la disposition de l'instrumentation sur le dispositif d'ancrage. Également, la Figure 7.31 montre certaines caractéristiques de la procédure expérimentale dont la localisation des jauges, la mise en place des composantes ainsi que le banc d'essai utilisé. Les résultats retenus sont tirés d'une série de cinq essais et sont tels que présentés aux Tableaux 7.8 et 7.9. Ces derniers présentent respectivement l'enfoncement du mors d'encrage à trois niveaux de chargement ainsi que les valeurs moyennes et extrêmes des profils de déformations axiales et circonférentielles à chargement maximal.

Tableau 7.8 – Résultats expérimentaux: enfoncement du mors d'ancrage

Niveau (kN)	Enfoncement (mm)		
	Minimum	Moyenne	Maximum
49	0.68	1.25	1.61
123	1.60	2.56	3.10
197	2.70	3.76	4.43



Photo: Daniel Marceau

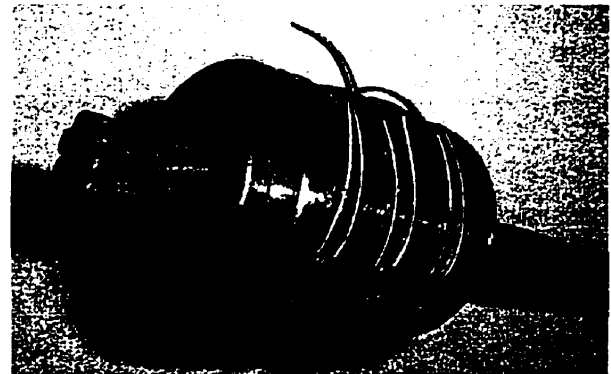


Photo: Olivier Doucet

(a) Disposition des jauges de déformation

(b) Mise en place des composantes

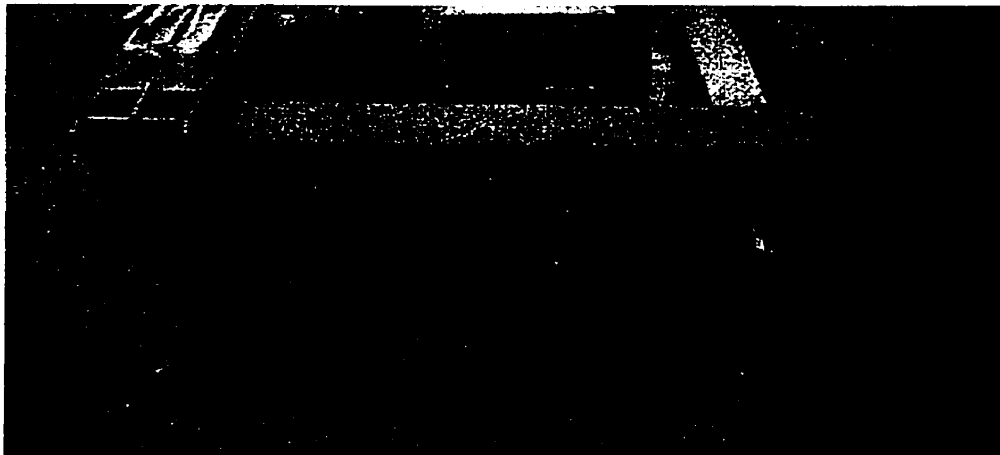


Photo: Daniel Marceau

(c) Banc d'essai

Figure 7.31 - Caractéristiques de la procédure expérimentale

Tableau 7.9 – Résultats expérimentaux: profils de déformation à chargement maximal

Position	Axiale ($\mu\epsilon$)			Circonférentielle ($\mu\epsilon$)		
	Minimum	Moyenne	Maximum	Minimum	Moyenne	Maximum
#1	-1235	-1754	-2436	2684	3417	5022
#2	-724	-1041	-1154	1475	2629	3694
#3	-515	-642	-817	679	849	1035

7.3.3 Description de la stratégie proposée

Selon les informations expérimentales disponibles ainsi que le modèle développé aux Chapitres 3 et 4 en ce qui a trait au comportement à l'interface toron-mors d'ancrage, on se propose d'effectuer un ensemble de résolutions permettant de simuler la mise en charge du dispositif d'ancrage monotoron LH1T15 par la méthode des éléments finis et de créer une base de données dans laquelle sont réunies des combinaisons probables de paramètres physiques et les résultats des analyses qui correspondent à ces combinaisons. Une fois complétée, cette base de données est soumise à une procédure de calage par la méthode des réseaux neuromimétiques. Comme son nom l'indique, cette méthode (Henchi *et al.*, 1997) constitue une modélisation mathématique des réseaux de neurones qui présente des possibilités potentiellement illimitées (Langis, 1997). Durant cette phase, le réseau est entraîné à l'aide de la base de données jusqu'à l'obtention d'une précision satisfaisante. Finalement, le réseau peut être interrogé sur les propriétés physiques potentielles correspondant à certaines mesures expérimentales spécifiées.

Les réseaux neuromimétiques et les éléments finis, bien qu'intimement liés dans le processus de calage des constantes physiques, s'interfacent sans couplage contrairement aux méthodes statistiques et d'optimisation. Dans cette optique, et telle que montrée à la Figure 7.32, l'interaction des deux méthodes ne présente aucune difficulté mathématique ou informatique particulière. Les principales difficultés résident principalement dans la détermination des paramètres physiques à caler ainsi que dans la structure du réseau à utiliser. Dans le cadre de cette thèse, la stratégie consiste donc à reproduire numériquement les conditions expérimentales et d'en extraire les résultats correspondants à ceux montrés aux Tableaux 7.8 et 7.9 et ce, pour différentes combinaisons de paramètres physiques à caler. Considérant la problématique entourant le système toron-mors d'ancrage, on propose de caler les paramètres liés à la loi d'interface spécialisée présentée au Chapitre 3 notés η , g_0 , μ_{tm} (tels que présentés dans les expressions (3.52) et (3.54a)) ainsi que le coefficient de frottement à l'interface mors d'ancrage-bloc d'ancrage noté μ_{mb} .

7.3.3.1 Analyses par éléments finis

Selon les caractéristiques géométriques montrées à la Figure 7.30 ainsi que par la nature même des propriétés mécaniques et du chargement, le dispositif d'ancrage est discrétisé en

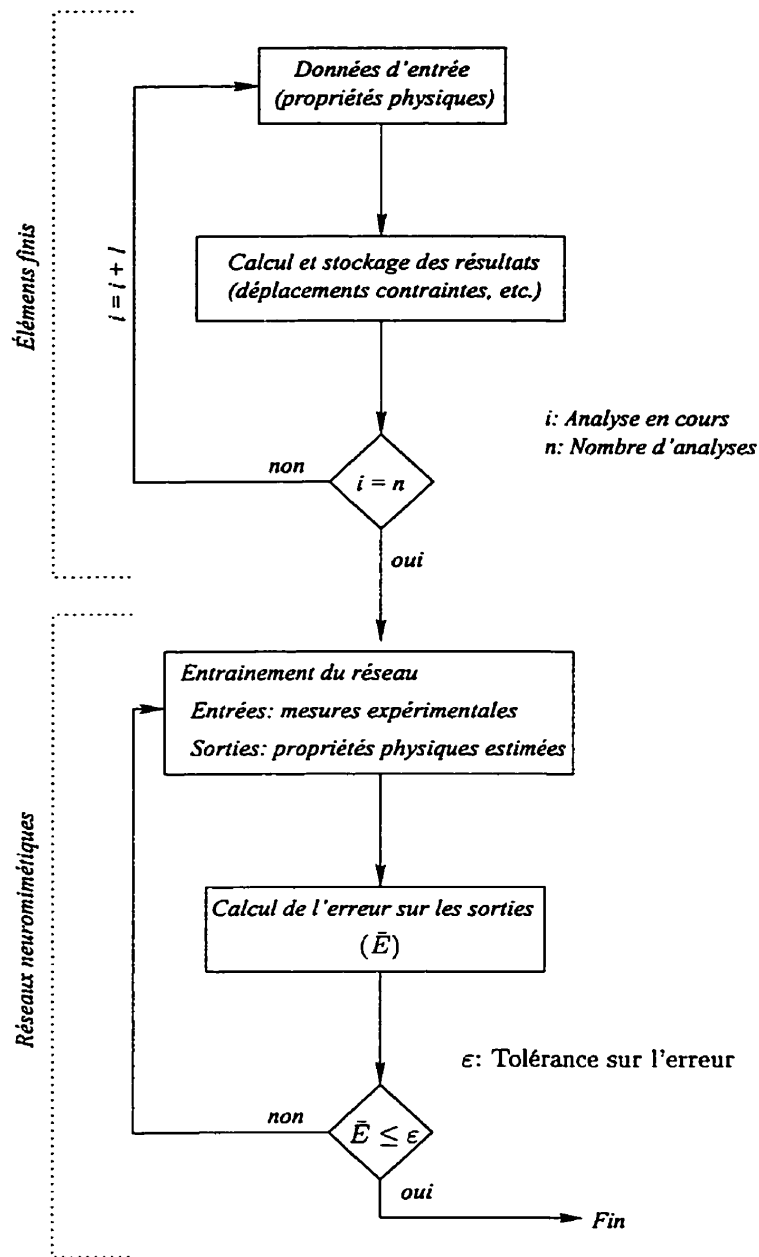


Figure 7.32 – Interaction entre la méthode des éléments finis et le calage par réseaux neuro-mimétiques

considérant une portion de 60° définie sur la base d'un sixième du mors d'ancrage (une demi-clavette). Faisant l'hypothèse que les clavettes composant le mors d'ancrage sont uniformément distribuées sur la périphérie du toron (voir Figure 7.31(b)), le maillage ainsi que les détails de la portion considérée sont tels que montés à la Figure 7.33. Comme on peut le constater, la disconnection des composantes du mors d'ancrage fait en sorte que la portion considérée fait un angle de 56° et compte donc, par le fait même, une extrémité libre. De plus, afin de respecter les conditions expérimentales (Michaud et Bastien, 1996), le bloc d'ancrage repose directement sur un appui rigide. On remarque aussi que le système toron-mors d'ancrage, lorsqu'en position de pré-chargement à l'intérieur de l'alvéole, dépasse d'approximativement 5 mm au dessus du bloc d'encrage (voir Figure 7.31(b)). Cette situation correspond aux conditions réelles tout comme le bout de toron dépassant du mors d'ancrage. Finalement, la Figure 7.34 présente les maillages associés aux trois interfaces de contact. Considérant que l'alvéole subit un évasement important de sa partie supérieure durant la mise en charge Bastien (1992), il est tout indiqué d'utiliser une interpolation quadratique afin de représenter correctement les effets de flexion locale occasionnés par cet évasement. Les solides sont discrétisés à l'aide d'éléments isoparamétriques hexaédriques et prismatiques à 20 et 15 nœuds respectivement. La Figure 7.34 présente les recouvrements nécessaires à la définition des interfaces de contact. Les frontières ont été recouvertes à l'aide d'éléments quadrangles à huit nœuds. Finalement, le Tableau 7.10 présente quelques informations concernant les densités de maillage ainsi que le nombre d'équations à résoudre.

Tableau 7.10 – *Dispositifs d'ancrage LH1T15: quelques informations sur la densité de maillage*

Nombre d'éléments solides (P15,H20)	900
Nombre d'éléments de surface (Q8)	340
Nombre d'interfaces de contact	3
Nombre d'éléments de contact	180
Nombre de nœuds	5067
Nombre d'équations à résoudre	13969

Compte-tenu des propriétés mécaniques présentées au Tableau 7.1, le bloc d'ancrage est modélisé en considérant une loi de comportement élastoplastique en grandes transformations, telle que présentée aux Chapitres 2 et 4 avec une représentation objective du taux de contrainte par une dérivée de Jaumann. Quant à la portion de clavette et au toron, les données des Tableaux 7.1 et 7.7 permettent l'utilisation d'une simple loi de comportement élastique en petites déformations. Finalement, les interfaces mors d'ancrage-bloc d'ancrage et bloc d'ancrage-appui sont modélisés en considérant un frottement de type Coulomb. Le coefficient de frottement à l'interface bloc d'ancrage-appui est pris égale à μ_{bp} , tel que présenté au Tableau 7.2.

Tout comme les résolutions effectuées sur les dispositifs d'ancrage multitorons, celui-ci est résolu à l'aide de la méthode de Newton-Raphson jumelée à une technique de pilotage en longueur d'arc dont l'incrément est déterminé en pilotant le déplacement vertical (Z) du

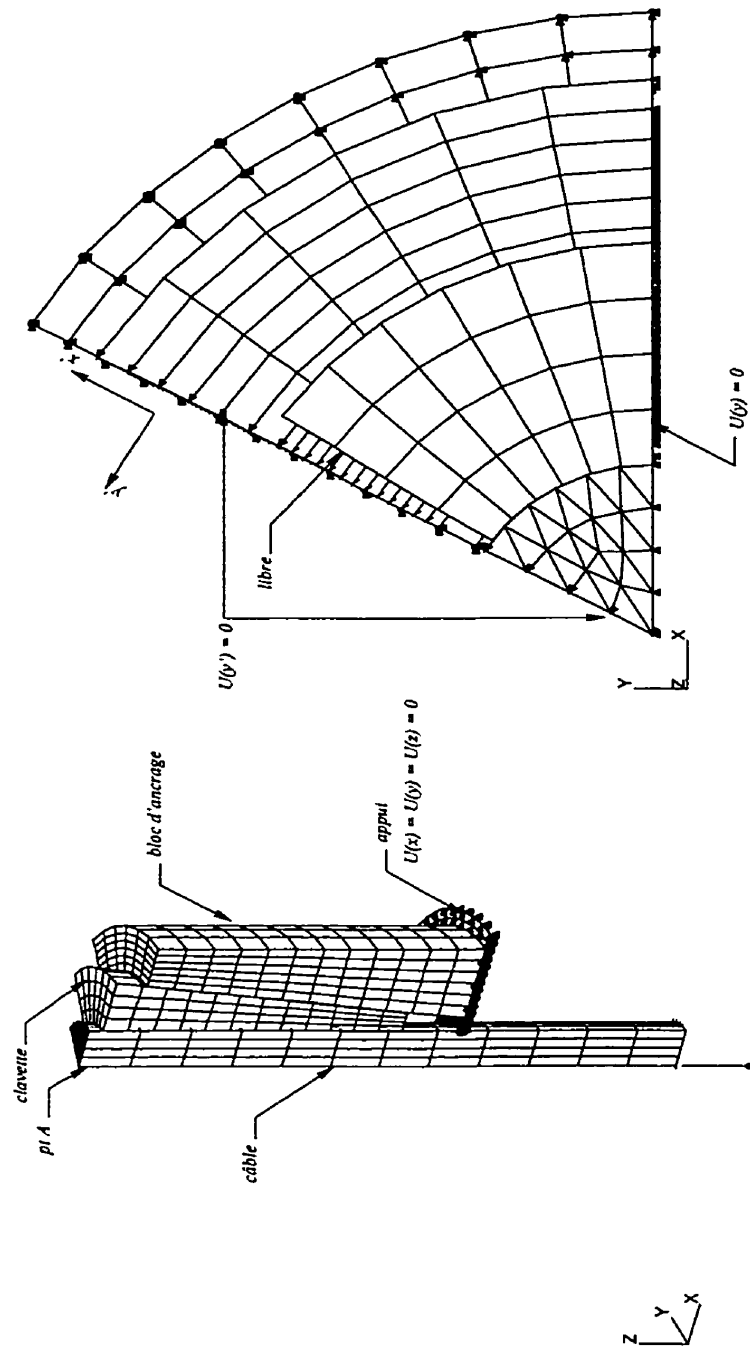


Figure 7.33 – Dispositifs d'ancrage LHT15: maillages utilisés et conditions aux limites

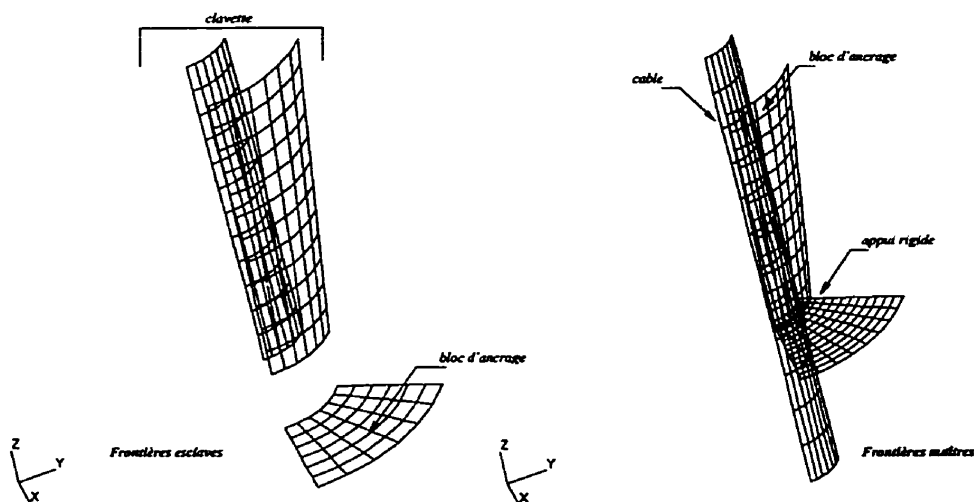


Figure 7.34 – Dispositifs d'ancrage LH1T15: interfaces candidates au contact

centre de la face supérieure du toron (pt A sur la Figure 7.33). Le paramètre de charge est associé à une charge concentrée unitaire appliquée sur la partie inférieure du toron, tel que montré à la Figure 7.33. Les interfaces de contact sont résolues en considérant des pénalités normale et tangentielle de 10^5 , jumelées à 4 augmentations des multiplicateurs de Lagrange sans factorisation. À l'interface toron mors d'ancrage, les pénalités axiale (ϵ_{T_1}) et circonférentielle (ϵ_{T_2}) sont fixées respectivement à 10^{10} et 10^5 . L'intégration numérique est obtenue en considérant un schéma de Gauss $3 \cdot 3 \cdot 3$ pour les hexaèdres et de Hammer-Gauss $3 \cdot 3$ pour les prismes triangulaires. Au niveau des éléments de contact, l'intégration est effectuée à l'aide d'un schéma de Gauss $3 \cdot 3$. Considérant le nombre restreint d'équations à résoudre, le système d'équations linéarisé est résolu à l'aide d'une méthode directe (LU).

Chacun des problèmes, correspondant à une combinaison de paramètres physiques à caler, a été résolu sur un ordinateur Pentium III 930 MHz Linux SMP possédant 1 Go de mémoire vive et a nécessité en moyenne 45 minutes de temps CPU selon le niveau de non-linéarité. Considérant le type ainsi que la localisation des résultats expérimentaux à reproduire, un suivi de l'enfoncement du mors ainsi que des déformations axiales et circonférentielles en périphérie du bloc d'ancrage aux trois niveaux identifiés à la Figure 7.31(a) a été effectué. Cependant, afin de tenir compte de la nature moyennée des résultats expérimentaux, le suivi des déformations est effectué en trois positions (0° , 30° et 60°) afin de permettre la détection de la variabilité de ces quantités sur la périphérie du bloc d'ancrage. Pour un champ de déformations donné, la valeur à utiliser est obtenue par l'expression:

$$\epsilon = \frac{3(\epsilon_0 + \epsilon_{60}) + 6\epsilon_{30}}{12} \quad (7.1)$$

où les coefficients de pondération 3 et 6 représentent la répétitivité d'une déformation sur la

périphérie totale du bloc d'ancrage (douze déformations).

7.3.3.2 Calage des paramètres et discussion

Avant même de procéder au calage proprement dit, il importe d'effectuer une étude de sensibilité afin de déterminer, selon le choix préalablement établi des paramètres physiques, ceux susceptibles d'influencer le comportement du dispositif d'ancrage ainsi que les plages permettant de bien cerner les résultats expérimentaux. Dans cette optique, les Figures 7.35, 7.36 et 7.37 montrent la sensibilité des paramètres η , g_0 , μ_{tm} et μ_{mb} sur l'enfoncement du système toron-mors d'ancrage ainsi que sur les déformations axiales et circonférentielles en périphérie du bloc d'ancrage au point 2 (voir Figure 7.30). On constate aisément la grande sensibilité des paramètres η et g_0 ainsi que celle du coefficient de frottement μ_{mb} à l'interface mors-bloc d'ancrage. En particulier, on remarque sur les Figures 7.35(a), et 7.35(b) l'augmentation du raidissement du mécanisme en fonction de l'enfoncement du système toron-mors. Plus g_0 est grand, plus l'enfoncement du mors est important. En contrepartie, plus η est grand, plus le raidissement survient rapidement pour une même valeur de g_0 . On constate donc un enfoncement maximal pour $g_0 = 1.0$ et $\eta = 100$. Pour ce qui est de la déformation axiale, les Figures 7.36(a) et 7.36(b) montrent que cette dernière diminue avec une augmentation du coefficient de frottement μ_{mb} . Si ce dernier est fixe, on constate que la déformation diminue également avec la valeur du paramètre η et inversement avec la valeur de g_0 . Quant à la déformation circonférentielle, les Figures 7.37(a) et 7.37(b) permettent de constater qu'elle est surtout sensible à la variation du coefficient de frottement μ_{mb} . Finalement, pour ce qui est du coefficient de frottement à l'interface toron-mors d'ancrage et noté μ_{tm} , nous avons choisi de vérifier son influence en considérant la combinaison des paramètres g_0 , η et μ_{mb} permettant de générer les conditions les plus défavorables en terme de déformations aux points de contrôle. Dans un tel contexte, les Figures 7.35(c), 7.36(c) et 7.37(c) montrent que le paramètre μ_{tm} n'a que très peu d'influence sur le comportement du dispositif.

Compte-tenu des résultats obtenus, le Tableau 7.11 résume les sensibilités observées ainsi que les plages à considérer dans la procédure de calage. Entre autres, on remarque que le coefficient de frottement μ_{tm} est exclu de la procédure et fixé à une valeur typique de 0.3. Conséquent à ces dernières observations, et dans le but de vérifier l'influence de la variabilité des combinaisons de paramètres sur la solution, on propose de construire une base de données établie selon une distribution uniforme des valeurs entre les paramètres. Considérant une subdivision des plages en 4 intervalles, la création de la base de données implique donc 125 résolutions par éléments finis du problème de mise en charge du dispositif d'ancrage monotoron.

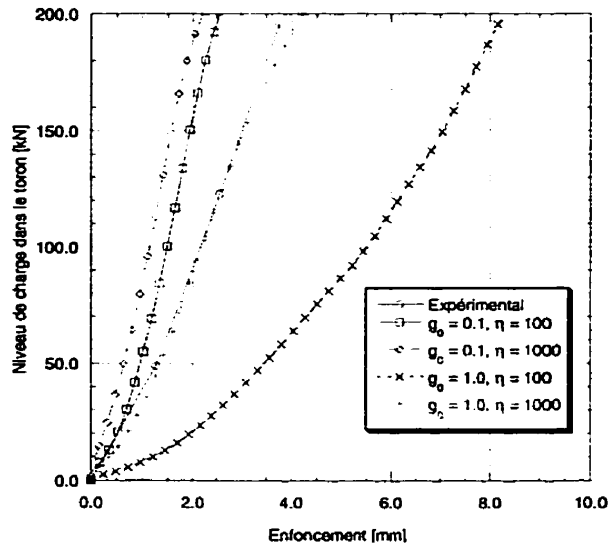
Tableau 7.11 – Sensibilité et plage des paramètres à caler

Paramètre	Sensibilité	Minimum	Maximum
η	grande	100	1000
g_0	grande	0.1	1.0
μ_{tm}	faible		0.30
μ_{mb}	grande	0.05	0.20

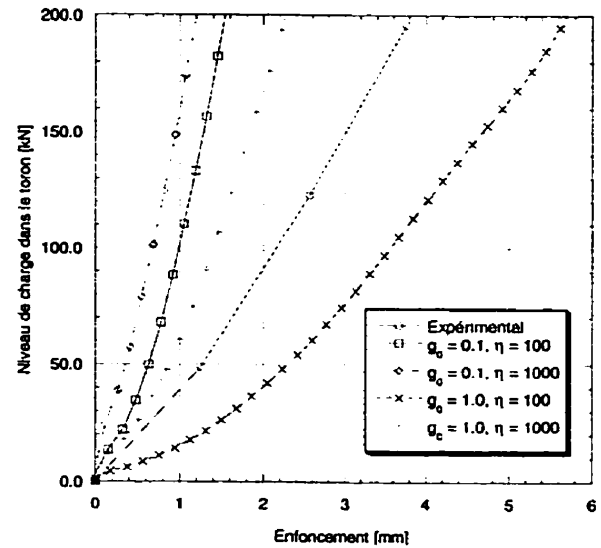
Une fois la base de données établie, la procédure de calage par réseau neuromimétique est élaborée en considérant trois architectures différentes. Compte-tenu du nombre de données expérimentales (9) ainsi que du nombre de paramètres à caler (3), l'architecture des réseaux de neurones est de la forme 9-n-m-3 où 9 et 3 représentent respectivement le nombre de neurones d'entrée et de sortie et n et m, le nombre de couches intermédiaires. Une règle de bonne pratique consiste à élaborer des réseaux possédant un nombre de neurones avoisinant le nombre de combinaisons contenues dans la base de données. Dans notre cas, on devrait retenir des réseaux tels que le produit $9n + nm + 3m \approx 125$ soit respecté. Dans cette optique, nous avons effectué le calage en considérant cinq différentes architectures de réseaux; trois réseaux possédant respectivement 6, 8 et 12 nœuds sur une couche intermédiaire et finalement, deux réseaux possédant respectivement 6, 8 nœuds sur deux couches intermédiaires. Pour ce qui est du traitement, nous avons utilisé le logiciel commercial «Propagator» de la société ARD Corporation. Les facteurs d'apprentissage et d'oubli sont respectivement $\alpha = 0.1$ et $\gamma = 0.5$. La méthode utilisée consiste à effectuer un nombre maximal de cycles d'apprentissage et d'interroger le réseau sur la base du cycle correspondant à l'erreur minimale d'apprentissage. Dans le cadre de la présente étude, nous avons effectué 25000 cycles d'apprentissage.

La Figure 7.38 montre une courbe typique de convergence d'un des réseaux étudiés dans les 2000 premiers cycles d'apprentissage. En particulier, la courbe représentant l'erreur sur la validation est obtenue en effectuant une vérification de l'aptitude du réseau, selon l'état d'entraînement courant, à obtenir les solutions correspondantes à un ensemble de combinaisons échantillonnées parmi toutes les combinaisons obtenues par éléments finis. On remarque que la vitesse de convergence des réseaux est très rapide au départ et diminue graduellement jusqu'à la fin des cycles.

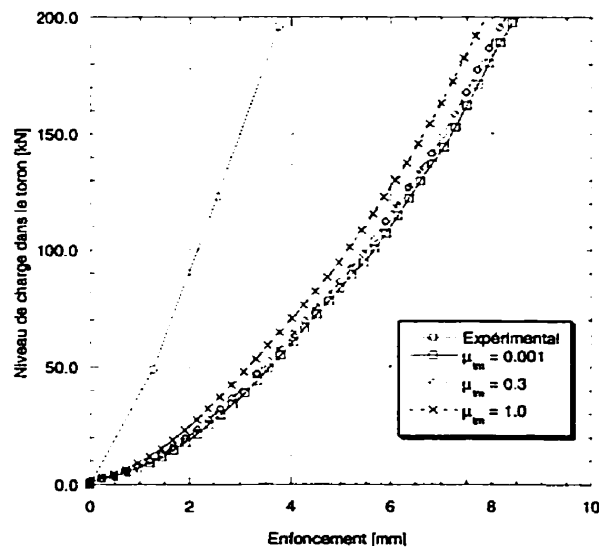
Le Tableau 7.12 présente les résultats obtenus pour les cinq architectures retenues. Comme on peut le constater, les erreurs d'apprentissage tendent à diminuer avec l'augmentation de la taille du réseau. Pour ce qui est des paramètres à caler, on remarque que les trois quantités évoluent dans la même direction, ce qui démontre la stabilité de la solution versus l'échantillonnage fourni aux réseaux. En particulier, le coefficient de frottement entre le mors d'ancrage et le bloc d'ancrage (μ_{mb}), qui varie approximativement entre 0.06 et 0.07, correspond à une interface entre aciers de dureté de surface élevée; ce qui est effectivement le cas pour le dispositif à l'étude. Quant au coefficient g_0 , il semble justifié de croire que ce dernier peut être assimilé à la profondeur d'une encoche qui est approximativement de l'ordre de 0.5 mm, jumelée à la déformation supplémentaire d'un véritable toron constitué de fils (Jolicoeur, 1993), dont nous n'avons pas tenu compte dans le présent modèle. Finalement, le paramètre η , qui est



(a) Paramètre fixe: $\mu_{mb} = 0.05$

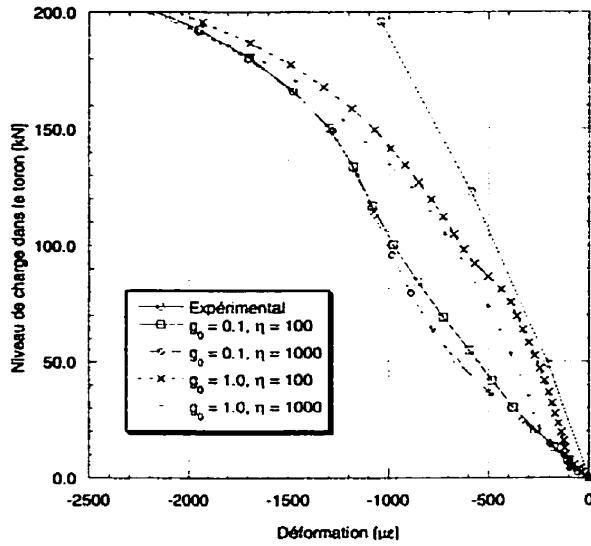


(b) Paramètre fixe: $\mu_{mb} = 0.20$

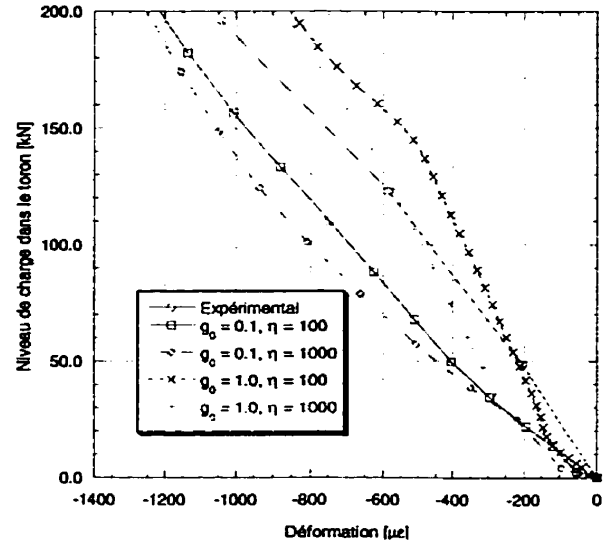


(c) Paramètres fixes: $g_0 = 1.0$, $\eta = 100$, $\mu_{mb} = 0.05$

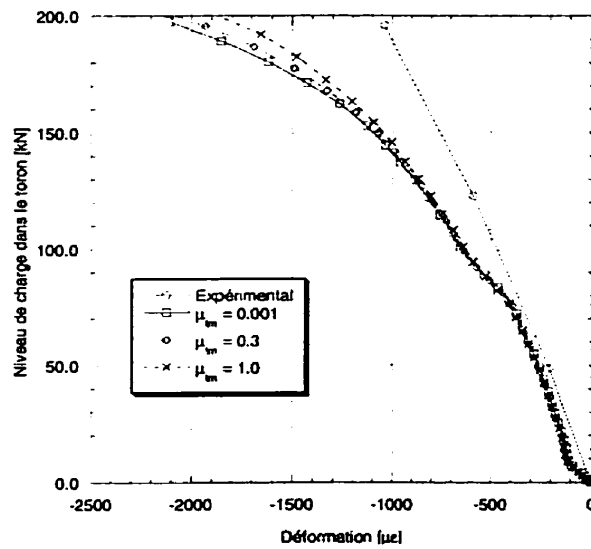
Figure 7.35 – Sensibilité des paramètres sur l'enfoncement du système toron-mors d'ancrage



(a) Paramètre fixe: $\mu_{mb} = 0.05$

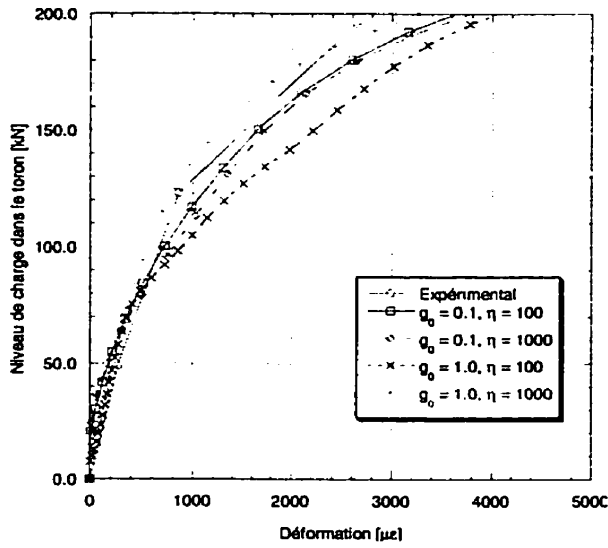


(b) Paramètre fixe: $\mu_{mb} = 0.20$

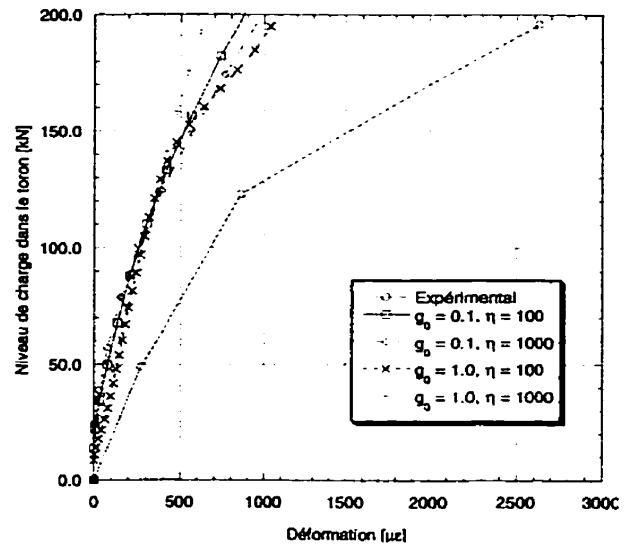


(c) Paramètres fixes: $g_0 = 1.0$, $\eta = 100$, $\mu_{mb} = 0.05$

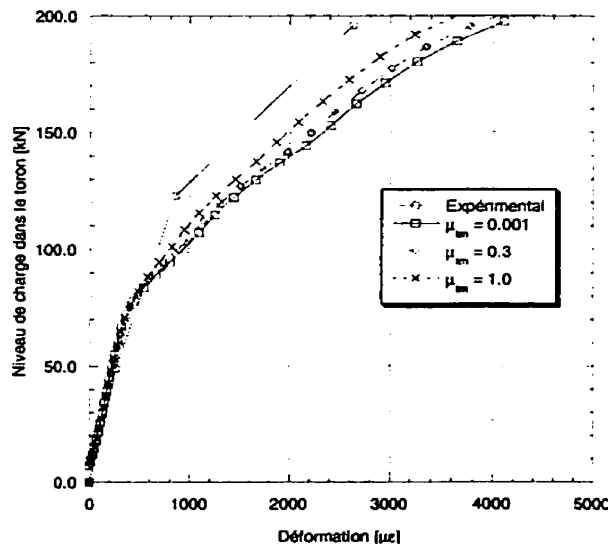
Figure 7.36 – Sensibilité des paramètres sur la déformation axiale (point #2)



(a) Paramètre fixe: $\mu_{mb} = 0.05$



(b) Paramètre fixe: $\mu_{mb} = 0.20$



(c) Paramètres fixes: $g_0 = 1.0$, $\eta = 100$, $\mu_{mb} = 0.05$

Figure 7.37 – Sensibilité des paramètres sur la déformation circonférentielle (point #2)

plus difficilement assimilable à un paramètre physique, permet tout de même de quantifier l'évolution de la rigidité à l'interface toron-mors d'ancrage en fonction du niveau de charge.

Tableau 7.12 – Résultats obtenus du calage par réseaux neuromimétiques

Réseau	Erreur (%)		μ_{mb}	g_0	η
	Apprentissage	Validation			
9-6-3	2.2	3.1	0.05774	0.94879	750.85
9-8-3	1.0	0.8	0.06916	0.98552	887.32
9-12-3	0.9	0.8	0.05972	0.99321	983.98
9-6-6-3	0.5	0.8	0.06439	0.99339	990.56
9-8-8-3	0.5	0.3	0.06970	0.99345	991.31

En guise de vérification, les Figures 7.39(a), 7.39(b) et 7.39(c) présentent un comparatif entre les résultats expérimentaux présentés aux Tableaux 7.8 et 7.9 et ceux issus d'analyses par éléments finis, utilisant les paramètres obtenus du calage (voir Tableau 7.12). Dans l'ensemble, on constate que le réseau possédant l'architecture 9-8-8-3 donne les meilleurs résultats et en particulier pour la représentation de l'enfoncement du mors d'ancrage ainsi que pour la déformation circonférentielle. Pour ce qui est de la déformation axiale, on remarque que le calage fourni des valeurs supérieures aux valeurs expérimentales. On tente d'expliquer cette lacune par l'influence potentielle de certains détails géométriques négligés au niveau des clavettes. En effet, l'absence de la rainure permettant l'insertion du jonc métallique (voir Figure 7.30), du chanfrein situé en sa partie inférieure ainsi que d'une légère modification de l'inclinaison de la partie de la clavette au niveau des encoches pourraient effectivement diminuer l'effet de coincement du mors dans l'alvéole et par le fait même, la déformation axiale. Il importe de garder à l'esprit que la déformation axiale du bloc est principalement engendrée par le cisaillement à l'interface mors-alvéole conique, contrairement à la déformation circonférentielle qui elle, émane principalement de la composante radiale et donc de la pression agissant à cette interface. Si le mors coince dans l'alvéole, cela aura donc pour effet de faire augmenter de façon plus importante la déformation axiale que circonférentielle; ce qui est bien mis en évidence à la Figure 7.39(b).

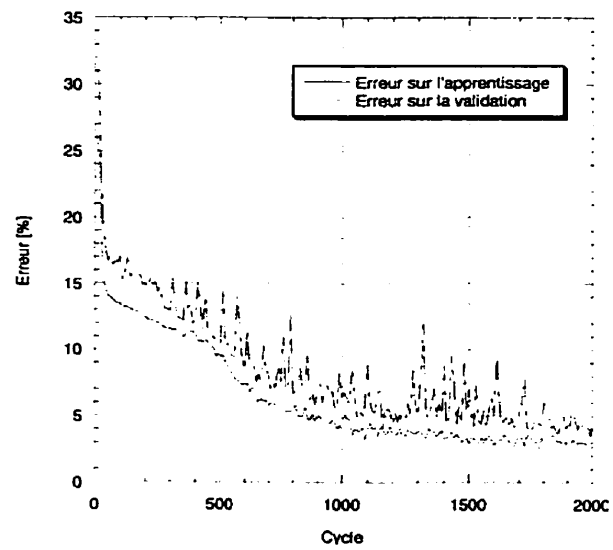
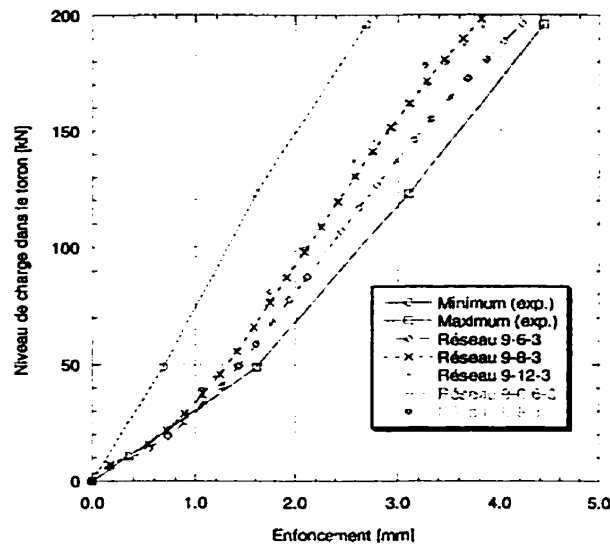
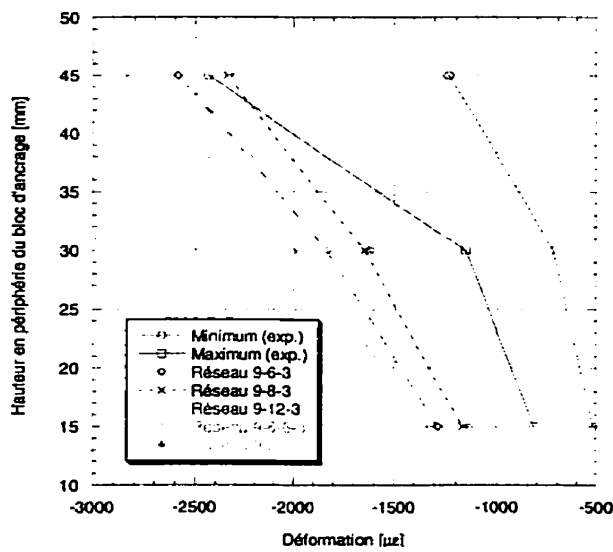


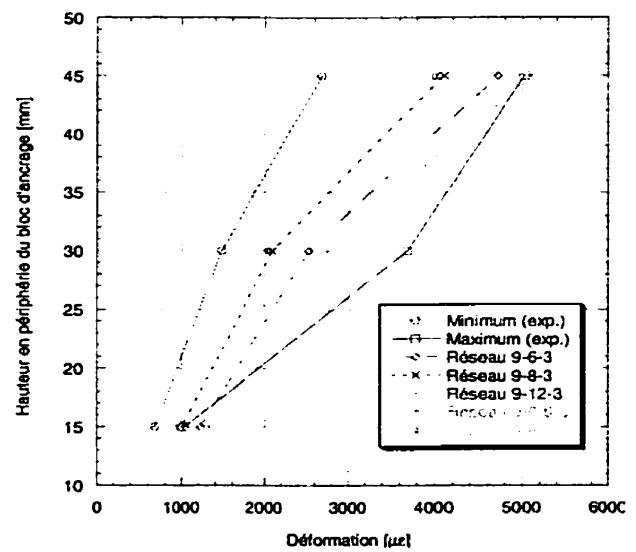
Figure 7.38 – Courbe de convergence typique d'un réseau neuromimétique



(a) Enfoncement du mors d'ancrage



(b) Déformation axiale



(c) Déformation circconférentielle

Figure 7.39 – Validation des paramètres obtenus à l'aide des réseaux neuromimétiques

Chapitre 8

Conclusion

8.1 Rétrospective et conclusions

Ce chapitre présente l'ensemble des conclusions générales et recommandations relatives aux travaux effectués dans le cadre de cette thèse, dont les principaux objectifs furent de développer un modèle numérique permettant la bonne représentation du problème de contact tridimensionnel avec frottement dans un contexte de grandes transformations et d'appliquer ce dernier à l'étude du comportement déformationnel des dispositifs d'ancrage multitorons.

Pour ce faire, nous avons présenté, dans un premier temps, les équations tridimensionnelles de la mécanique des milieux continus dans un contexte de grandes transformations (Chapitre 2). Après avoir effectué une revue des principales mesures de contraintes et de déformations actuellement disponibles dans la littérature, nous en sommes venus à faire un choix quant aux quantités conjuguées à utiliser afin de permettre une représentation objective des grandes transformations ainsi que la définition de la loi de comportement respectant le principe de l'indifférence matérielle, correspondant à une classe de matériaux élastoplastique avec écrouissage isotrope, possédant une surface d'écoulement répondant au critère de von Mises. Afin de palier le coût ainsi que l'imprécision liés à la décomposition polaire du tenseur gradient de déformation par calcul des valeurs et vecteurs propres, l'auteur a présenté une méthode permettant le calcul du tenseur des élongations sans évaluation explicite des directions principales associées (Annexe A). L'ensemble des quantités tensorielles préalablement définies, en l'occurrence le tenseur des contraintes de Cauchy ainsi que le tenseur taux de déformation, ont permis l'établissement de la formulation variationnelle associée au principe du travail virtuel exprimé sur la configuration spatiale (déformée). En particulier, une séparation des diverses contributions sur la forme faible a permis de définir les termes de contour nécessaires à l'écriture des expressions liées à la contribution des efforts de contact et de frottement au travail virtuel. On y retrouve également les détails associés à la linéarisation du résidu d'équilibre permettant l'obtention des composantes matérielle et géométrique (non symétrique) constituant la matrice de rigidité tangente.

Par la suite, afin de permettre la détermination des contributions associées aux efforts potentiellement engendrées aux interfaces candidates au contact, on expose le cadre mathématique du problème de contact tridimensionnel avec frottement en grandes transformations (Chapitre 3). Inspirés des travaux de Laursen et Simo (1993); Klarbring (1995); Simo et Laursen (1992) et Laursen (1994), cette formulation, établie sur le milieu continu, a permis d'obtenir une écriture indépendante de l'aspect discrétisation spatiale et par le fait même, une perspective d'implémentation informatique beaucoup plus générale qu'une formulation établie sur le milieu discret. En plus d'être directement applicable à la discrétisation, cette dernière stratégie permet d'éviter la construction de taux de frottement compliqués. On y retrouve, entre autres, l'ensemble des détails relatifs à l'écriture d'une cinématique exprimée dans la base convective, permettant ainsi, une représentation objective de la loi de frottement en présence de grandes transformations. La régularisation des inéquations inhérentes aux lois de contact et de frottement (Coulomb) a été effectuée par une méthode de pénalisation classique. Compte-tenu de la nature générique du modèle anticipé, l'auteur a présenté l'ensemble des variations et linéarisations nécessaires à l'établissement du résidu et de la matrice de rigidité tangente consistante associée au problème de contact avec frottement (Annexe B), ce qui constitue, en soit, une des originalités de cette thèse. Autre partie originale, l'auteur a proposé une spécialisation de la formulation présentée et ce, dans le but de permettre une modélisation adéquate du comportement à l'interface toron-mors d'ancrage. Basée sur des observations expérimentales, la loi de comportement développée a permis, entre autres, de reproduire la pénétration des encoches présentes sur les clavettes dans le toron à l'aide d'une loi hyperbolique. Les variations ainsi que les linéarisations ont également été détaillées en Annexe B.

Afin de permettre la résolution numérique des expressions préalablement établies sur le milieu continu, on a procédé, dans un premier temps, à la discrétisation temporelle permettant ainsi, par l'entremise de schémas d'intégration appropriés, de procéder à la détermination implicite des lois de comportement élastoplastique et de frottement nécessaires à la résolution incrémentale des équations d'équilibre couplées aux inéquations de contact et de frottement. En particulier, l'auteur a procédé à l'intégration de la loi de comportement élastoplastique à l'aide d'un schéma d'Euler implicite à l'ordre 2 effectuée dans un repère tournant et ce, en admettant une évolution linéaire du taux de déformation sur le pas. Quant à l'intégration de la loi de frottement, un schéma d'Euler implicite a également été utilisé mais cette fois, intégrée dans la base convective afin de préserver l'objectivité des quantités mesurées. Pour ce qui est du frottement associé à la loi spécialisée à l'interface toron-mors d'ancrage, l'hypothèse des petites transformations a permis d'effectuer l'intégration directement dans la direction circonférentielle préalablement établie sans tenir compte du terme convectif. Les variations et linéarisations liées à ces termes de frottement ont également été présentées en Annexe B afin de permettre une meilleure compréhension des formes matricielles obtenues. Dans un deuxième temps, on a procédé à la discrétisation spatiale par éléments finis en considérant le champ de déplacement aux nœuds comme étant une fonction continue du temps. Le résultat d'une telle discrétisation a permis, d'obtenir un système d'équations non linéaires pour lequel les composantes nodales du champ de déplacement représentent les inconnues du problème à résoudre. Les expressions ainsi obtenues ont pu alors être directement traduites sous une

forme matricielle générique indépendante, du niveau d'interpolation.

Dans l'optique d'une résolution numérique des expressions discrètes (Chapitre 5), nous avons par la suite procédé à une énumération exhaustive des difficultés inhérentes à cette résolution. On a pu constater que l'obtention d'une solution à ce type de problème implique non seulement des difficultés associées à la convergence des schémas de résolution, mais aussi en ce qui a trait à la quantité de mémoire ainsi qu'au temps de calcul requis. En particulier, la nature non différentiable des lois de contact et de frottement ainsi que les discontinuités géométriques engendrées par une discrétisation du premier ordre ont pour effet de réduire le taux de convergence quadratique de la méthode de Newton. Aussi, une gestion brute des interfaces de contact, en considérant tous les couplages possible lors de la création du système à résoudre peut mener rapidement à l'épuisement de la mémoire disponible ou encore, à des temps de résolution inacceptables. Dans un tel contexte, l'auteur a donc proposé divers outils qui ont permis de réduire ou encore mieux d'éliminer ces dernières difficultés et ainsi, d'en arriver à la mise sur pied d'un environnement de résolution à la fois flexible et robuste, permettant l'obtention, d'une solution cinématiquement et cinétiquement admissibles à un coût informatique raisonnable. Ces propositions furent les suivantes:

- Utilisation systématique d'une double norme de convergence basées respectivement sur le champ de déplacement et sur le résidu d'équilibre;
- Utilisation d'une méthode de lagrangien augmenté pour la résolution des inéquations de contact et de frottement. L'auteur a présenté les détails relatifs à la prise en compte de cette méthode dans un contexte de grandes transformations (Annexe C);
- Utilisation d'un facteur de relaxation intégrée avec contribution sur la frontière de l'élément afin de permettre la détection des changements brusques de la géométrie. Cette méthode, paraissant très intéressante au niveau théorique, n'a pas été investiguée plus en profondeur et ce, en raison de de la performance envisagée par l'utilisation d'une méthode de lagrangien augmenté;
- Reconstruction du système matriciel selon le résultats des projections;
- Contrôle du taux de factorisation;
- Utilisation de méthodes itératives pour la résolution du système linéarisé.

Par la suite l'auteur s'est attardé à la présentation des opérations jugées les plus critiques inhérentes à l'évaluation des contributions associées à un élément de contact ainsi que la détermination du point de projection d'une particule esclave sur la surface maître. Les détails relatifs à ce dernier point ont d'ailleurs été présentés en Annexe D. Entre autres, le passage d'une particule esclave sur un nouvel élément maître, la mise en contact ainsi que l'indétermination du point de contact ont été traités en détails. Suite à la définition de ce laborieux cahier des charges, l'auteur a proposer, dans le cadre de la mise en oeuvre informatique, le développement d'un module indépendant permettant une gestion intégrale du problème de contact et de frottement. Pouvant être greffé à tous logiciels d'analyse par éléments finis existant et permettant l'ajout de nouvelles lois de contact et de frottement, ce module, programmé selon une philosophie orienté objet, constitue en soit une des parties originales de cette thèse. Les grandes idées directrices ainsi que les principaux diagrammes de classe ont d'ailleurs été

présentés à la fin du Chapitre 5. Il importe de noter qu'au cours de la dernière année, ce module a été implanté avec succès chez Pratt & Whitney Canada afin de permettre la prise en compte des phénomènes de contact avec frottement dans leur code interne d'analyse par éléments finis en mécanique des solides.

Une série d'exemples a ensuite été présentée (Chapitre 6) afin de valider l'ensemble des développements effectués mais aussi, de démontrer l'aptitude, les performances ainsi que les limites du modèle proposé. Selon les résultats obtenus, nous pouvons en faire ressortir les points suivants.

Modèle numérique

- Dans l'ensemble, le modèle développé a permis de représenter adéquatement les conditions de contact avec frottement dans un contexte de grandes transformations. Les problèmes de Hertz et de glissement d'un bloc ont permis de valider le modèle sur des cas théoriques. Aussi, les problèmes de la poutre courte en grandes transformations et de formage d'une tôle ont permis la validation sur des exemples présentés dans la littérature;
- L'utilisation d'une méthode de lagrangien augmenté avec factorisation sélective en phase d'augmentation constitue un très bon compromis qui permet de diminuer considérablement les temps de calcul;
- Le nombre d'augmentations nécessaires à l'obtention d'une solution acceptable est grandement influencé par le niveau de pénalisation. Selon les problèmes traités, deux à quatre augmentations ont toujours suffi à l'obtention d'une telle solution;
- L'utilisation de la valeur extrapolée du statut de contact permet de qualifier aisément les conditions de contact aux interfaces;
- Le modèle spécialisé à l'interface toron-mors d'ancrage a été validé et a permis de simuler adéquatement les observations expérimentales ayant inspirées son développement;
- En présence de maillages non structurés l'utilisation de schémas d'intégration plus riches permettent, en partie de palier à l'imprécision de la discrétisation. Cependant, on remarque qu'une augmentation trop importante peut mener à l'apparition d'oscillation lorsque les inéquations régularisées sont résolues par simple pénalisation. En présence d'une méthode de lagrangien augmenté, ces oscillations tendent à s'atténuer en raison de l'effet relaxant de la méthode.

Utilisation de méthodes itératives

- La méthode itérative Bi-CGSTAB jumelée à un préconditionnement de type SOR semble bien supporter la résolution des systèmes linéarisés tels que ceux rencontrés dans le cadre de cette thèse. Les performances obtenues avec cette combinaison est de loin la plus intéressante, comparativement aux méthodes GMRES et TFQMR;
- La méthode itérative de GMRES est particulièrement sensible à la présence ainsi qu'à l'intensité des non-linéarités;

- Parmi les préconditionneurs utilisés, celui de type ILU n'a jamais permis l'obtention d'une solution pour le problème de la poutre courte en grandes transformations, contrairement à ceux de Jacobi et SOR qui ont été efficaces. Le préconditionneur de Jacobi a cependant été moins performant que celui de type SOR;
- En présence de grands déplacements relatifs tels que ceux obtenus dans le cas du glissement d'un bloc sur une plaque, seul un préconditionnement de type ILU a permis la résolution du système linéarisé au voisinage du point critique;
- La stratégie d'utiliser une méthode de lagrangien augmenté avec factorisation sélective en cours d'augmentation perd légèrement de son efficacité lorsque utilisée en présence d'une méthode itérative.

Finalement, le modèle développé a été utilisé dans le cadre d'une étude du comportement déformationnel de trois dispositifs d'ancrage multitorons (Chapitre 7). Les dispositifs ont été soumis à des conditions de mise en charge correspondant aux limites d'utilisation à l'ultime et les résultats obtenus ont été comparés afin de vérifier leurs tenues en service et d'envisager l'utilisation potentielle de ces derniers dans des conditions de chargement à l'ultime des câbles actuellement utilisés ou encore de câbles constitués de torons à résistance améliorée. Par la suite, l'auteur a procédé à la détermination des paramètres associés à la loi de comportement spécialisé à l'interface toron-mors d'ancrage, en jumelant une séquence d'analyses par éléments finis sur un dispositif d'ancrage monotoron à une technique de calage par réseaux neuromimétiques. Les résultats de ce calage ont permis de déterminer complètement l'effet du système toron-mors d'ancrage sur le bloc d'ancrage et de permettre, par le fait même son utilisation dans le cadre d'une analyse sur un dispositif d'ancrage multitorons complet. L'ensemble des travaux contenus dans ce chapitre constituent, en soit, une originalité importante de cette thèse. Les aspects qui y ont été traités ont permis de faire ressortir les conclusions suivantes.

Dispositifs d'ancrage multitorons

- Les dispositifs d'ancrage multitorons étudiés sont adéquatement conçus afin de supporter les charges en service;
- Selon les critères de comparaison, c'est le dispositif d'ancrage CS 6-31 du procédé CS de la société VSL qui s'est avéré le plus efficace en service, suivi des dispositifs LH19T15S du procédé LH de la société Spie-Batignolles et A19K15S du procédé K de la société Freyssinet;
- En service, les dispositifs d'ancrage CS 6-31, LH19T15S et A19K15S ont respectivement un pourcentage du bloc d'ancrage plastifié de l'ordre de 12%, 38% et 62%;
- Passée la limite d'utilisation en service, on a constaté une détérioration très rapide du dispositif d'ancrage CS 6-31 et ce, en raison de l'intensité de la plastification au voisinage des alvéoles périphériques. Cette plastification localisée entraîne une ovalisation importante de ces mêmes alvéoles et donc, une augmentation importante de l'enfoncement des plots tronconiques;

- À l'ultime les trois dispositifs ont une zone plastique s'étendant de la partie supérieure du bloc jusqu'à la base, ce qui indique une détérioration importante des dispositifs.

Calage à l'interface toron-mors d'ancrage

- L'utilisation d'une architecture (une ou deux couches intermédiaires) dont le nombre de connexions est de l'ordre du nombre d'analyses par éléments finis effectuées donne généralement de bons résultats;
- La prise en compte de la différence entre l'angle du mors d'ancrage et celui de l'alvéole conique dans le modèle éléments finis a une influence majeure sur l'état de déformation en périphérie;
- Le coefficient de frottement à l'interface mors-alvéole conique ainsi que la pénétration des encoches dans le toron (représentée par le paramètre g_0) demeurent les paramètres les plus influents sur le comportement d'un dispositif d'ancrage. En contrepartie, l'effet du glissement circonférentiel à l'interface toron-mors d'ancrage n'a que peu d'influence.

8.2 Recommandations

Nous terminons ce chapitre par quelques recommandations dans le but d'apporter une meilleure orientation des travaux futurs dans les domaines de la modélisation du problème de contact avec frottement en grandes transformations et de l'étude des dispositifs d'ancrage multitorons.

Modèle numérique

- Il serait intéressant de permettre la résolution du problème de contact sur une représentation d'ordre supérieure provenant d'un lissage au voisinage des points de contact appartenant à un élément esclave. La stratégie de base consiste à effectuer, dans un premier temps, la recherche des points de projection associés aux points d'intégration d'un élément de contact. Connaissant l'ensemble des éléments maîtres concernés, il suffit d'effectuer un lissage sur l'ensemble des nœuds appartenant à ces éléments et dévaluer les conditions de contact sur ce lissage et de finalement reprojeter les diverses quantités calculées sur la représentation discrète. Reste à établir le type de lissage à utiliser;
- Permettre à Contacta de prendre en compte diverses lois d'interface. La conception orientée objet de Contacta permet un tel ajout. Il serait alors possible d'utiliser ce module dans le but d'imposer des conditions de périodicité, de continuité entre maillages disjoints ainsi que pour résoudre des problèmes d'interfaces multi-physiques (ex. thermo-électro-mécanique);
- Permettre à Contacta de résoudre les problèmes de contact avec frottement en présence de corps orientés. Il s'agit là d'une modification mineure, mais qui ne fut pas essentielle au cadre de cette thèse;

- Pousser à fond une étude sur le développement potentiel de préconditionneurs bien adapté à la résolution des problèmes de mécanique des solides en grandes transformations. Ces problèmes mettent en cause divers types de non-linéarités associées à des lois de comportement non différentiables qui doivent être étudiées d'un point de vue mathématique;
- Élaborer une procédure permettant la résolution des problèmes d'interfaces de grandes tailles en exploitant les notions de parallélisme et de sous-domaines. Dans un tel contexte, il serait possible de résoudre, dans un processus itératif, chacun des solides en mémoire distribuée par une méthode de résolution bien adaptée et de procéder ensuite à la résolution de chacune des interfaces. Cette description fort simpliste de la situation, constitue un défi de taille;
- permettre à Contacta de prendre en compte diverses lois de comportement d'interface.

Dispositifs d'ancrage multitorons

- Suite à l'étude des dispositifs d'ancrage multitorons, il paraît opportun de suggérer que ces trois dispositifs d'ancrage ne soient utilisés que pour les niveaux de chargement spécifiés par le fabricant et ce, en raison de la progression rapide de la plastification au delà de ces limites prescrites;
- Suite à la détermination du comportement d'un système toron-mors d'ancrage, il serait maintenant intéressant d'effectuer l'étude d'un dispositif d'ancrage complet avec un système toron-mors d'ancrage dans chacune des alvéoles. Il serait alors possible de vérifier l'influence de l'orientation de l'ensemble des systèmes toron-mors d'ancrage ainsi que de la disposition des clavettes composant le mors sur le comportement global du dispositif d'ancrage;
- Il serait tout aussi intéressant de procéder à d'autres essais en laboratoire sur des dispositifs d'ancrage monotoron en contrôlant la disposition des trois clavettes composant le mors afin d'avoir une meilleure fiabilité sur les résultats obtenus du calage par réseau neuromimétique;
- Modéliser plus finement chacune des clavettes afin de prendre en compte les congés ainsi que la rainure en tête de clavette afin de simuler le plus fidèlement possible la pénétration des encoches dans le toron ainsi que la distribution non uniforme des statuts de contact à l'interface mors-alvéole conique. L'ensemble des deux derniers points pourraient aisément faire l'objet d'un projet de maîtrise.

Bibliographie

- ALART, P., CURNIER, A., 1991. A mixed formulation for frictional contact problem prone to Newton like solution methods. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, **92**, 353–375.
- BASTIEN, J., 1989. Analyse du comportement d'une tête d'ancrage. Rapport technique, Département de génie civil, Université Laval, Québec.
- BASTIEN, J., 1992. *Comportement des têtes d'ancrage mono et multi-torons: Étude expérimentale et étude par éléments finis*. Thèse de doctorat, Département de génie civil, Université Laval, Québec.
- BASTIEN, J., MARCEAU, D., FAFARD, M., CHABERT, A., 1996. Experimental and numerical study of multi-strands wedge anchor heads. Dans *Post-Tensioned Concrete Structures*, tome 2, pages 695–704. The Concrete Society, 3 Eatongate, 112 Windsor Road, Slough, UK, SL1 2JA.
- BATHE, K. J., CHAUDHARY, A., 1985. A solution method for planar and axisymmetric contact problems. *Int. J. Num. Meth. Engng*, **21**, 65–88.
- BATHE, K. J., MIJAILOVICH, S., 1988. Finite element analysis of frictional contact problem. *J. de Mécanique Théorique et Appliquée*, **Suppl. 1–7**, 31–45.
- BATHE, K. J., WILSON, E. L., 1976. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice-Hall Inc., Englewoods Cliffs, New-Jersey.
- BATOZ, J. L., DHATT, G., 1978. Solution technique for nonlinear finite element problems. *Int. J. Num. Meth. Engng*, **12**.
- BATOZ, J. L., DHATT, G., 1979. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *Int. J. Num. Meth. Engng*, **14**, 1262–1266.
- BATOZ, J. L., DHATT, G., 1990. *Modélisation des structures par éléments finis: Solides élastiques*, tome 1. Les Presses de l'Université Laval.
- BELYTSCHKO, T., NEAL, M. O., 1991. Contact-impact by the pinball algorithm with the penalty and the Lagrangian methods. *Int. J. Num. Meth. Engng*, **31**, 547–572.
- BENSON, D. J., HALLQUIST, J. O., 1990. A single surface contact algorithm for the post-buckling analysis of shell structures. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, **78**, 141–163.
- BOHM, J., 1987. A comparison of different contact algorithms with applications. *Computers and Structures*, **26**, 207–221.
- BPEL, 1990. *Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton précontraint suivant la méthode des états limites*. Marché public des travaux. Fascicule no. 5, Cahier des clauses générales, France.

- BURNETT, D. S., 1987. *Finite Element Analysis: From Concept to Application*. Addison-Wesley, Massachusetts.
- CAMPOS, L., ODEN, J. T., KIKUCHI, N., 1982. A numerical analysis of a class of contact problems with friction in elastoplastics. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, **34**, 821–845.
- CAN/CSA-S6-88, 1988. *Calcul des ponts-routes, Une norme Nationale du Québec*. Association Canadienne de normalisation, Ont. Canada.
- CAREY, J. F., ODEN, T. J., 1983. *Finite Elements: A Second Course*. Prentice-Hall Inc., Englewoods Cliffs, New-Jersey.
- CHABERT, A., 1983. Répartition des forces dans les torons constitutifs d'une armature de précontrainte. Rapport technique 128, Bulletin de liaison des Laboratoires des ponts et chaussées.
- CHARLIER, R., 1987. *Approche unifiée de quelques problèmes non linéaires de la mécanique des milieux continus par la méthode des éléments finis*. Thèse de doctorat, Université de Liège, Belgique.
- CHEN, W.-H., TSAI, P., 1986. Finite element analysis of elastodynamic sliding contact problem with friction. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, **22**, 925–938.
- CHENG, J. H., KIKUCHI, N., 1985. An analysis of metal forming processes using large deformation elastic-plastic formulations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, **49**, 71–108.
- CHUNG, T. J., 1988. *Continuum mechanics*. Prentice-Hall Inc., Englewoods Cliffs, New-Jersey.
- CIARLET, P. J., 1988. *Mathematical Elasticity: Three-Dimensional Elasticity*, tome 1. North-Holland, Amsterdam.
- COSTELLO, G. A., 1990. *Theory of wire rope*. Springer-Verlag, New-York Inc.
- CRISFIELD, M. A., 1981. A fast incremental interactive solution procedure that handles snap-through. *Computers and Structures*, **13**, 55–62.
- CRISFIELD, M. A., 1991. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, tome 1. John Wiley and Sons Ltd.
- CRISFIELD, M. A., 1997. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, tome 2. John Wiley and Sons Ltd.
- DABOUNOU, J., 1994. *Résolution des problèmes de grandes transformations par la méthode des éléments finis*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France.
- DHATT, G., FAFARD, M., 1995. Modélisation non linéaire des structures. Rapport technique, Université Laval, Québec. GCS-95-08.
- DHATT, G., TOUZOT, G., 1981. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Les Presses de l'Université Laval, Sainte-Foy.
- DOLAN, C. W., 1990. Developments in non-metallic prestressing tendons. *Journal of Prestressed Concrete Institute*, **35**, 80–88.
- DUVAUT, G., 1980. Équilibre d'un solide élastique avec contact unilatéral et frottement de Coulomb. Dans *Problèmes mathématiques de la mécanique*, A, pages 263–265.
- DUVAUT, G., LIONS, J. L., 1972. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris.
- DYWIDAG, 1989. *Notice technique procédé de précontrainte Dywidag torons*. Dywidag.

- EL MOUATASSIM, M., 1989. *Modélisation en grandes transformations des solides massifs par éléments finis*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France.
- FAFARD, M., 1998. *Éléments finis en mécanique des solides*. Rapport technique, Université Laval, Québec. GCI-63244.
- FENWICK, R. C., LEE, S. C., 1986. Anchorage zones in prestressed concrete members. *Magazine of concrete research*, **38** (135), 77–89.
- FORTIN, M., FORTIN, A., 1985. A generalization of Usawa's algorithm for the solution of the Navier-Stokes equations. *Comms. Appl. Numer. Meth.*, **1**, 205–208.
- FRANCAVILLA, A., ZIENKIEWICZ, O. C., 1975. A note on numerical computation of elastic contact problems. *Int. J. Num. Meth. Engng*, **9**, 913–924.
- FREDRIKSSON, B., 1975. Finite element solution of surface non-linearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics problems. *Computers and Structures*, **6**, 290–281.
- FREUND, R. W., 1993. A Transpose-Free Quasi-Minimal Residual algorithm for non-Hermitian linear systems. *SIAM J. Sci. Comp.*, **14**, 470–482.
- FREYSSINET, 1988. *Notice technique procédé Freyssinet-système monogroupe*. Freyssinet.
- GIANNAKOPOULOS, A. E., 1989. The return mapping method for the integration of friction constitutive relation. *Computers and Structures*, **32**, 157–167.
- GLASER, H., 1992. New constitutive equations for the contact of deformable bodies with friction. *Act. Mech.*, **95**, 103–116.
- GLOWINSKI, R., LE TALLEC, P., 1984. Finite element in nonlinear incompressible elasticity. Dans *Finite Element: Special Problems in Solid Mechanics*, tome V. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- GOLDSTEIN, H., 1980. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, Massachusetts.
- GTM, 1987. *Notice technique procédé S.E.E.E systèmes FU & FUC*. GTM.
- HALLQUIST, J. O., GOUDREAU, G. L., BENSON, D. J., 1985. Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, **51**, 107–137.
- HEEGAARD, J.-H., CURNIER, A., 1993. An augmented lagrangian method for discrete large-slip contact problems. *Int. J. Num. Meth. Engng*, **36**, 569–593.
- HENCHI, K., FAFARD, M., TALBOT, M., LANGIS, D., 1997. L'application des réseaux neuronaux artificiels pour l'identification et la détection de l'endommagement dans les ponts. Dans *Actes du troisième colloque national en calcul des structures*, tome 2, pages 831–836. Presses Académiques de l'Ouest.
- HESTENES, M. R., 1969. Multiplier and gradient methods. *J. Optimiz. Theory Appl.*, **4**, 303–320.
- HOGER, A., CARLSON, D. E., 1984. Determination of the stretch and rotation in the polar decomposition of the deformation gradient. *Quart. Appl. Math.*, **10**.
- HRUSKA, F. H., 1964. Calculation of stress in wire ropes. *Wire and Wire Products*, **26**, 766–767, 799–801.

- HUGHES, T. J. R., TAYLOR, R. L., KANOKNUKULCHAI, W., 1978. A finite element method for large displacement contact and impact problems. Dans *US-german symposium on Finite Element Method*.
- HUGHES, T. J. R., TAYLOR, R. L., SACKMAN, J. L., CURNIER, A., KANOKNUKULCHAI, W., 1976. A finite element method for a class of contact-impact problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, **8**, 249-276.
- HUGHES, T. J. R., WINGET, J., 1980. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng*, **15**, 1862-1867.
- HUSSEIN, A. E., DAMIL, N., 1998. An asymptotic numerical algorithm for frictionless contact problem. *Revue Eur. des Éléments finis*, **7**, 119-130.
- JOLICOEUR, C., 1993. *Étude des solides toronnés à l'aide d'un modèle analytique semi-continu*. Thèse de doctorat, Département de génie mécanique, Université Laval, Québec.
- JU, J. W., TAYLOR, R. L., 1988. A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of nonlinear frictional contact problems. *J. de Mécanique Théorique et Appliquée, Suppl.* 1-7, 1-14.
- KERSTENS, J. G. M., BENNENK, W., CAMP, J. W., 1998. Prestressing with carbon composite rods: a numerical method for developing reusable prestressing systems. *American Concrete Institute*, **95**, 43-50.
- KIKUCHI, N., ODEN, J. T., 1988. Contact Problem in Elasticity: A Study of variational Inequalities in Finite Element Methods. *SIAM, Philadelphia*.
- KLARBRING, A., 1995. Large displacement frictional contact: a continuum framework for finite element discretization. *Eur. J. Mech. A/Solids*, **14**, 237-253.
- LANGIS, D., 1997. *Identification structurale et réseaux neuromimétiques: calibration de modèles éléments finis*. Thèse de maître, Département de génie civil, Université Laval, Québec.
- LAURSEN, T. A., 1994. The convected description in large deformation frictional contact problem. *Int. J. Solids Structures*, **31**, 669-681.
- LAURSEN, T. A., SIMO, J. C., 1993. A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problem. *Int. J. Num. Meth. Engng*, **36**, 3451-3485.
- LEONHARDT, F., 1964. *Prestressed concrete - Design and construction*. Ernst & Sohn, Berlin - Munich.
- LIPPMAN, S. B., LAJOIE, J., 1998. *C++ Primer*. Addison-Wesley, Massachusetts, troisième édition.
- MALVERN, L. E., 1969. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall Inc., Englewoods Cliffs, New-Jersey.
- MARCEAU, D., 1993. *Modélisation du contact bidimensionnel et arxysimétrique en grands déplacements relatifs, et son application à l'étude du comportement des têtes d'ancrage monotoron*. Thèse de maître, Département de génie civil, Université Laval, Québec.
- MARCEAU, D., BASTIEN, J., FAFARD, M., 1996. Modélisation numérique du contact avec frottement et son application à l'étude du comportement des têtes d'ancrages mono-toron. Dans *Troisième conférence canadienne sur l'informatique en génie civil et génie du bâtiment*, tome 1, pages 696-705. The canadian Society for Civil Engineering.

- MARSDEN, J. E., HUGUES, T. J., 1983. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall Inc., Englewoods Cliffs, New-Jersey.
- MCKAY, K. S., ERKI, M. A., 1993. Grouted anchorages for aramid fiber reinforced plastic prestressing tendons. *Can. J. Civ. Eng.*, **20**, 1065–1069.
- MICHALOWSKI, R., MROZ, Z., 1978. Associated and non-associated sliding rules in contact friction problems. *Arch. Mech.*, **30**, 259–276.
- MICHAUD, M. C., BASTIEN, J., 1996. Comportement des têtes d'ancrage mono et multi-torons (procédé K). Rapport technique, Département de génie civil, Université Laval, Québec. GCT-96-02.
- MUFTI, A. A., ERKI, M. A., JAEGER, L. G., 1991. Technical committee on advanced composite materials in bridge and structures. Rapport technique, Cette section est à remplir.
- NECAS, J., JARUSEK, J., HASLINGER, J., 1980. On the Solution of the Variational Inequality to the Signorini Problem with Small Friction. *Boll. U. M. I.*, **5** (17-B), 796–811.
- ODEN, J. T., PIRES, E. B., 1983a. Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity. *J. Appl. Mech.*, **50**, 67–76.
- ODEN, J. T., PIRES, E. B., 1983b. Numerical analysis of certain contact problems in elasticity with non-classical friction laws. *Computers and Structures*, **50**, 481–485.
- ODEN, J. T., PIRES, E. B., 1984. Algorithms and numerical results for finite element approximations of contact problems with non-classical friction laws. *Computers and Structures*, **19**, 137–147.
- ODOBASIC, E., 1998. *Étude du comportement de deux types d'ancrage multitorons à l'aide de la méthode des éléments finis*. Thèse de maître, Département de génie civil, Université Laval, Québec.
- OLDENBURG, M., NILSSON, L., 1994. The position code algorithm for contact searching. *Int. J. Num. Meth. Engng*, **37**, 359–386.
- PECKNOLD, D. A., PRESSWALLA, H. H., 1983. Elastoplastic analysis of thick perforated plates with application to prestressing anchor head. *Computers and Structures*, **20** (4), 539–553.
- POWELL, M. J. D., 1969. A method for nonlinear constraints. *J. Optimiz. Theory Appl.*, **4**, 303–320.
- PRESTON, H. K., 1985. Testing 7-wire strand for prestressed concrete – The state of the art. *Journal of Prestressed Concrete Institute*, **30** (3), 134–155.
- RACHIK, M., 1993. *Simulation de la mise en forme des structures minces (Soufflage des plastiques et emboutissage des tôles)*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France.
- RAMM, E., 1980. Strategy for tracing the nonlinear response near limit points. Dans *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*. Europe US WorkShop.
- REBELO, N., 1988. Development of contact algorithms for a general purpose finite element program. *J. de Mécanique Théorique et Appliquée*, **Suppl. 1–7**, 15–30.
- REBELO, N., NAGTEGAAL, J. C., HIBBITT, H. D., 1990. Finite element analysis of sheet forming processes. *Int. J. Num. Meth. Engng*, **30**, 1739–1758.

- REDA, M. M., SAYED-AHMED, E. Y., SHRIVE, N. G., 1997. Towards a new non-metallic anchorage system for post-tensioned applications with carbon fibre reinforced plastic tendons. Dans *Evolving Technologies for the Competitive Edge Proceedings of the 1997 42nd International*, tome 42, pages 288–297. International SAMPE Symposium and Exhibition.
- RENAULT, C., 2000. *Étude du comportement de dispositifs d'ancrage monotoron*. Thèse de maître, Département de génie civil, Université Laval, Québec.
- RILEM, 1990. RILEM draft recommendation – determination of the modulus of elasticity of prestressing steel strands. Rapport technique, Matériaux et constructions.
- ROCKEFELLER, R. T., 1974. Augmented lagrangian multiplier function and duality in non-convex programming. *SIAM J. Control*, **12**, 268–285.
- SAAD, Y., SCHULTZ, M. H., 1986. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, **7**, 856–869.
- SACKMAN, J. L., TAYLOR, R. L., HUGHES, T. J. R., KANOKNUKULCHAI, W., 1982. A finite element method for a class of contact-impact problems. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, **8**, 1505–1520.
- SALEEB, A. F., CHEN, K., CHANG, T. Y. P., 1994. An effective two-dimensional frictional contact model for arbitrary curved geometry. *Int. J. Num. Meth. Engng*, **37**, 1297–1321.
- SAYED-AHMED, E. Y., SHRIVE, N. G., 1998. A new steel anchorage system for post tensioning applications using carbon fibre reinforced plastic tendons. *Can. J. Civ. Eng.*, **25**, 113–127.
- SCHREPPERS, G. J. M., BREKELMANS, W. A., SAUREN, A. A., 1992. A finite element formulation of the large sliding contact. *Int. J. Num. Meth. Engng*, **35**, 133–143.
- SEKOURI, E. M., 1996. *Étude de la contraction radiale d'un toron 1 · n sous chargement de traction et de torsion*. Thèse de maître, Département de génie mécanique, Université Laval, Québec.
- SETRA, 1990. *Précontrainte extérieure, Guide technique*. SETRA. France.
- SIDOROFF, P., 1985. The geometrical concept of intermediate configuration and elastic-plastic finite strain. *Arch. of Mech.*, **25** (2).
- SIMO, J. C., LAURSEN, T. A., 1992. An augmented Lagrangian treatment of contact problem involving friction. *Computers and Structures*, **42**, 97–116.
- SIMO, J. C., TAYLOR, R. L., 1991. Quasi-incompressible finite elasticity in principal stretches. Continuum basis and numerical algorithms. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, **85**, 273–310.
- SIMONS, J. W., BERGAN, P. G., 1986. A finite element formulation of three dimensional contact problem with slip and friction. *Comp. Mech.*, **1**, 21–35.
- SPIE-BATIGNOLLES, 1986. *Notice technique procédé LH unités LH1T15S à LH19T15S*. Spie-Batignolles.
- STEIN, E., WRIGGERS, P., 1982. Calculation of contact-impact problems of thin shells taking into account geometrical nonlinearities with the contact region. *Computers and Structures*, **34**, 861–880.
- STONE, W. C., BREEN, J. E., 1984. Behavior of post-tensioned girder anchorage zones. *Journal of Prestressed Concrete Institute*, **29** (1), 28–61.

- TAERWE, L. R., LAMBOTTE, H., MIESSELER, H. J., 1992. Loading tests on concrete beam prestressed with glass fiber tendons. *Journal of Prestressed Concrete Institute*, **37**, 84–97.
- TAYLOR, R. L., CARPENTER, N. J., KATONA, M. G., 1991. Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *Int. J. Num. Meth. Engng*, **32**, 103–128.
- VAN DER VORST, H. A., 1992. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of non-symmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **12**, 631–644.
- VSL, 2000. *Notice technique procédé* VSL.
- WRIGGERS, P., SIMO, J. C., TAYLOR, R. L., 1985. Penalty and augmented Lagrangian formulation for contact problems. Dans *NUMETA '85 Conference*. Elsevier.
- WRIGGERS, P., VU VAN, T., STEIN, E., 1990. Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. *Computers and Structures*, **37**, 319–331.
- YOUNG, W. C., 1989. *Roark's Formulas for Stress & Strain*. McGraw-Hill Book Company, NY, 6^e édition.
- ZONG, Z.-H., 1993. *Finite Element Procedures for contact-impact Problems*. Oxford Science Publication, Oxford.

Annexe A

Méthode de décomposition polaire par application du théorème de Cayley-Hamilton

A.1 Généralités

Cette annexe présente les détails relatifs à la méthode de décomposition polaire du tenseur gradient de déformations \mathbf{F} à l'aide du théorème de Cayley-Hamilton. Cette méthode, décrite dans Hoger et Carlson (1984), permet de déterminer le tenseur de déformations pures \mathbf{U} ¹ sans recourir à l'évaluation de la racine carrée ainsi que des valeurs et vecteurs propres des tenseurs en cause.

A.2 Expression du tenseur des déformations pures

En présumant le tenseur gradient de déformations connu, considérons sa décomposition polaire telle que décrite par la relation (2.11). On rappelle que cette décomposition mène à une matrice de transformation orthonormée \mathbf{R} ainsi qu'à une matrice de déformation pure \mathbf{U} symétrique et définie positive. Ces dernières caractéristiques du tenseur \mathbf{U} permettent l'utilisation du théorème de Cayley-Hamilton selon lequel:

$$\mathbf{U}^3 - \mathcal{I}_U \mathbf{U}^2 + \mathcal{II}_U \mathbf{U} - \mathcal{III}_U \mathbf{I} = 0 \quad (\text{A.1})$$

où \mathcal{I}_U , \mathcal{II}_U et \mathcal{III}_U sont les trois invariants du tenseur \mathbf{U} définis par:

$$\mathcal{I}_U = \text{tr}(\mathbf{U}), \quad \mathcal{II}_U = \frac{1}{2} (\text{tr}(\mathbf{U})^2 - \text{tr}(\mathbf{U}^2)), \quad \mathcal{III}_U = \det \mathbf{U} \quad (\text{A.2})$$

1. La méthode présentée dans cette annexe mène à la détermination du tenseur \mathbf{U} mais peut tout aussi bien être utilisée pour le tenseur \mathbf{V} .

En exprimant U en fonction du tenseur de Cauchy-Green droit selon les relations (2.5) et (2.11), l'expression (A.1) devient:

$$CU - I_U C + II_U U - III_U I = 0. \quad (\text{A.3})$$

En regroupant les termes, on obtient l'expression du tenseur U en fonction de ses trois invariants ainsi que ceux liés au tenseur C tel que:

$$U = (C + II_U I)^{-1} (I_U C + III_U I). \quad (\text{A.4})$$

L'expression (A.4) est bien évidemment non résolue car les invariants de U sont, a priori, inconnus. De plus, il est possible d'exprimer explicitement l'expression $(C + II_U I)^{-1}$ permettant de faire disparaître l'inversion matricielle.

A.3 Définition de l'expression $(C + II_U I)^{-1}$

Telles que définies précédemment, les caractéristiques liées au tenseur U et par le fait même, de C , permettent d'affirmer l'existence de l'inverse du tenseur $(C + II_U I)$ et aussi, de définir sa résolution spectrale sous la forme:

$$(C + II_U I)^{-1} = \alpha C^2 + \beta C + \gamma I \quad (\text{A.5})$$

où α , β et γ sont des constantes à déterminer selon la relation caractéristique de l'inverse définie par:

$$(\alpha C^2 + \beta C + \gamma I) (C + II_U I) = I. \quad (\text{A.6})$$

En regroupant les termes à gauche et en divisant par α , on obtient l'expression caractéristique:

$$C^3 + \left(II_U + \frac{\beta}{\alpha} \right) C^2 + \left(\frac{\beta II_U + \gamma}{\alpha} \right) C + \left(\frac{\gamma II_U - 1}{\alpha} \right) I = 0. \quad (\text{A.7})$$

Comme on peut le constater, l'expression (A.7) peut être redéfinie selon le théorème de Cayley-Hamilton sur le tenseur C tel que:

$$C^3 - I_C C^2 + II_C C - III_C I = 0. \quad (\text{A.8})$$

En comparant (A.8) à (A.7), il est donc possible de déterminer les constantes, selon lesquelles:

$$II_U + \frac{\beta}{\alpha} = -I_C, \quad \frac{\beta II_U + \gamma}{\alpha} = II_C, \quad \frac{\gamma II_U - 1}{\alpha} = -III_C. \quad (\text{A.9})$$

Les constantes α , β et γ s'écrivent donc, après résolution de (A.9):

$$\alpha = \frac{1}{\phi}, \quad \beta = -\frac{\mathcal{I}\mathcal{I}_U + \mathcal{I}_C}{\phi}, \quad \gamma = \frac{\mathcal{I}\mathcal{I}_U(\mathcal{I}\mathcal{I}_U + \mathcal{I}_C) + \mathcal{I}\mathcal{I}_C}{\phi} \quad (\text{A.10})$$

où $\phi = \mathcal{I}\mathcal{I}_U(\mathcal{I}\mathcal{I}_U(\mathcal{I}\mathcal{I}_U + \mathcal{I}_C) + \mathcal{I}\mathcal{I}_C) + \mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I}_C$. Cette dernière expression permet donc de définir complètement l'expression (A.5) en fonction des invariants de \mathbf{U} et \mathbf{C} tel que:

$$(\mathbf{C} + \mathcal{I}\mathcal{I}_U\mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{\phi} (\mathbf{C}^2 - (\mathcal{I}\mathcal{I}_U + \mathcal{I}_C)\mathbf{C} + (\mathcal{I}\mathcal{I}_U(\mathcal{I}\mathcal{I}_U + \mathcal{I}_C) + \mathcal{I}\mathcal{I}_C)\mathbf{I}). \quad (\text{A.11})$$

L'expression (A.11) permet ainsi d'éliminer entièrement l'inversion matricielle de (A.4) qui finalement, s'écrit sous la forme:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\phi} (\mathbf{C}^2 - (\mathcal{I}\mathcal{I}_U + \mathcal{I}_C)\mathbf{C} + (\mathcal{I}\mathcal{I}_U(\mathcal{I}\mathcal{I}_U + \mathcal{I}_C) + \mathcal{I}\mathcal{I}_C)\mathbf{I}) (\mathcal{I}_U\mathbf{C} + \mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I}_U\mathbf{I}). \quad (\text{A.12})$$

A.4 Expression des invariants de \mathbf{U} en fonction des invariants de \mathbf{C}

L'approche utilisée est basée sur le fait que les directions principales des tenseurs \mathbf{U} et \mathbf{C} sont identiques. Dans cette optique, les élongations principales de \mathbf{C} correspondent au carré de celles de \mathbf{U} , exprimons les invariants de ces deux tenseurs en fonction de ces élongations telles que:

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{I}_U = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \mathcal{I}\mathcal{I}_U = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 \\ \mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I}_U = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathcal{I}_C = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ \mathcal{I}\mathcal{I}_C = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 \\ \mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I}_C = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2. \end{array} \quad (\text{A.13})$$

On voit donc, selon (A.13), que les invariants de \mathbf{U} peuvent s'écrire sous la forme:

$$\mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I}_U = \sqrt{\mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I}_C} \quad (\text{A.14a})$$

$$\mathcal{I}\mathcal{I}_U^2 = \mathcal{I}\mathcal{I}_C + 2\mathcal{I}_U\sqrt{\mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I}_C} \quad (\text{A.14b})$$

$$\mathcal{I}_U^2 = \mathcal{I}_C + 2\mathcal{I}\mathcal{I}_U \quad (\text{A.14c})$$

permettant ainsi de déterminer directement $\mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I}_U$. Pour ce qui est de $\mathcal{I}\mathcal{I}_U$ et \mathcal{I}_U , ceux-ci sont obtenus par combinaison des relations (A.14b) et (A.14c) générant ainsi une équation du quatrième ordre en \mathcal{I}_U définie par:

$$\mathcal{I}_U^4 - 2\mathcal{I}_C\mathcal{I}_U^2 - 8\mathcal{I}_U\sqrt{\mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I}_C} + (\mathcal{I}_C^2 - 4\mathcal{I}\mathcal{I}_C) = 0. \quad (\text{A.15})$$

L'expression (A.15) a la propriété de ne générer qu'une seule racine positive (nécessaire à \mathcal{I}_U) possiblement répétée. Hoger et Carlson (1984) présente une méthode détaillée permettant

sa résolution. Cependant, la résolution de (A.15), à l'aide d'un processeur symbolique permet la détection immédiate de cette racine positive unique. Celle-ci s'écrit:

$$\mathcal{I}_U = \frac{\sqrt{6}}{6} \left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{\sqrt{a} (4b^{\frac{1}{3}}\mathcal{I}_C - b^{\frac{2}{3}} - 4\mathcal{I}_C^2 + 12\mathcal{I}\mathcal{I}_C) + 12c}{b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}} \right) \quad (\text{A.16})$$

avec

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{2b^{\frac{1}{3}}\mathcal{I}_C + b^{\frac{2}{3}} + 4\mathcal{I}_C^2 - 12\mathcal{I}\mathcal{I}_C}{b^{\frac{1}{3}}} \\ b &= 8\mathcal{I}_C^3 - 36\mathcal{I}_C\mathcal{I}\mathcal{I}_C + 108\mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I}_C \\ &\quad + 12\sqrt{-3\mathcal{I}_C^2\mathcal{I}\mathcal{I}_C + 12(\mathcal{I}\mathcal{I}_C^3 + \mathcal{I}_C^3\mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I}_C) - 27\mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I}_C(2\mathcal{I}_C\mathcal{I}\mathcal{I}_C - 3\mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I}_C)} \\ c &= a^{\frac{1}{3}}\sqrt{6\mathcal{I}\mathcal{I}\mathcal{I}_C}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.17})$$

permettant ainsi l'évaluation complète du tenseur U .

Annexe B

Détails relatifs à l'écriture du PTV associé au problème de contact avec frottement

B.1 Généralités

Cette annexe présente les détails relatifs à l'évaluation des divers termes nécessaires à l'écriture du PTV ainsi qu'à sa linéarisation. En particulier, on présente la dérivation complète des expressions en mettant l'accent sur les diverses étapes permettant l'obtention des formes finales. En certaines occasions, et ce, en raison de la complexité des expressions, il devient nécessaire de passer en notation indicielle permettant ainsi d'alléger les écritures. Cependant, ces formes seront toujours obtenues à partir des expressions détaillées. Il importe de noter que la lecture complète des dérivations présentées dans cette annexe, quoique laborieuse, constitue une expérience extrêmement enrichissante au point de vue de la compréhension du modèle mais aussi en ce qui a trait à la manipulation des expressions variationnelles incluant des composantes convectives.

B.2 Évaluation de la variation des vecteurs de base

L'évaluation des composantes utilisées dans l'écriture du PTV ainsi que dans sa linéarisation, implique nécessairement la prise en compte de la variation des vecteurs de base au voisinage du point de contact.

B.2.1 Évaluation des vecteurs $\delta \tau_\alpha$

L'évaluation de la variation des vecteurs de base τ_α est obtenue en appliquant l'opérateur δ sur l'expression (3.10b) telle que:

$$\delta \tau_\alpha = \delta \left(\underline{e}_\alpha(\bar{\xi}) \right) = \delta \left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial \bar{\xi}^\alpha}(\Psi_0(\bar{\xi}), t) \right). \quad (\text{B.1})$$

où encore, en permutant l'ordre de dérivation selon laquelle:

$$\delta \tau_\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^\alpha} \delta \varphi^2(\Psi_0(\bar{\xi}), t). \quad (\text{B.2})$$

Comme on peut le constater, l'évaluation de (B.2) requiert certaines précautions, et ce, en raison de la dépendance du champ φ^2 envers la paramétrisation associée à l'évaluation du point de projection $\bar{\xi}$. Afin de permettre une meilleure compréhension, considérons la définition explicite de φ^2 provenant de (2.2), et définies par:

$$\varphi^2(\Psi_0(\bar{\xi}), t) = \underline{X}^2(\Psi_0(\bar{\xi})) + \underline{u}^2(\Psi_0(\bar{\xi}), t). \quad (\text{B.3})$$

Selon (B.3), la variation de φ^2 s'effectue en deux temps. Premièrement, on évalue la variation par rapport à $\bar{\xi}$, et finalement, en considérant $\bar{\xi}$ fixe. Cette dernière étape correspond à la dérivée partielle de Gâteaux¹. Dès lors la variation de φ^2 s'écrit:

$$\begin{aligned} \delta \varphi^2(\Psi_0(\bar{\xi}), t) &= \underbrace{\frac{\partial \varphi^2}{\partial \underline{X}^2} \frac{\partial \underline{X}^2}{\partial \bar{\xi}^\beta} \delta \bar{\xi}^\beta}_{\bar{\xi}^\beta \text{ variable}} + \underbrace{\frac{\partial \varphi^2}{\partial \underline{u}^2} \frac{\partial \underline{u}^2}{\partial \bar{\xi}^\beta} \delta \bar{\xi}^\beta + \frac{\partial \varphi^2}{\partial \underline{X}^2} \delta \underline{X}^2 + \frac{\partial \varphi^2}{\partial \underline{u}^2} \delta \underline{u}^2}_{\bar{\xi}^\beta \text{ fixe}} \\ &= \tau_\beta \delta \bar{\xi}^\beta + \delta \underline{u}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

où $\delta \bar{\xi}^\beta$ et $\delta \underline{u}^2$ représentent respectivement les champs de déplacements virtuels paramétrique et global associés à la frontière Γ_c^2 . Considérant la définition (B.2), on obtient la forme finale de $\delta \tau_\alpha$ telle que:

$$\begin{aligned} \delta \tau_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^\alpha} \left[e_\beta(\bar{\xi}) \delta \bar{\xi}^\beta + \delta \underline{u}^2 \right] \\ &= \underline{e}_{\alpha, \beta}(\bar{\xi}) \delta \bar{\xi}^\beta + \delta \underline{u}_{, \alpha}^2. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Il importe de noter que le passage de τ_β à \underline{e}_β devient nécessaire en raison de la définition particulière de τ_β donnée par (3.10b).

1. Mathématicien français, René Gâteaux publie en 1907 un mémoire où il introduit la différentielle qui porte son nom. Il fut aussi un précurseur des études mathématiques du mouvement brownien.

B.2.2 Évaluation du vecteur $\delta \underline{n}$

Dans un premier temps, exprimons le vecteur \underline{n} , à l'aide de (3.11) telle que:

$$\underline{n} = K(\underline{\tau}_1 \times \underline{\tau}_2) \quad (\text{B.6})$$

où K représente la normalisation définie par:

$$K = \|\underline{\tau}_1 \times \underline{\tau}_2\|^{-1}. \quad (\text{B.7})$$

Selon (B.6), la variation $\delta \underline{n}$ s'écrit:

$$\begin{aligned} \delta \underline{n} &= \frac{\partial \underline{n}}{\partial \underline{\tau}_1} \delta \underline{\tau}_1 + \frac{\partial \underline{n}}{\partial \underline{\tau}_2} \delta \underline{\tau}_2 + \frac{\partial \underline{n}}{\partial K} \delta K \\ &= K(\delta \underline{\tau}_1 \times \underline{\tau}_2) + K(\underline{\tau}_1 \times \delta \underline{\tau}_2) + \delta K(\underline{\tau}_1 \times \underline{\tau}_2). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Comme on peut le constater, l'évaluation de (B.8) implique la prise en compte de composantes variationnelles exprimées à l'aide produits vectoriels. Considérant la décomposition du produit vectoriel sous la forme:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \underline{a}\underline{b} = \underline{b}\underline{a} \quad (\text{B.9})$$

où \underline{a} et \underline{b} sont des matrices anti-symétriques associées aux vecteurs \underline{a} et \underline{b} respectivement, l'expression (B.8) devient:

$$\delta \underline{n} = K(\underline{\tau}_2 \delta \underline{\tau}_1) + K(\underline{\tau}_1 \delta \underline{\tau}_2) + \delta K(\underline{\tau}_1 \underline{\tau}_2) \quad (\text{B.10})$$

avec

$$\underline{\tau}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\tau_{13} & \tau_{12} \\ \tau_{13} & 0 & -\tau_{11} \\ -\tau_{12} & \tau_{11} & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\tau}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{23} & -\tau_{22} \\ -\tau_{23} & 0 & \tau_{21} \\ \tau_{22} & -\tau_{21} & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

Pour ce qui est de K , son expression est obtenue en appliquant la définition (B.9) sur (B.7). Considérant la propriété des matrices anti-symétriques telle que $-\underline{a} = \underline{a}^T$, l'expression (B.7) devient:

$$K = \left[-\underline{\tau}_2^T \underline{\tau}_1 \underline{\tau}_2 \right]^{-\frac{1}{2}} = k^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.12})$$

Cette dernière forme permet donc une évaluation aisée de δK obtenue du principe de dérivation en chaîne tel que:

$$\begin{aligned} \delta K &= \frac{\partial K}{\partial k} \delta k \\ &= \frac{-1}{2} k^{-\frac{3}{2}} \delta k \\ &= \frac{-1}{2} k^{-\frac{3}{2}} \left[\frac{\partial k}{\partial \underline{\tau}_1} \delta \underline{\tau}_1 + \frac{\partial k}{\partial \underline{\tau}_2} \delta \underline{\tau}_2 \right] \\ &= \frac{-1}{2} k^{-\frac{3}{2}} \left[-2\underline{\tau}_1^T \underline{\tau}_2 \underline{\tau}_2 \delta \underline{\tau}_1 - 2\underline{\tau}_2^T \underline{\tau}_1 \underline{\tau}_1 \delta \underline{\tau}_2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Après simplification et regroupement des termes, on obtient l'expression finale de δK définie par:

$$\delta K = K^3 \left[\underline{\tau}_1^T \tau_2 \tau_2 \delta \underline{\tau}_1 + \underline{\tau}_2^T \tau_1 \tau_1 \delta \underline{\tau}_2 \right], \quad (\text{B.14})$$

permettant ainsi d'exprimer (B.10) sous la forme:

$$\delta \underline{n} = \underbrace{K(\tau_2 \delta \underline{\tau}_1 + \tau_1 \delta \underline{\tau}_2)}_{\delta \underline{n}_A} + \underbrace{K^3 \tau_1 \tau_2 \left[\underline{\tau}_1^T \tau_2 \tau_2 \delta \underline{\tau}_1 + \underline{\tau}_2^T \tau_1 \tau_1 \delta \underline{\tau}_2 \right]}_{\delta \underline{n}_B}. \quad (\text{B.15})$$

La dernière étape, dans l'évaluation de $\delta \underline{n}$, consiste à éliminer les formes matricielles de (B.15). Pour ce faire, considérons la propriété:

$$\underline{a}\underline{a} = \underline{a} \otimes \underline{a} - \underline{a} \cdot \underline{a} \underline{I} \quad (\text{B.16})$$

où \otimes représente le produit tensoriel, \underline{I} , le tenseur identité, et \underline{a} , la matrice antisymétrique associée au vecteur \underline{a} telle que définie par (B.9). Appliquée à (B.15), l'expression $\delta \underline{n}_B$ peut être réécrite sous la forme:

$$\delta \underline{n}_B = K^3 \tau_1 \tau_2 \left[(-\underline{m}_{22} \underline{\tau}_1^T + \underline{m}_{12} \underline{\tau}_2^T) \delta \underline{\tau}_1 + (-\underline{m}_{11} \underline{\tau}_2^T + \underline{m}_{21} \underline{\tau}_1^T) \delta \underline{\tau}_2 \right] \quad (\text{B.17})$$

où $\underline{m}_{\alpha\beta} = \underline{\tau}_\alpha \cdot \underline{\tau}_\beta$ sont les composantes de la métrique covariante associée à la configuration spatiale et définie de façon similaire à (3.15). Considérant la métrique duale obtenue par la relation:

$$[\underline{m}^{\alpha\beta}] = \frac{1}{\det[\underline{m}_{\alpha\beta}]} \text{cof}[\underline{m}_{\alpha\beta}] = \frac{1}{K^2} \text{cof}[\underline{m}_{\alpha\beta}], \quad (\text{B.18})$$

l'expression (B.17) devient:

$$\delta \underline{n}_B = -K \tau_1 \tau_2 \left[\underline{\tau}_1^T (\underline{m}^{11} \delta \underline{\tau}_1 + \underline{m}^{12} \delta \underline{\tau}_2) + \underline{\tau}_2^T (\underline{m}^{21} \delta \underline{\tau}_1 + \underline{m}^{22} \delta \underline{\tau}_2) \right]. \quad (\text{B.19})$$

En substituant, à l'aide de (B.9), l'expression $\tau_1 \tau_2 \tau_1^T$ par $\tau_2 \tau_1 \tau_1^T$ et utilisant (B.16), l'expression (B.19) devient:

$$\begin{aligned} \delta \underline{n}_B = & -K \left[\tau_2 \tau_1 \tau_1 (\underline{m}^{11} \delta \underline{\tau}_1 + \underline{m}^{12} \delta \underline{\tau}_2) + \tau_1 \tau_2 \tau_2 (\underline{m}^{21} \delta \underline{\tau}_1 + \underline{m}^{22} \delta \underline{\tau}_2) \right] \\ & - K \tau_1 \left[\underline{m}_{22} \underline{m}^{21} \delta \underline{\tau}_1 + \underline{m}_{22} \underline{m}^{22} \delta \underline{\tau}_2 \right] \\ & - K \tau_2 \left[\underline{m}_{11} \underline{m}^{11} \delta \underline{\tau}_1 + \underline{m}_{11} \underline{m}^{12} \delta \underline{\tau}_2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Finalement, en substituant, à l'aide de (B.16) les produits matriciels triples de (B.20) par:

$$\tau_2 \tau_1 \tau_1 = (\underline{\tau}_1 \underline{\tau}_2^T - \underline{m}_{21} \underline{I}) \tau_1^T \quad (\text{B.21a})$$

$$\tau_1 \tau_2 \tau_2 = (\underline{\tau}_2 \underline{\tau}_1^T - \underline{m}_{12} \underline{I}) \tau_2^T \quad (\text{B.21b})$$

et considérant la propriété $\mathbf{m}_{\alpha\beta}\mathbf{m}^{\gamma\beta} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$ ainsi que la définition anti-symétrique de la normale, donnée par (B.9), l'expression (B.20) se réécrit sous la forme:

$$\begin{aligned} \delta \underline{n}_B = & -\tau_1 \underline{n}^T (\mathbf{m}^{11} \delta \tau_1 + \mathbf{m}^{12} \delta \tau_2) - \tau_2 \underline{n}^T (\mathbf{m}^{21} \delta \tau_1 + \mathbf{m}^{22} \delta \tau_2) \\ & - K(\tau_1 \delta \tau_2 + \tau_2 \delta \tau_1). \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Après substitution dans (B.15), l'expression de $\delta \underline{n}$ devient, après simplification:

$$\delta \underline{n} = -\tau_1 \underline{n}^T (\mathbf{m}^{11} \delta \tau_1 + \mathbf{m}^{12} \delta \tau_2) - \tau_2 \underline{n}^T (\mathbf{m}^{21} \delta \tau_1 + \mathbf{m}^{22} \delta \tau_2) \quad (\text{B.23})$$

où encore, sous format indiciel:

$$\begin{aligned} \delta \underline{n} = & -\tau_1 \underline{n}^T \mathbf{m}^{1\beta} \delta \tau_{\beta} - \tau_2 \underline{n}^T \mathbf{m}^{2\beta} \delta \tau_{\beta} \\ & - \tau_{\alpha} \underline{n}^T \mathbf{m}^{\alpha\beta} \delta \tau_{\beta}. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Finalement, considérant la définition de $\delta \tau_{\beta}$ obtenue de (B.5), l'expression (B.24) devient:

$$\delta \underline{n} = -\tau_{\alpha} \underline{n}^T \mathbf{m}^{\alpha\beta} \left[\underline{e}_{\gamma,\beta}(\bar{\xi}) \delta \bar{\xi}^{\gamma} + \delta \underline{u}_{,\beta}^2 \right]. \quad (\text{B.25})$$

B.3 Évaluation du terme δg

L'évaluation du terme δg est directement obtenu par application de l'opérateur δ sur la fonction écart g définie en (3.20):

$$\begin{aligned} \delta g = & \delta \left\{ -\underline{n} \cdot \left[\varphi^1(\underline{X}^1, t) - \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right] \right\} \\ = & -\underline{n} \cdot \left[\delta \varphi^1(\underline{X}^1, t) - \delta \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right] - \delta \underline{n} \cdot \left[\varphi^1(\underline{X}^1, t) - \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Selon les dépendances présentées dans (B.26), l'évaluation de l'expression virtuelle de la fonction écart nécessite la détermination des termes $\delta \varphi^1$, $\delta \varphi^2$ et $\delta \underline{n}$. Considérons, dans un premier temps, la définition explicite de φ^1 :

$$\varphi^1(\underline{X}^1, t) = \underline{X}^1 + \underline{u}^1(\underline{X}^1, t). \quad (\text{B.27})$$

On remarque aisément que contrairement à $\delta \varphi^2$, l'expression $\delta \varphi^1$ s'obtient directement et simplement par application de l'opérateur δ sur (B.27) telle que:

$$\begin{aligned} \delta \varphi^1 = & \frac{\partial \varphi^1}{\partial \underline{X}^1} \delta \underline{X}^1 + \frac{\partial \varphi^1}{\partial \underline{u}^1} \delta \underline{u}^1 \\ = & \delta \underline{u}^1 \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

où $\delta \underline{u}^1$ représente le champ de déplacement virtuel associé à Γ_c^1 . Utilisant les définitions de $\delta \varphi^2$ et $\delta \underline{n}$ telles que données par (B.4) et (B.25), ainsi que (3.12), l'expression (B.26) devient:

$$\delta g = -\underline{n} \cdot \left[\delta \underline{u}^1 - \delta \underline{u}^2 - \underline{\tau}_\alpha \delta \bar{\xi}^\alpha \right] + g \underline{n} \cdot \underline{\tau}_\alpha \underline{n}^T \mathbf{m}^{\alpha\beta} \left[\underline{e}_{\gamma,\beta}(\bar{\xi}) \delta \bar{\xi}^\gamma + \delta \underline{u}_{,\beta}^2 \right]. \quad (\text{B.29})$$

Finalement, l'application de la condition d'orthogonalité $\underline{n} \cdot \underline{\tau}_\alpha = 0$ à (B.29) permet l'obtention de la forme finale de la composante virtuelle de la fonction écart telle que:

$$\delta g = -\underline{n} \cdot \left[\delta \underline{u}^1 - \delta \underline{u}^2 \right]. \quad (\text{B.30})$$

D'une façon toute aussi élégante, l'expression (B.29) peut être obtenue par application de l'opérateur δ à la définition de base de la fonction écart (3.7) telle que:

$$\begin{aligned} \delta g &= \delta \left\{ \left\| \varphi^1(\underline{X}^1, t) - \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right\| S(g(\underline{X}^1, t)) \right\} \\ &= \delta \left\{ |g| S(g(\underline{X}^1, t)) \right\} \\ &= \delta |g| S(g(\underline{X}^1, t)) + |g| \delta \{ S(g(\underline{X}^1, t)) \} \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

où $|g|$ représente la valeur absolue de la fonction écart et par le fait même, la distance entre les points P^1 et P^2 . L'expression (B.31), qui ne nécessite que le calcul de $\delta |g|$ et $\delta S(g)$, permet d'éviter l'évaluation explicite de $\delta \underline{n}$. Dans ce contexte, le terme $\delta |g|$ est obtenu directement en procédant à une écriture explicite de $|g|$ telle que:

$$\begin{aligned} \delta |g| &= \delta \left\{ \left[\varphi^1(\underline{X}^1, t) - \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right] \cdot \left[\varphi^1(\underline{X}^1, t) - \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2|g|} \delta \left\{ \left[\varphi^1(\underline{X}^1, t) - \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right] \cdot \left[\varphi^1(\underline{X}^1, t) - \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{|g|} \left[\varphi^1(\underline{X}^1, t) - \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right] \cdot \left[\delta \varphi^1 - \delta \varphi^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

représentant ainsi l'expression virtuelle de la distance entre les points P^1 et P^2 . Considérant les définitions usuelles de $\delta \varphi^1$ et $\delta \varphi^2$ données respectivement par (B.27) et (B.4) ainsi que (3.12), l'expression (B.32) devient:

$$\begin{aligned} \delta |g| &= \frac{1}{|g|} \left[\varphi^1(\underline{X}^1, t) - \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right] \cdot \left[\delta \underline{u}^1 - \delta \underline{u}^2 - \underline{\tau}_\alpha \delta \bar{\xi}^\alpha \right] \\ &= -\frac{g}{|g|} \underline{n} \cdot \left[\delta \underline{u}^1 - \delta \underline{u}^2 - \underline{\tau}_\alpha \delta \bar{\xi}^\alpha \right] \\ &= -S(g) \underline{n} \cdot \left[\delta \underline{u}^1 - \delta \underline{u}^2 - \underline{\tau}_\alpha \delta \bar{\xi}^\alpha \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Pour ce qui est du terme $\delta S(g)$, celui-ci est obtenu en considérant la définition usuelle de

S(g) telle que:

$$\begin{aligned}
\delta S(g) &= \delta \frac{g}{|g|} \\
&= \frac{1}{|g|} - \frac{g}{|g|^2} S(g) \\
&= \frac{1}{|g|} - \frac{g}{|g|^2} \frac{|g|}{g} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.34}$$

Par conséquent, en regroupant les expression (B.33) et (B.34) dans (B.31), ont obtient l'expression de δg telle que:

$$\begin{aligned}
\delta g &= -S(g)^2 \underline{n} \cdot \left[\delta \underline{u}^1 - \delta \underline{u}^2 - \underline{\tau}_\alpha \delta \bar{\xi}^\alpha \right] + 0 \\
&= -\underline{n} \cdot \left[\delta \underline{u}^1 - \delta \underline{u}^2 - \underline{\tau}_\alpha \delta \bar{\xi}^\alpha \right].
\end{aligned} \tag{B.35}$$

Finalement, par respect de la condition d'orthogonalité entre \underline{n} et $\underline{\tau}_\alpha$, l'expression (B.35) devient:

$$\delta g = -\underline{n} \cdot \left[\delta \underline{u}^1 - \delta \underline{u}^2 \right]. \tag{B.36}$$

B.4 Évaluation du terme $\delta \bar{\xi}^\alpha$

L'évaluation de $\delta \bar{\xi}^\alpha$ est obtenue par application de l'opérateur δ sur la condition d'orthogonalité:

$$\left[\varphi^1(\underline{X}^1, t) - \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right] \cdot \underline{\tau}_\alpha = 0, \tag{B.37}$$

où $\varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t)$ correspond à la projection de $\varphi^1(\underline{X}^1, t)$ sur Γ_c^2 . De ce fait, la variation de (B.37) s'écrit:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta \left\{ \left[\varphi^1(\underline{X}^1, t) - \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right] \cdot \underline{\tau}_\alpha \right\} \\
&= \left[\delta \varphi^1(\underline{X}^1, t) - \delta \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right] \cdot \underline{\tau}_\alpha + \left[\varphi^1(\underline{X}^1, t) - \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right] \cdot \delta \underline{\tau}_\alpha.
\end{aligned} \tag{B.38}$$

Considérant les expressions respectives de $\delta \varphi^1$, $\delta \varphi^2$ et $\delta \underline{\tau}_\alpha$ définies par (B.28), (B.4) et (B.5), ainsi que (3.12), (B.38) peut être réécrit sous la forme:

$$\left[\delta \underline{u}^1 - \delta \underline{u}^2 - \underline{\tau}_\beta \delta \bar{\xi}^\beta \right] \cdot \underline{\tau}_\alpha = g \underline{n} \cdot \left[\underline{e}_{\alpha, \beta}(\bar{\xi}) \delta \bar{\xi}^\beta + \delta \underline{u}_{, \alpha}^2 \right]. \tag{B.39}$$

Finalement, en regroupant les termes en $\delta \bar{\xi}^\alpha$ et considérant la condition d'orthogonalité $\underline{n} \cdot \underline{\tau}_\alpha = 0$, l'expression (B.39) devient;

$$\mathbf{A}_{\alpha\beta} \delta \bar{\xi}^\beta = \left[\delta \underline{u}^1 - \delta \underline{u}^2 \right] \cdot \underline{\tau}_\alpha - g \underline{n} \cdot \delta \underline{u}_{,\alpha}^2 \quad (\text{B.40})$$

avec

$$\mathbf{A}_{\alpha\beta} = \mathbf{m}_{\alpha\beta} + g \underline{n} \cdot \underline{e}_{\alpha,\beta}(\bar{\xi}). \quad (\text{B.41})$$

Il importe de noter qu'en $g = 0$, l'expression (B.40) se résume à:

$$\begin{aligned} \delta \bar{\xi}^\alpha &= \mathbf{m}^{\alpha\beta} \underline{\tau}_\beta \cdot \left[\delta \underline{u}^1 - \delta \underline{u}^2 \right] \\ &= \underline{\tau}^\alpha \cdot \left[\delta \underline{u}^1 - \delta \underline{u}^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

B.5 Évaluation du terme Δt_N

Considérant une méthode de régularisation par pénalisation des équations de contact avec frottement, l'expression Δt_N est obtenue par application de l'opérateur Δ à la relation (3.34):

$$\Delta t_N = \Delta \langle \epsilon_N g \rangle. \quad (\text{B.43})$$

Les dépendances associées à (B.43) permettent d'écrire:

$$\begin{aligned} \Delta t_N &= \frac{\partial t_N}{\partial g} \Delta g \\ &= H(g) \epsilon_N \Delta g \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

où

$$H(g) = \begin{cases} 1 & \text{sig} \geq 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{B.45})$$

représente la fonction de Heaviside² et Δg , obtenue directement de (B.29) en remplaçant δ par Δ telle que:

$$\Delta g = -\underline{n} \cdot \left[\Delta \underline{u}^1 - \Delta \underline{u}^2 \right]. \quad (\text{B.46})$$

2. Bien que la fonction de Heaviside est non définie en $H(0)$, un certain abus de langage a été introduit dans la définition (B.45) admettant $H(0) = 0$.

B.6 Évaluation du terme $\Delta(\delta g)$

La linéarisation de la forme virtuelle de la fonction écart est obtenue en considérant l'expression non simplifiée (B.35) et ce, afin de permettre une meilleure visualisation de la symétrie associée au résultat de cette linéarisation. Dans ce contexte, $\Delta(\delta g)$ est obtenue par application de l'opérateur Δ à (B.35) telle que:

$$\begin{aligned}\Delta(\delta g) &= \Delta \left\{ -\underline{n} \cdot \left[\delta \underline{u}^1 - \delta \underline{u}^2 - \underline{\tau}_\alpha \delta \bar{\xi}^\alpha \right] \right\} \\ &= -\Delta \underline{n} \cdot \left[\delta \underline{u}^1 - \delta \underline{u}^2 - \underline{\tau}_\alpha \delta \bar{\xi}^\alpha \right] \\ &\quad - \underline{n} \cdot \left[\Delta(\delta \underline{u}^1) - \Delta(\delta \underline{u}^2) - \Delta \underline{\tau}_\alpha \delta \bar{\xi}^\alpha \right]\end{aligned}\quad (\text{B.47})$$

où les termes $\underline{\tau}_\alpha$ et $\Delta \underline{n}$ sont définis respectivement par les expressions (B.5) et (B.25), en remplaçant δ par Δ :

$$\Delta \underline{\tau}_\alpha = e_{\alpha,\beta}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\beta + \Delta \underline{u}_{,\alpha}^2 \quad (\text{B.48a})$$

$$\Delta \underline{n} = -\underline{\tau}_\alpha \underline{n}^T \mathbf{m}^{\alpha\beta} \left[e_{\beta,\gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\gamma + \Delta \underline{u}_{,\beta}^2 \right]. \quad (\text{B.48b})$$

Pour ce qui est des termes $\Delta(\delta \underline{u}^1)$ et $\Delta(\delta \underline{u}^2)$, ceux-ci sont évalués en considérant nulle, la dérivée partielle de Gâteaux et ce, en raison de la nature virtuelle des termes en cause. De ce fait, seule la variation en fonction des composantes paramétrique $\bar{\xi}^\alpha$ permet l'obtention d'une contribution non nulle à la linéarisation. Dans cette optique, les deux termes s'écrivent respectivement:

$$\Delta(\delta \underline{u}^1) = \frac{\partial(\delta \underline{u}^1)}{\partial \bar{\xi}^\alpha} \Delta \bar{\xi}^\alpha = 0 \quad (\text{B.49a})$$

$$\Delta(\delta \underline{u}^2) = \frac{\partial(\delta \underline{u}^2)}{\partial \bar{\xi}^\alpha} \Delta \bar{\xi}^\alpha = \delta \underline{u}_{,\alpha}^2 \Delta \bar{\xi}^\alpha. \quad (\text{B.49b})$$

L'expression entièrement définie de $\Delta(\delta g)$ est donc obtenue en substituant les expressions (B.48), (B.49a) et (B.49b) dans (B.47) telle que:

$$\begin{aligned}\Delta(\delta g) &= \left[\delta \underline{u}^1 - \delta \underline{u}^2 - \underline{\tau}_\alpha \delta \bar{\xi}^\alpha \right] \cdot \underline{\tau}_\beta \underline{n}^T \mathbf{m}^{\beta\gamma} \left[e_{\alpha,\gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\alpha + \Delta \underline{u}_{,\gamma}^2 \right] \\ &\quad + \underline{n} \cdot \left[\delta \underline{u}_{,\alpha}^2 \Delta \bar{\xi}^\alpha \right] + \underline{n} \cdot \left[e_{\alpha,\beta}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\beta \delta \bar{\xi}^\alpha \right] + \underline{n} \cdot \left[\Delta \underline{u}_{,\alpha}^2 \delta \bar{\xi}^\alpha \right].\end{aligned}\quad (\text{B.50})$$

Finalement, la prise en compte de l'expression (B.39) dans (B.50) permet de réécrire celle-ci sous la forme:

$$\begin{aligned}\Delta(\delta g) &= g \underline{n} \cdot \left[e_{\alpha,\beta}(\bar{\xi}) \delta \bar{\xi}^\beta + \delta \underline{u}_{,\alpha}^2 \right] \underline{n}^T \mathbf{m}^{\beta\gamma} \left[e_{\alpha,\gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\alpha + \Delta \underline{u}_{,\gamma}^2 \right] \\ &\quad + \underline{n} \cdot \left[\delta \underline{u}_{,\alpha}^2 \Delta \bar{\xi}^\alpha \right] + \underline{n} \cdot \left[e_{\alpha,\beta}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\beta \delta \bar{\xi}^\alpha \right] + \underline{n} \cdot \left[\Delta \underline{u}_{,\alpha}^2 \delta \bar{\xi}^\alpha \right].\end{aligned}\quad (\text{B.51})$$

B.7 Évaluation du terme $\Delta(\delta \bar{\xi}^\alpha)$

Considérons, dans un premier temps, l'expression de $\delta \bar{\xi}^\alpha$ définie par (B.40) dans laquelle le terme $-g\bar{n}$ a été remplacé par (3.12) afin de faire disparaître la contribution implicite de la normale et ainsi alléger la linéarisation:

$$\left\{ \tau_\alpha \cdot \tau_\beta - \left[\varphi^1(\underline{X}^1, t) - \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right] \cdot \underline{e}_{\alpha, \beta}(\bar{\xi}) \right\} \delta \bar{\xi}^\beta = \quad (\text{B.52a})$$

$$\left[\delta \underline{u}^1 - \delta \underline{u}^2 \right] \cdot \tau_\alpha \quad (\text{B.52b})$$

$$+ \left[\varphi^1(\underline{X}^1, t) - \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right] \cdot \delta \underline{u}_{, \alpha}^2. \quad (\text{B.52c})$$

L'évaluation de $\Delta(\delta \bar{\xi}^\alpha)$ consiste donc en l'application de l'opérateur Δ sur chaque terme de l'expression (B.52). Ainsi, considérons la linéarisation de (B.52a) définie par:

$$\Delta \left\{ \left[\tau_\alpha \cdot \tau_\beta - \left[\varphi^1(\underline{X}^1, t) - \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right] \cdot \underline{e}_{\alpha, \beta}(\bar{\xi}) \right] \delta \bar{\xi}^\beta \right\} = \quad (\text{B.53a})$$

$$\left[\Delta \tau_\alpha \cdot \tau_\beta + \Delta \tau_\beta \cdot \tau_\alpha \right] \delta \bar{\xi}^\beta \quad (\text{B.53b})$$

$$- \left[\Delta \varphi^1(\underline{X}^1, t) - \Delta \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right] \cdot \underline{e}_{\alpha, \beta}(\bar{\xi}) \delta \bar{\xi}^\beta \quad (\text{B.53c})$$

$$+ g\bar{n} \cdot \Delta \underline{e}_{\alpha, \beta}(\bar{\xi}) \delta \bar{\xi}^\beta \quad (\text{B.53c})$$

$$+ \mathbf{A}_{\alpha\beta} \Delta(\delta \bar{\xi}^\beta)$$

où $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$ est défini par (B.41). Considérant la définition déjà établie de $\Delta \tau_\alpha$ donnée par (B.48a) ainsi que celles de $\Delta \varphi^1$ et $\Delta \varphi^2$, données respectivement par (B.28) et (B.4), en remplaçant δ par Δ tel que:

$$\Delta \varphi^1(\underline{X}^1, t) = \Delta \underline{u}^1 \quad (\text{B.54a})$$

$$\Delta \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) = \tau_\alpha \Delta \bar{\xi}^\alpha + \Delta \underline{u}^2, \quad (\text{B.54b})$$

le seul terme indéterminé demeure $\Delta \underline{e}_{\alpha, \beta}$. Connaissant pertinemment la définition de $\underline{e}_{\alpha, \beta}$ par (B.54b), sa linéarisation est s'écrit:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{e}_{\alpha, \beta}(\bar{\xi}) &= \Delta \left\{ \frac{\partial \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t)}{\partial \bar{\xi}^\alpha \partial \bar{\xi}^\beta} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^\alpha \partial \bar{\xi}^\beta} \Delta \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \\ &= \underline{e}_{\alpha, \beta\gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\gamma + \Delta \underline{u}_{, \alpha\beta}^2. \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

Selon les dernières définitions, l'évaluation des termes (B.53) donne respectivement:

$$\Delta \left\{ \left[\tau_\alpha \cdot \tau_\beta - \left[\varphi^1(X^1, t) - \varphi^2(\Psi_0(\bar{\xi}), t) \right] \cdot e_{\alpha, \beta}(\bar{\xi}) \right] \delta \bar{\xi}^\beta \right\} =$$

$$\tau_\alpha \cdot \left[e_{\beta, \gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\gamma + \Delta u_{, \beta}^2 \right] \delta \bar{\xi}^\beta \quad (\text{B.56a})$$

$$\tau_\beta \cdot \left[e_{\alpha, \gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\gamma + \Delta u_{, \alpha}^2 \right] \delta \bar{\xi}^\beta \quad (\text{B.56b})$$

$$- \left[\Delta u^1 - \Delta u^2 - \tau_\gamma \Delta \bar{\xi}^\gamma \right] \cdot e_{\alpha, \beta} \delta \bar{\xi}^\beta \quad (\text{B.56c})$$

$$+ g\tilde{n} \cdot \left[e_{\alpha, \beta \gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\gamma + \Delta u_{, \alpha \beta}^2 \right] \delta \bar{\xi}^\beta \quad (\text{B.56d})$$

$$+ A_{\alpha \beta} \Delta (\delta \bar{\xi}^\beta)$$

Quant au terme (B.52b), sa linéarisation est définie par:

$$\Delta \left\{ \left[\delta u^1 - \delta u^2 \right] \cdot \tau_\alpha \right\} =$$

$$\left[\Delta (\delta u^1) - \Delta (\delta u^2) \right] \cdot \tau_\alpha \quad (\text{B.57a})$$

$$+ \left[\delta u^1 - \delta u^2 \right] \cdot \Delta \tau_\alpha \quad (\text{B.57b})$$

Utilisant les définitions de $\Delta (\delta u^1)$, $\Delta (\delta u^2)$ et $\Delta \tau_\alpha$ données respectivement par (B.49a), (B.49b) et (B.48a), l'expression (B.57) devient:

$$\Delta \left\{ \left[\delta u^1 - \delta u^2 \right] \cdot \tau_\alpha \right\} =$$

$$- \left[\delta u_{, \beta}^2 \Delta \bar{\xi}^\beta \right] \cdot \tau_\alpha \quad (\text{B.58a})$$

$$+ \left[\delta u^1 - \delta u^2 \right] \cdot \left[e_{\alpha, \gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\gamma + \Delta u_{, \alpha}^2 \right]. \quad (\text{B.58b})$$

Finalement, la linéarisation de (B.52c) s'obtient par:

$$\Delta \left\{ \left[\varphi^1(X^1, t) - \varphi^2(\Psi_0(\bar{\xi}), t) \right] \cdot \delta u_{, \alpha}^2 \right\} =$$

$$\left[\Delta \varphi^1(X^1, t) - \Delta \varphi^2(\Psi_0(\bar{\xi}), t) \right] \cdot \delta u_{, \alpha}^2 \quad (\text{B.59a})$$

$$- g\tilde{n} \cdot \Delta (\delta u_{, \alpha}^2) \quad (\text{B.59b})$$

Considérant les définitions de $\Delta \varphi^1$ et $\Delta \varphi^2$ données respectivement par (B.54a) et (B.54b) et celle de $\Delta (\delta u_{, \alpha}^2)$ définie par:

$$\Delta (\delta u_{, \alpha}^2) = \frac{\partial \delta u_{, \alpha}^2}{\partial \bar{\xi}^\beta} \Delta \bar{\xi}^\beta = \delta u_{, \alpha \beta}^2 \Delta \bar{\xi}^\beta, \quad (\text{B.60})$$

chaque terme de l'expression (B.59) devient respectivement:

$$\Delta \left\{ \left[\varphi^1(\underline{X}^1, t) - \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\bar{\xi}), t) \right] \cdot \delta \underline{u}_{,\alpha}^2 \right\} =$$

$$\left[\Delta \underline{u}^1 - \Delta \underline{u}^2 - \tau_{\beta} \Delta \bar{\xi}^{\beta} \right] \cdot \delta \underline{u}_{,\alpha}^2 \quad (\text{B.61a})$$

$$- g \underline{n} \cdot \delta \underline{u}_{,\alpha\beta}^2 \Delta \bar{\xi}^{\beta} \quad (\text{B.61b})$$

Le regroupement de l'ensemble des termes linéarisés (B.56), (B.58) et (B.61) permet d'obtenir, après réarrangement, la linéarisation complète de $\delta \bar{\xi}^{\alpha}$ devient:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\alpha\beta} \Delta (\delta \bar{\xi}^{\beta}) = & - \left[\tau_{\alpha} \cdot e_{\beta,\gamma}(\bar{\xi}) + g \underline{n} \cdot e_{\alpha,\beta\gamma}(\bar{\xi}) \right] \Delta \bar{\xi}^{\gamma} \delta \bar{\xi}^{\beta} \\ & - \tau_{\alpha} \cdot \Delta \underline{u}_{,\beta}^2 \delta \bar{\xi}^{\beta} - \tau_{\alpha} \delta \underline{u}_{,\beta}^2 \Delta \bar{\xi}^{\beta} \\ & - \delta \bar{\xi}^{\beta} \tau_{\beta} \cdot \left[e_{\alpha,\gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^{\gamma} + \Delta \underline{u}_{,\alpha}^2 \right] \\ & - \Delta \bar{\xi}^{\beta} \tau_{\beta} \cdot \left[e_{\alpha,\gamma}(\bar{\xi}) \delta \bar{\xi}^{\gamma} + \delta \underline{u}_{,\alpha}^2 \right] \\ & - g \underline{n} \cdot \left[\Delta \underline{u}_{,\alpha\beta}^2 \delta \bar{\xi}^{\beta} + \delta \underline{u}_{,\alpha\beta}^2 \Delta \bar{\xi}^{\beta} \right] \\ & + \left[\delta \underline{u}^1 - \delta \underline{u}^2 \right] \cdot \left[e_{\alpha,\gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^{\gamma} + \Delta \underline{u}_{,\alpha}^2 \right] \\ & + \left[\Delta \underline{u}^1 - \Delta \underline{u}^2 \right] \cdot \left[e_{\alpha,\gamma}(\bar{\xi}) \delta \bar{\xi}^{\gamma} + \delta \underline{u}_{,\alpha}^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

B.8 Évaluation du terme $\Delta t_{T_{\alpha_t + \Delta t}}$

L'évaluation de l'expression $\Delta t_{T_{\alpha_t + \Delta t}}$ est obtenue par application de l'opérateur Δ sur l'expression (4.24), résultat de l'intégration en temps de la vitesse de frottement sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$. La forme linéarisée s'écrit donc:

$$\Delta t_{T_{\alpha_t + \Delta t}} = \begin{cases} \Delta \left\{ t_{T_{\alpha_t}} + \epsilon_T \mathbf{M}_{\alpha\beta} \left(\bar{\xi}_{t+\Delta t}^{\beta} - \bar{\xi}_t^{\beta} \right) \right\} & (\text{sans glissement}) \\ \Delta \left\{ \mu t N_{t+\Delta t} \frac{i_{T_{\alpha_t + \Delta t}}}{\| \underline{t}_{T_{\alpha_t + \Delta t}}^{\beta} \|} \right\} & (\text{avec glissement}). \end{cases} \quad (\text{B.63})$$

Comme on peut le constater, l'évaluation de $\Delta t_{T_{\alpha_t + \Delta t}}$ par (B.63), mène à une écriture non unique de la linéarisation associée aux conditions de frottement à l'interface. Finalement, il importe de noter que la linéarisation, étant effectuée au temps $t + \Delta t$, permet de considérer comme constante, la linéarisation de toutes quantités évaluées au temps t . Dans ce contexte, et ce, dans le but d'alléger le texte, toute quantité non linéarisée dont l'indice temporelle n'apparaît pas doit être considérée comme étant une quantité évaluée en $t + \Delta t$.

B.8.1 Linéarisation sans glissement

En absence de glissement, la linéarisation (B.63) peut être réécrite sous la forme:

$$\Delta t_{T_{\alpha_t + \Delta t}} = \epsilon_T \left[\Delta M_{\alpha\beta} \left(\bar{\xi}_{t+\Delta t}^\beta - \bar{\xi}_t^\beta \right) + M_{\alpha\beta} \Delta \left(\bar{\xi}_{t+\Delta t}^\beta - \bar{\xi}_t^\beta \right) \right] \quad (\text{B.64})$$

où $\Delta M_{\alpha\beta}$ représente la linéarisation de la métrique $M_{\alpha\beta}$ associée à la configuration de référence. Se basant sur la définition (3.15), le terme $\Delta M_{\alpha\beta}$ n'est fonction que de la position du point de projection $\tilde{\xi}$ et s'écrit:

$$\begin{aligned} \Delta M_{\alpha\beta} &= \Delta \{ \tilde{T}_\alpha \cdot \tilde{T}_\beta \} \\ &= \Delta \tilde{T}_\alpha \cdot \tilde{T}_\beta + \tilde{T}_\alpha \cdot \Delta \tilde{T}_\beta \\ &= M_{\alpha\beta,\gamma} \Delta \tilde{\xi}^\gamma. \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

Pour ce qui est du deuxième terme de (B.64), celui-ci est obtenu simplement par:

$$\begin{aligned} \Delta \left(\bar{\xi}_{t+\Delta t}^\beta - \bar{\xi}_t^\beta \right) &= \Delta \bar{\xi}_{t+\Delta t}^\beta - \Delta \bar{\xi}_t^\beta \\ &= \Delta \bar{\xi}^\beta. \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

Finalement, en regroupant les expressions (B.65) et (B.66) dans (B.64), on obtient l'expression:

$$\begin{aligned} \Delta t_{T_{\alpha_t + \Delta t}} &= \Delta \hat{t}_{T_{\alpha_t + \Delta t}} \\ &= \epsilon_T \left[M_{\alpha\beta,\gamma} \Delta \bar{\xi}^\gamma \left(\bar{\xi}_{t+\Delta t}^\beta - \bar{\xi}_t^\beta \right) + M_{\alpha\beta} \Delta \bar{\xi}^\beta \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.67})$$

B.8.2 Linéarisation avec glissement

L'obtention de la forme linéarisée de la contrainte de frottement dans un contexte de glissement, constitue une des étapes les plus laborieuses dans la procédure de linéarisation du problème de contact avec frottement. Dans un premier temps, considérons la variation de (B.63) et ce, par rapport à chaque quantité:

$$\Delta t_{T_{\alpha_t + \Delta t}} = \mu \Delta t_N \hat{t}_{T_{\alpha_t + \Delta t}} K \quad (\text{B.68a})$$

$$+ \mu t_{N_{t+\Delta t}} K \Delta \hat{t}_{T_{\alpha_t + \Delta t}} \quad (\text{B.68b})$$

$$+ \mu t_{N_{t+\Delta t}} \hat{t}_{T_{\alpha_t + \Delta t}} \Delta K \quad (\text{B.68c})$$

où

$$K = \frac{1}{\|\hat{t}_{T_{t+\Delta t}}^p\|} = \frac{1}{k}. \quad (\text{B.69})$$

On remarque aisément que les termes (B.68a) et (B.68b) sont entièrement déterminés, et ce, en raison des définitions déjà établies de Δt_N et $\Delta \hat{t}_{T_{\alpha_t + \Delta t}}$, par (B.44) et (B.67) respectivement. Dans ce contexte, et introduisant la définition:

$$P_{T_\alpha} = \frac{\hat{t}_{T_{\alpha_t + \Delta t}}}{k}, \quad (\text{B.70})$$

l'expression (B.68) devient:

$$\Delta t_{T_{\alpha_t + \Delta t}} = \mu H(g) \epsilon_N P_{T_\alpha} \Delta g \quad (\text{B.71a})$$

$$+ \frac{\mu \hat{t}_{N_t + \Delta t}}{k} \Delta \hat{t}_{T_{\alpha_t + \Delta t}} \quad (\text{B.71b})$$

$$+ \mu \hat{t}_{N_t + \Delta t} \hat{t}_{T_{\alpha_t + \Delta t}} \Delta K. \quad (\text{B.71c})$$

Pour ce qui est de ΔK , celui-ci est directement obtenu par:

$$\Delta K = \frac{\partial K}{\partial k} \Delta k = -\frac{1}{k^2} \Delta k. \quad (\text{B.72})$$

Selon (B.72), la difficulté majeure réside donc dans l'évaluation du terme Δk . Pour ce faire, réécrivons le terme k en fonction de la définition (3.29), selon laquelle:

$$k = \left\{ \left[\hat{t}_{T_1} \tilde{\tau}^1 + \hat{t}_{T_2} \tilde{\tau}^2 \right] \cdot \left[\hat{t}_{T_1} \tilde{\tau}^1 + \hat{t}_{T_2} \tilde{\tau}^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.73})$$

La variation Δk est donc obtenue par application de l'opérateur Δ sur l'expression (B.73) telle que:

$$\Delta k = \frac{1}{k} \left\{ (\hat{t}_{T_1} \tilde{\tau}^1 \cdot \tilde{\tau}^1 + \hat{t}_{T_2} \tilde{\tau}^1 \cdot \tilde{\tau}^2) \Delta \hat{t}_{T_1} + (\hat{t}_{T_2} \tilde{\tau}^2 \cdot \tilde{\tau}^2 + \hat{t}_{T_1} \tilde{\tau}^1 \cdot \tilde{\tau}^2) \Delta \hat{t}_{T_2} \right\} \\ + \frac{1}{k} \left\{ (\hat{t}_{T_1}^2 \tilde{\tau}^1 + \hat{t}_{T_1} \hat{t}_{T_2} \tilde{\tau}^2) \cdot \Delta \tilde{\tau}^1 + (\hat{t}_{T_2}^2 \tilde{\tau}^2 + \hat{t}_{T_1} \hat{t}_{T_2} \tilde{\tau}^1) \cdot \Delta \tilde{\tau}^2 \right\}. \quad (\text{B.74})$$

En injectant le résultat (B.74) dans l'expression (B.72), et sachant que $\mathbf{m}^{\alpha\beta} = \tilde{\tau}^\alpha \cdot \tilde{\tau}^\beta$, cette dernière peut être réécrite, sous la forme:

$$\Delta K = -\frac{1}{k^3} (\Delta K_A + \Delta K_B) \quad (\text{B.75})$$

avec

$$\Delta K_A = (\mathbf{m}^{11} \hat{t}_{T_1} + \mathbf{m}^{12} \hat{t}_{T_2}) \Delta \hat{t}_{T_1} + (\mathbf{m}^{12} \hat{t}_{T_1} + \mathbf{m}^{22} \hat{t}_{T_2}) \Delta \hat{t}_{T_2} \quad (\text{B.76a})$$

$$\Delta K_B = (\hat{t}_{T_1}^2 \tilde{\tau}^1 + \hat{t}_{T_1} \hat{t}_{T_2} \tilde{\tau}^2) \cdot \Delta \tilde{\tau}^1 + (\hat{t}_{T_2}^2 \tilde{\tau}^2 + \hat{t}_{T_1} \hat{t}_{T_2} \tilde{\tau}^1) \cdot \Delta \tilde{\tau}^2 \quad (\text{B.76b})$$

où $\Delta \hat{t}_{T_{\alpha_t + \Delta t}}$ est donné par (B.67). Le reste du travail associé à la détermination de ΔK , consiste à déterminer les écritures associées à la linéarisation des vecteurs de base $\Delta \tilde{\tau}^\alpha$ présent

dans (B.76b). Pour ce faire, exprimons simplement le vecteur $\tilde{\tau}^1$ en fonction des vecteurs $\tilde{\tau}_\alpha$ à l'aide des relations (3.14) et (B.18) tel que:

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}^1 &= \mathbf{m}^{11}\tilde{\tau}_1 + \mathbf{m}^{12}\tilde{\tau}_2 \\ &= \frac{1}{\det[\mathbf{m}_{\alpha\beta}]} \left(\mathbf{m}_{22}\tilde{\tau}_1 - \mathbf{m}_{12}\tilde{\tau}_2 \right)\end{aligned}\quad (\text{B.77})$$

où

$$\det[\mathbf{m}_{\alpha\beta}] = \mathbf{m}_{11}\mathbf{m}_{22} - \mathbf{m}_{12}^2 \quad (\text{B.78})$$

représente le déterminant de la métrique $\mathbf{m}_{\alpha\beta}$. Sachant pertinemment que $\mathbf{m}_{\alpha\beta} = \tilde{\tau}_\alpha \cdot \tilde{\tau}_\beta$, la linéarisation de (B.77) n'implique donc que des variations par rapport aux vecteurs $\tilde{\tau}_1$ et $\tilde{\tau}_2$. Dans ce contexte, l'application de l'opérateur Δ à l'expression (B.77) permet d'écrire:

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{\tau}^1 &= \frac{1}{\det[\mathbf{m}_{\alpha\beta}]} \left(\Delta \mathbf{m}_{22}\tilde{\tau}_1 + \mathbf{m}_{22} \Delta \tilde{\tau}_1 - \Delta \mathbf{m}_{12}\tilde{\tau}_2 - \mathbf{m}_{12} \Delta \tilde{\tau}_2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{\det[\mathbf{m}_{\alpha\beta}]} \left(\Delta \mathbf{m}_{11}\mathbf{m}_{22} + \Delta \mathbf{m}_{22}\mathbf{m}_{11} - 2\mathbf{m}_{12} \Delta \mathbf{m}_{12} \right) \tilde{\tau}^1.\end{aligned}\quad (\text{B.79})$$

Utilisant la définition usuelle des composantes de la métrique telle que définie par (B.18), la linéarisation des composantes \mathbf{m}_{11} , \mathbf{m}_{22} et \mathbf{m}_{12} est obtenue de façon similaire à (B.65) telle que:

$$\Delta \mathbf{m}_{11} = 2\tilde{\tau}_1 \cdot \Delta \tilde{\tau}_1 \quad (\text{B.80a})$$

$$\Delta \mathbf{m}_{22} = 2\tilde{\tau}_2 \cdot \Delta \tilde{\tau}_2 \quad (\text{B.80b})$$

$$\Delta \mathbf{m}_{12} = \tilde{\tau}_1 \cdot \Delta \tilde{\tau}_2 + \tilde{\tau}_2 \cdot \Delta \tilde{\tau}_1 \quad (\text{B.80c})$$

En remplaçant (B.80) dans (B.79), on obtient l'expression:

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{\tau}^1 &= \frac{1}{\det[\mathbf{m}_{\alpha\beta}]} \left\{ (\mathbf{m}_{22}\mathbf{I} - \tilde{\tau}_2\tilde{\tau}_2^T) \Delta \tilde{\tau}_1 + (2\tilde{\tau}_1^T\tilde{\tau}_2 - \tilde{\tau}_2\tilde{\tau}_1^T - \mathbf{m}_{12}\mathbf{I}) \Delta \tilde{\tau}_2 \right\} \\ &\quad - \frac{2}{\det[\mathbf{m}_{\alpha\beta}]} \left\{ (\mathbf{m}_{22}\tilde{\tau}_1 - \mathbf{m}_{12}\tilde{\tau}_2) \cdot \Delta \tilde{\tau}_1 + (\mathbf{m}_{11}\tilde{\tau}_2 - \mathbf{m}_{12}\tilde{\tau}_1) \cdot \Delta \tilde{\tau}_2 \right\} \tilde{\tau}^1.\end{aligned}\quad (\text{B.81})$$

Finalement, et utilisant la définition (B.77) et regroupant les termes en $\Delta \tilde{\tau}_\alpha$, l'expression (B.81) devient:

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{\tau}^1 &= \left\{ \frac{1}{\det[\mathbf{m}_{\alpha\beta}]} (\mathbf{m}_{22}\mathbf{I} - \tilde{\tau}_2\tilde{\tau}_2^T) - 2\tilde{\tau}^1\tilde{\tau}^{1T} \right\} \Delta \tilde{\tau}_1 \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{\det[\mathbf{m}_{\alpha\beta}]} (2\tilde{\tau}_1\tilde{\tau}_2^T - \tilde{\tau}_2\tilde{\tau}_1^T - \mathbf{m}_{12}\mathbf{I}) - 2\tilde{\tau}^1\tilde{\tau}^{2T} \right\} \Delta \tilde{\tau}_2.\end{aligned}\quad (\text{B.82})$$

Par une procédure tout à fait similaire, on vérifie aisément que la forme linéarisée du vecteur $\tilde{\tau}^2$ s'écrit:

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{\tau}^2 &= \left\{ \frac{1}{\det[\mathbf{m}_{\alpha\beta}]} (2\tilde{\tau}_2\tilde{\tau}_1^T - \tilde{\tau}_1\tilde{\tau}_2^T - \mathbf{m}_{12}\mathbf{I}) - 2\tilde{\tau}^2\tilde{\tau}^{1T} \right\} \Delta \tilde{\tau}_1 \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{\det[\mathbf{m}_{\alpha\beta}]} (\mathbf{m}_{11}\mathbf{I} - \tilde{\tau}_1\tilde{\tau}_1^T) - 2\tilde{\tau}^2\tilde{\tau}^{2T} \right\} \Delta \tilde{\tau}_2.\end{aligned}\quad (\text{B.83})$$

Les expressions (B.82) et (B.83) permettent donc la détermination complète de (B.76b) en fonction de termes déjà évaluées, en l'occurrence, les vecteurs $\Delta \tau_\alpha$. En injectant les nouvelles définitions des vecteurs $\Delta \tau^1$ et $\Delta \tau^2$ dans (B.76b), et en appliquant la transformation (B.77) ainsi que la simplification $\tau_\alpha \cdot \tau^\beta = \delta_\alpha^\beta$, on obtient, après regroupement des termes en $\Delta \tau_\alpha$:

$$\Delta K_A = (\mathbf{m}^{11} \hat{t}_{T_1} + \mathbf{m}^{12} \hat{t}_{T_2}) \Delta \hat{t}_{T_1} + (\mathbf{m}^{12} \hat{t}_{T_1} + \mathbf{m}^{22} \hat{t}_{T_2}) \Delta \hat{t}_{T_2} \quad (\text{B.84a})$$

$$\Delta K_B = -(\hat{t}_{T_1} \tau^1 + \hat{t}_{T_2} \tau^2) \cdot \left\{ (\mathbf{m}^{11} \hat{t}_{T_1} + \mathbf{m}^{12} \hat{t}_{T_2}) \Delta \tau_1 + (\mathbf{m}^{12} \hat{t}_{T_1} + \mathbf{m}^{22} \hat{t}_{T_2}) \Delta \tau_2 \right\} \quad (\text{B.84b})$$

Comme on peut le constater, le membre de gauche du produit scalaire présent dans (B.84b) représente l'expression globale du vecteur des contraintes nominales de frottement $\hat{t}_{T_t+\Delta t}^b$ telle que définie par (3.29). En introduisant les définitions:

$$P_T = \frac{\hat{t}_{T_t+\Delta t}^b}{k} \quad (\text{B.85a})$$

$$P_T^\beta = \frac{\mathbf{m}^{\beta\gamma} \hat{t}_{T_t+\Delta t}^\gamma}{k} \quad (\text{B.85b})$$

dans (B.84), l'expression finale de ΔK , définie par (B.75) s'écrit:

$$\begin{aligned} \Delta K &= -\frac{1}{k^2} (P_T^1 \Delta \hat{t}_{T_1} + P_T^2 \Delta \hat{t}_{T_2}) + \frac{1}{k} P_T \cdot (P_T^1 \Delta \tau_1 + P_T^2 \Delta \tau_2) \\ &= -\frac{1}{k^2} \Delta \hat{t}_{T_\beta} P_T^\beta + \frac{1}{k} P_T \cdot \Delta \tau_\beta P_T^\beta. \end{aligned} \quad (\text{B.86})$$

Considérant (B.86), il est maintenant possible d'évaluer complètement l'expression linéarisée de la contrainte nominale de frottement dans un contexte de glissement. En effet, en substituant (B.86) dans (B.71) et utilisant la définition (B.70), on obtient:

$$\Delta t_{T_{\alpha_t+\Delta t}} = \mu H(g) \epsilon_N P_{T_\alpha} \Delta g \quad (\text{B.87a})$$

$$+ \frac{\mu t_{N_{t+\Delta t}}}{k} \Delta \hat{t}_{T_{\alpha_t+\Delta t}} \quad (\text{B.87b})$$

$$\underbrace{-\frac{\mu t_{N_{t+\Delta t}}}{k} P_{T_\alpha} \Delta \hat{t}_{T_{\beta_t+\Delta t}} P_T^\beta}_{\text{Partie 1}} + \underbrace{\mu t_{N_{t+\Delta t}} P_T \cdot \Delta \tau_\beta P_T^\beta P_{T_\alpha}}_{\text{Partie 2}} \quad (\text{B.87c})$$

Finalement, en regroupant les expressions (B.87b) et la partie 1 de (B.87c) de même qu'en utilisant les définitions de k et $\Delta \tau_\beta$ donnée respectivement par (B.69) et (B.48a), l'expression

(B.87) devient:

$$\begin{aligned}
\Delta t_{T_{\alpha_{t+\Delta t}}} = & \\
& \mu H(g) \epsilon_N P_{T_\alpha} \Delta g \\
& + \frac{\mu t_{N_{t+\Delta t}}}{\|\hat{t}_{T_{t+\Delta t}}\|} \Delta \hat{t}_{T_{t+\Delta t}} \left(\delta_\alpha^\beta - P_T^\beta P_{T_\alpha} \right) \\
& + \mu t_{N_{t+\Delta t}} P_T \cdot \left(e_{\beta,\gamma}(\bar{\xi}) \Delta \bar{\xi}^\gamma + \Delta u_{\beta}^2 \right) P_T^\beta P_{T_\alpha}
\end{aligned} \tag{B.88}$$

B.9 Linéarisation à l'interface toron-mors d'ancrage

Cette section présente les détails relatifs à la linéarisation des contraintes tangentielles à l'interface toron-mors d'ancrage, notés respectivement $\Delta t_{T_{1_{t+\Delta t}}}$ et $\Delta t_{T_{2_{t+\Delta t}}}$.

En tout premier lieu, considérons la linéarisation de la contrainte $t_{T_{1_{t+\Delta t}}}$ par application de l'opérateur Δ à (4.27) tel que:

$$\begin{aligned}
\Delta t_{T_{1_{t+\Delta t}}} &= \Delta \left\{ \epsilon_{T_1} \bar{\xi}_{t+\Delta t}^1 \right\} \\
&= \epsilon_{T_1} \Delta \bar{\xi}^1.
\end{aligned} \tag{B.89}$$

Pour ce qui est de $\Delta t_{T_{2_{t+\Delta t}}}$, celle-ci est obtenue par la linéarisation de l'expression (4.29) telle que:

$$\Delta t_{T_{2_{t+\Delta t}}} = \begin{cases} \Delta \hat{t}_{T_{2_{t+\Delta t}}} & \text{si } \Phi_{t+\Delta t} \leq 0 \text{ (sans glissement)} \\ \Delta \left\{ \mu_{tm} t_{N_{t+\Delta t}} \frac{\hat{t}_{T_{2_{t+\Delta t}}}}{|\hat{t}_{T_{2_{t+\Delta t}}}|} \right\} & \text{autrement (avec glissement).} \end{cases} \tag{B.90}$$

Considérant le cas sans glissement, la linéarisation de la contrainte $\hat{t}_{T_{2_{t+\Delta t}}}$, donnée par (4.28) est telle que:

$$\begin{aligned}
\Delta t_{T_{2_{t+\Delta t}}} &= \Delta \left\{ t_{T_{2_t}} + \epsilon_{T_2} (\bar{\xi}_{t+\Delta t}^2 - \bar{\xi}_t^2) \right\} \\
&= \epsilon_{T_2} \Delta \bar{\xi}^2.
\end{aligned} \tag{B.91}$$

Quant au cas avec glissement, la linéarisation de $t_{T_{2_{t+\Delta t}}}$ est donnée par:

$$\begin{aligned}
\Delta t_{T_{2_{t+\Delta t}}} &= \Delta \left\{ \mu_{tm} t_{N_{t+\Delta t}} \frac{\hat{t}_{T_{2_{t+\Delta t}}}}{|\hat{t}_{T_{2_{t+\Delta t}}}|} \right\} \\
&= \mu_{tm} \Delta t_{N_{t+\Delta t}} \frac{\hat{t}_{T_{2_{t+\Delta t}}}}{|\hat{t}_{T_{2_{t+\Delta t}}}|} + \mu_{tm} t_{N_{t+\Delta t}} \Delta \left\{ \frac{\hat{t}_{T_{2_{t+\Delta t}}}}{|\hat{t}_{T_{2_{t+\Delta t}}}|} \right\} \\
&= \mu_{tm} \Delta t_{N_{t+\Delta t}} \frac{\hat{t}_{T_{2_{t+\Delta t}}}}{|\hat{t}_{T_{2_{t+\Delta t}}}|}
\end{aligned} \tag{B.92}$$

où $\Delta t_{N_t+\Delta t}$ est donnée par (3.60).

Il importe de noter que le terme $\Delta \bar{\xi}^\alpha$ présent dans (B.89), (B.91) et (B.92) est directement obtenu de (B.42) en remplaçant l'opérateur δ par Δ .

Annexe C

Utilisation d'une méthode de lagrangien augmenté dans la régularisation des inéquations de contact et de frottement

C.1 Généralités

Nonobstant les indéniables avantages d'une régularisation des lois de contact et de frottement par la méthode de pénalisation, il n'en demeure pas moins que le conditionnement du système matriciel utilisé dans les techniques de résolution ainsi que la solution obtenue sont grandement affectés par le choix des paramètres ϵ_N et ϵ_T . En effet, la pénalisation doit être suffisamment élevée pour éviter les pénétrations excessives et glissements réversibles, sans toutefois perturber de façon significative le conditionnement du système matriciel.

Ces limitations peuvent être levées en injectant un multiplicateur de Lagrange au niveau des expressions pénalisées des lois de contact et de frottement (3.34) et (3.35) afin de permettre une meilleure précision lors de l'évaluation des conditions d'admissibilité et ce, en considérant de plus faibles paramètres de pénalisation. Cette méthode, qui est présentée en détail dans Simo et Laursen (1992) dans un contexte de petites déformations, demeure néanmoins applicable dans la formulation actuelle en raison de l'utilisation d'une base convective dans l'écriture des lois de contact et de frottement. On constate aisément que la méthode du lagrangien augmenté, qui constitue un compromis entre la méthode de pénalisation et celle des multiplicateurs de Lagrange, présente l'avantage de n'engendrer aucune modification au niveau de la formulation.

Cette annexe présente donc les détails relatifs à la prise en compte d'une méthode de lagrangien augmenté dans les expressions développées aux Chapitres 3 et 4.

C.2 Prise en compte des multiplicateurs de Lagrange

Dans le contexte actuel, la méthode consiste à redéfinir les vecteurs contraintes t_N et \underline{t}_T^b de telle sorte qu'ils puissent prendre en compte la pénalisation ainsi que les multiplicateurs de Lagrange. Dans le cas de la contrainte normale, l'expression (3.34) devient:

$$t_N = \langle \lambda_N + \epsilon_N g \rangle \quad (C.1)$$

où λ_N est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte normale. La relation (C.1) montre effectivement qu'une valeur exacte du multiplicateur implique directement $g = 0$. Cependant, cette représentation de la contrainte normale à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange, nécessite une légère modification quant à la définition de la fonction écart g . En effet, le développement d'une contrainte normale t_N non nulle obtenue de l'expression régularisée par pénalisation (3.34) implique nécessairement une violation des conditions (3.28) d'où l'obtention d'une pénétration résiduelle ($g > 0$). Selon (C.1), une telle restriction sur g n'est plus possible car la même contrainte peut être obtenue pour des valeurs signées de la fonction g . Ce constat émane directement de l'application de l'opérateur $\langle \cdot \rangle$ sur la somme $\lambda_N + \epsilon_N g$. Puisque λ_N doit être positif, l'augmentation $\epsilon_N g$ peut éventuellement apporter des contributions négatives à la contrainte t_N .

Dans la direction tangentielle, la stratégie est essentiellement basée sur l'hypothèse d'une décomposition additive du vecteur des contraintes tangentielles t_{T_α} utilisées dans la définition (3.29) en sa partie pénalisée et celle associée aux multiplicateur de Lagrange λ_{T_α} . Dès lors, les conditions (3.35) deviennent:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= \|\underline{t}_T^b\| - \mu t_N \leq 0 \\ \underline{v}_T^b - \zeta \frac{\underline{t}_T^b}{\|\underline{t}_T^b\|} &= \frac{1}{\epsilon_T} (t_{T_\alpha} - \lambda_{T_\alpha}) \underline{T}^\alpha \\ \zeta &\geq 0 \\ \Phi \zeta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (C.2)$$

Selon l'expression (C.2), on anticipe aisément qu'à multiplicateur exact ($\lambda_{T_\alpha} = t_{T_\alpha}$), la pénalisation devient carrément inutile permettant ainsi une représentation exacte de la loi de frottement (3.33b). Après intégration en temps de l'expression (C.2), on obtient une expression tout à fait similaire à (4.22) telle que:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{t+\Delta t} &= \|\underline{t}_{T_{t+\Delta t}}^b\| - \mu t_{N_{t+\Delta t}} \leq 0 \\ t_{T_{\alpha_{t+\Delta t}}} &= t_{T_{\alpha_t}} + \Delta \lambda_{T_\alpha} + \epsilon_T \left\{ \mathbf{M}_{\alpha\beta} (\bar{\xi}_{t+\Delta t}^\beta - \bar{\xi}_t^\beta) - \zeta \frac{t_{T_{\alpha_{t+\Delta t}}}}{\|\underline{t}_{T_{t+\Delta t}}^b\|} \right\} \\ \zeta &\geq 0 \\ \Phi_{t+\Delta t} \zeta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (C.3)$$

où

$$\Delta \lambda_{T_\alpha} = \lambda_{T_{\alpha_{t+\Delta t}}} - \lambda_{T_{\alpha_t}}. \quad (\text{C.4})$$

représente l'incrément associé à l'augmentation de la contrainte de frottement au cours du pas de temps. Intuitivement, il paraît tout à fait raisonnable, compte tenu de la représentation en vitesse de la condition d'admissibilité de la loi de frottement, d'utiliser une description incrémentale des augmentations plutôt que de conserver l'information liée aux multiplicateurs $\lambda_{T_{\alpha_{t+\Delta t}}}$ et $\lambda_{T_{\alpha_t}}$.

Dès lors, la résolution tridimensionnelle du problème de contact avec frottement à l'aide d'une telle méthode nécessite la prise en compte de trois multiplicateurs; soit un pour la contrainte normale et un pour chaque composante définissant la contrainte tangentielle.

C.3 Répercussions sur la forme variationnelle

L'idée principale dans la méthode du lagrangien augmenté est de résoudre le système d'équations (4.78) tout en admettant les multiplicateurs comme étant des estimations fixes de l'état de contrainte aux diverses interfaces de contact. Cette stratégie implique donc une procédure itérative supplémentaire à celle associée à la résolution globale par la méthode de Newton-Raphson et par le fait même, deux possibilités quant à la mise à jour des lagrangiens. La première, qui fut largement utilisée par Fortin et Fortin (1985) pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressibles, consiste à effectuer une mise à jour des multiplicateurs après chaque évaluation de la correction de Newton-Raphson. Quant à la seconde, celle-ci consiste à effectuer la mise à jour des multiplicateurs une fois les équations d'équilibre convergées. Peu importe la technique, adoptée, la convergence globale ne peut être atteinte qu'à convergence simultanée du schéma de Newton-Raphson et des multiplicateurs. Dans un tel contexte, et considérant les modifications apportées à la définition du vecteur contrainte normale ainsi qu'à la loi de frottement, l'expression (2.53) peut être réécrite sous la forme:

$$W(\delta \varphi, \varphi_{t+\Delta t}^{(n)}) = W_{int}(\delta \varphi, \varphi_{t+\Delta t}^{(n)}) + W_{ext}(\delta \varphi, \varphi_{t+\Delta t}^{(n)}) = 0 \quad (\text{C.5})$$

avec

$$W_c(\delta \varphi, \varphi_{t+\Delta t}^{(n)}) = \int_{\Gamma_c^1} \left[\langle \lambda_N^{(n)} + \epsilon_N g^{(n)} \rangle \delta g^{(n)} + t_{T_\alpha}^{(n)} \delta \bar{\xi}^{\alpha^{(n)}} \right] d\Gamma_c^1 \quad (\text{C.6})$$

où n est un cycle quelconque dans la procédure d'augmentation des multiplicateurs. Considérant qu'à convergence des multiplicateurs, la contrainte normale $t_{N_{t+\Delta t}}$ sera égale à $\lambda_N^{(n+1)}$, on anticipe aisément, à l'aide de (C.1), qu'une bonne approximation de la procédure d'augmentation peut s'écrire sous la forme:

$$\lambda_N^{(n+1)} = \langle \lambda_N^{(n)} + \epsilon_N g^{(n)} \rangle. \quad (\text{C.7})$$

Quant à la contrainte tangentielle, l'augmentation peut être directement établie en admettant qu'à convergence, $t_{T_{\alpha_t + \Delta t}} = \lambda_{T_{\alpha_t + \Delta t}}^{(n+1)}$ et $t_{T_{\alpha_t}} = \lambda_{T_{\alpha_t}}$. Dès lors, $\Delta \lambda_{T_{\alpha}}$ devient égale à la modification de la contrainte de frottement sur l'intervalle $[t, t + \Delta t]$. En s'inspirant de l'expression (C.3), la procédure d'augmentation peut s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} \lambda_{T_{\alpha_t + \Delta t}}^{(n+1)} - \lambda_{T_{\alpha_t}} &= \lambda_{T_{\alpha_t + \Delta t}}^{(n)} - \lambda_{T_{\alpha_t}} + \epsilon_T \left\{ \mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(n)} \left(\bar{\xi}_{t+\Delta t}^{\beta(n)} - \bar{\xi}_t^\beta \right) - \zeta \frac{t_{T_{\alpha_t + \Delta t}}^{(n)}}{\| \tilde{\mathcal{T}}_{t+\Delta t}^{(n)} \|} \right\} \\ \Delta \lambda_{T_{\alpha}}^{(n+1)} &= \Delta \lambda_{T_{\alpha}}^{(n)} + \epsilon_T \left\{ \mathbf{M}_{\alpha\beta}^{(n)} \left(\bar{\xi}_{t+\Delta t}^{\beta(n)} - \bar{\xi}_t^\beta \right) - \zeta \frac{t_{T_{\alpha_t + \Delta t}}^{(n)}}{\| \tilde{\mathcal{T}}_{t+\Delta t}^{(n)} \|} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Finalement, il importe de mentionner que l'expression (C.6) implique certaines modifications au niveau de l'évaluation de la matrice tangente de contact. En effet, malgré l'invariance des multiplicateurs durant la résolution du schéma de Newton-Raphson, la nature particulière de la fonction écart associée à l'utilisation d'une méthode de lagrangien augmenté mène à une toute nouvelle interprétation de l'évolution de la rigidité à l'interface de contact. Considérant que la fonction écart peut prendre des valeurs négatives dans des conditions de contact non nulles, il en résulte une certaine diminution de rigidité au niveau des expressions (4.59), (4.61) et (4.62). On anticipe aisément ce constat dans la direction normale, puisque un écart négatif doit nécessairement mener à un rapprochement des solides, d'où la diminution de rigidité.

Dans le même ordre d'idées, on remarque que la linéarisation de la contrainte normale telle que définie par (C.1), mène à une toute nouvelle expression de la fonction de Heaviside. Utilisant une approche tout à fait similaire à celle utilisé pour l'obtention de l'expression (B.44), la linéarisation de la contrainte normale augmentée (C.1) peut s'écrire sous la forme:

$$\Delta t_N = \Delta \langle \lambda_N + \epsilon_N g \rangle = \Delta \langle \tau \rangle. \quad (\text{C.9})$$

Les dépendances associées à (C.9) permettent d'écrire:

$$\begin{aligned} \Delta t_N &= \frac{\partial t_N}{\partial \tau} \Delta \tau \\ &= H(\tau) \left[\frac{\partial \tau}{\partial \lambda_N} \Delta \lambda_N + \frac{\partial \tau}{\partial g} \Delta g \right] \\ &= H(\lambda_N + \epsilon_N g) \epsilon_N \Delta g \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

où

$$H(\lambda_N + \epsilon_N g) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\lambda_N + \epsilon_N g) \geq 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

représente la fonction de Heaviside associée à la condition de contact et Δg , donné par (B.46). On remarque aisément que contrairement à (B.45) l'expression (C.11) reflète maintenant le fait que la fonction écart peut prendre des valeurs signées. Cette situation implique donc que le statut de contact doit être établi en considérant le signe de la contrainte normale et non le signe de la fonction écart comme c'est le cas lors d'une simple pénalisation.

Annexe D

Résolution du problème de projection orthogonale d'une particule esclave sur un élément maître

D.1 Généralités

La procédure permettant la détermination du point de contact d'une particule esclave sur une surface maître, passe nécessairement par une évaluation, de proche en proche, des projections orthogonales de cette même particule sur un ensemble d'éléments frontières définissant la surface maître. Cette annexe présente donc les détails associés à la mise en équation ainsi qu'à la résolution des expressions mathématiques permettant la détermination d'une telle projection.

D.2 Mise en équation du problème de projection

Tel que défini par l'expression (3.7), le critère associé à l'obtention d'une projection orthogonale entre une particule esclave de coordonnée $\varphi^1(\underline{X}^1, t)$ et un élément de frontière $\Gamma_c^{2^c}$ passe indirectement par la détermination de la particule maître correspondant à la plus petite distance entre la particule esclave et $\Gamma_c^{2^c}$. Par une approche totalement similaire, et tel que montré à la Figure D.1, ce critère peut aussi être défini par le respect d'une orthogonalité entre le vecteur non unitaire défini par la position des particules esclave et maître tel que:

$$\underline{n}(\underline{\xi}, t) = \varphi^1(\underline{X}^1, t) - \varphi^2(\underline{\Psi}_0(\underline{\xi}), t) \quad (\text{D.1})$$

et les vecteurs de base $\underline{e}_\alpha(\underline{\xi}, t)$ définissant le plan tangent au même point. D'un point de vue mathématique, et en considérant le temps fixe, cette dernière condition peut être réécrite sous

la forme:

$$R_\alpha(\xi, t) = \underline{n}(\xi, t) \cdot \underline{e}_\alpha(\xi, t) = 0 \quad (\text{D.2})$$

avec $\alpha = 1, 2$. Dans le plus général des cas, le système d'équation (D.2) doit être résolu à l'aide de méthode itérative et ce, en raison de la non-linéarité potentielle associée au niveau d'interpolation de la surface maître et en particulier, de l'élément Γ_c^{2e} . Pour ce faire, effectuons un développement en série de Taylor limité au voisinage de la position ξ et tel qu'à l'itération $i + 1$, il est possible d'écrire:

$$R_\alpha^{i+1}(\xi^{i+1}, t) = R_\alpha^i(\xi^i, t) + \frac{\partial R_\alpha}{\partial \xi^\beta}(\xi^i, t) \Delta \xi^\beta = 0 \quad (\text{D.3})$$

où $\Delta \xi^\beta$ représente la correction nécessaire à $R_\alpha^i(\xi^i, t)$, par l'entremise de ξ^β afin de permettre le respect de la condition (D.2). Considérant la définition (D.1) ainsi que le principe de dérivation en chaîne, la dérivée apparaissant dans l'expression (D.3) peut être réécrite sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_\alpha}{\partial \xi^\beta}(\xi^i, t) \Delta \xi^\beta &= \frac{\partial R_\alpha}{\partial \xi^1}(\xi^i, t) \Delta \xi^1 + \frac{\partial R_\alpha}{\partial \xi^2}(\xi^i, t) \Delta \xi^2 \\ &= - \left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial \xi^1}(\Psi_0(\xi^i), t) \cdot \underline{e}_\alpha(\xi^i, t) - \underline{n}(\xi^i, t) \cdot \frac{\partial \underline{e}_\alpha}{\partial \xi^1}(\xi^i, t) \right) \Delta \xi^1 \\ &\quad - \left(\frac{\partial \varphi^2}{\partial \xi^2}(\Psi_0(\xi^i), t) \cdot \underline{e}_\alpha(\xi^i, t) - \underline{n}(\xi^i, t) \cdot \frac{\partial \underline{e}_\alpha}{\partial \xi^2}(\xi^i, t) \right) \Delta \xi^2. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

En injectant l'expression (D.4) dans (D.3) et utilisant la définition des vecteurs de base donnée par (3.8), l'expression finale de (D.3), en remplaçant $R_\alpha^i(\xi^i, t)$ par son équivalent provenant de (D.2), s'écrit:

$$R_\alpha^{i+1}(\xi^{i+1}, t) = \underline{n}(\xi^i, t) \cdot \underline{e}_\alpha(\xi^i, t) - A_\alpha \Delta \xi^1 - B_\alpha \Delta \xi^2 = 0 \quad (\text{D.5})$$

avec

$$A_\alpha = \underline{e}_1(\xi^i, t) \cdot \underline{e}_\alpha(\xi^i, t) - \underline{n}(\xi^i, t) \cdot \underline{e}_{\alpha,1}(\xi^i, t) \quad (\text{D.6a})$$

$$B_\alpha = \underline{e}_2(\xi^i, t) \cdot \underline{e}_\alpha(\xi^i, t) - \underline{n}(\xi^i, t) \cdot \underline{e}_{\alpha,2}(\xi^i, t). \quad (\text{D.6b})$$

Considérant chacune des directions α , l'expression (D.5) peut être réécrite sous forme d'un système d'équations linéarisées défini par:

$$\begin{Bmatrix} \underline{n}(\xi^i, t) \cdot \underline{e}_1(\xi^i, t) \\ \underline{n}(\xi^i, t) \cdot \underline{e}_2(\xi^i, t) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \xi^1 \\ \Delta \xi^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

permettant ainsi l'obtention des corrections $\Delta \xi^1$ et $\Delta \xi^2$.

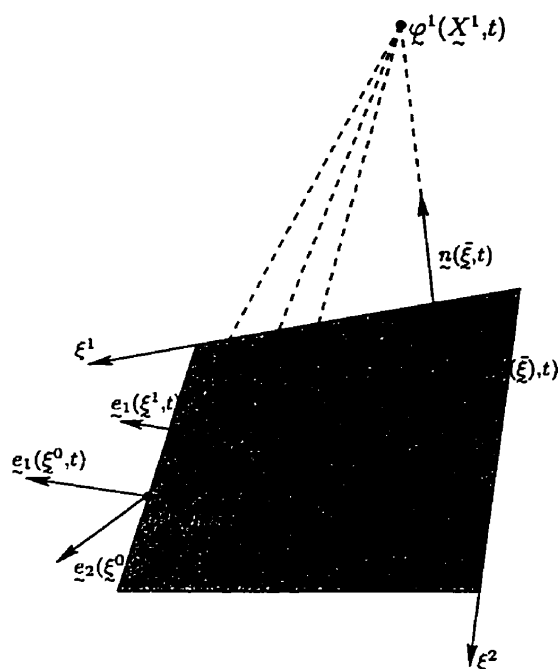


Figure D.1 – Représentation schématique du problème de projection

D.3 Résolution du problème de projection

La résolution du problème de projection revient donc à déterminer les composantes du vecteur $\tilde{\xi}$ permettant de respecter l'expression (D.2). Considérant la nature non linéaire du problème, on propose de résoudre cette dernière expression à l'aide d'un schéma itératif de Newton-Raphson avec comme solution de départ, la position d'entrée de la particule esclave sur l'élément maître, telle que montrée à la Figure 5.9. Connaissant cette dernière position, il est alors possible de déterminer l'ensemble des termes nécessaires à la détermination d'une première correction du vecteur position ξ . À ce stade-ci, il importe de noter que la détermination, à chaque itération, du vecteur $\tilde{n}(\xi, t)$ implique une certaine prudence lors de l'évaluation du second membre provenant de (D.7). En effet, lorsque la longueur de ce dernier vecteur devient très petite, le système (D.7) devient très mal conditionné et mène systématiquement à la divergence du schéma de Newton-Raphson. Afin de contrer cette situation, il est fortement suggéré de comparer la longueur du vecteur $\tilde{n}(\xi, t)$ à une certaine tolérance, notée ϵ_L et d'admettre, le cas échéant, que la position actuelle correspond au point de projection recherché. L'Algorithme D.1 présente l'algorithme permettant la résolution du problème de projection.

Comme on peut le constater, ce type de problème est grandement influencé par le niveau d'interpolation associé à la frontière maître. En particulier, on remarque aisément que pour une interpolation linéaire de continuité C^0 , l'invariance des vecteurs de base mène à la détermination immédiate du point de projection sans avoir recours à la procédure itérative.

Algorithme D.1 – Opérations relatives à la résolution du problème de projection

- 1: Requête de la coordonnée esclave: $\varphi^1(X^1, t)$
- 2: Requête de la position initiale: ξ^0
- 3: Requête de l'élément maître à considérer: Γ_c^{2e}
- 4: Requête du nombre d'itérations maximal: $Iter_{max}$
- 5: Initialisation de la procédure itérative
 $Iter = 0, ConvergeOK = faux$
- 6: **Répète**
- 7: Évaluation de la position de la particule maître $\varphi^2(\Psi_0(\xi^i), t)$
- 8: Évaluation du vecteur $\underline{n}(\xi^i, t)$ (Eqn (D.1))
- 9: **Si** $\|\underline{n}(\xi^i, t)\| < \epsilon_L$ **Alors** (Les deux particules sont au même endroit)
- 10: $ConvergeOK = vrai$
- 11: **Sinon** (Les deux particules sont distinctes)
- 12: Évaluation des vecteurs de base $\underline{e}_1(\xi^i, t)$ et $\underline{e}_2(\xi^i, t)$
- 13: Évaluation des termes associés à la matrice tangente
 A_α (Eqn (D.6a))
 B_α (Eqn (D.6b))
- 14: Résolution du système linéarisé (Eqn (D.7))

$$\begin{Bmatrix} \Delta \xi^1 \\ \Delta \xi^2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \begin{bmatrix} B_2 & -B_1 \\ -A_2 & A_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{n}(\xi^i, t) \cdot \underline{e}_1(\xi^i, t) \\ \underline{n}(\xi^i, t) \cdot \underline{e}_2(\xi^i, t) \end{Bmatrix}$$
- 15: Mise à jour de la position
 $\xi^{i+1} = \xi^i + \Delta \xi^i$
- 16: **Si** $\|\Delta \xi^i\| < \epsilon_{ref}$ **Alors**
- 17: $ConvergeOK = oui$
- 18: **Fin Si**
- 19: **Fin Si**
- 20: $Iter = Iter + 1$
- 21: **Tant que** $ConvergeOK \neq vrai$ **ET** $Iter < Iter_{max}$