Université de Montréal

Théorie du potentiel et approximation complexe

par
Seddik CHACRONE
Département de Mathématiques et de Statistique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiae Doctor (Ph.D)
en Mathématiques

Mars, 1996

0-612-21442-7

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée:

"Théorie du potentiel et approximation complexe"

présentée par:

Seddik CHACRONE

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes:

Jean. M. Terrier

(président rapporteur)

Paul M. Gauthier

(directeur de recherche)

André Giroux

(membre du jury)

Tom Bagby

(examinateur externe)

03 JUI 1996

Sommaire

Notre travail est constitué essentiellement de trois articles traitant chacun d'un problème différent.

Dans le premier on montre que l'axiome de domination est une conséquence de la propriété de faisceau pour les fonctions finement harmoniques, dans un espace $\mathcal{B}$-harmonique à base dénombrable. La réciproque a été montrée par B. Fuglede.

Le second donne certains résultats concernant l'existence et l'unicité de la solution du problème de Dirichlet pour l'opérateur de Monge-Ampère complexe dans un domaine strictement pseudoconvexe de $\mathbf{C}^n$. On donne entre autre, un résultat pour la donnée au bord non continue.

Le dernier article traite de l'approximation de Carleman sur les produits. Précisément, on montre que le produit d'ensembles de Carleman dans des surfaces de Riemann est un ensemble de Carleman dans le produit de ces dernières.

Remerciements

Je ne saurais exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance au professeur Paul. M. Gauthier. Ses conseils et ses remarques, toujours pertinentes, étaient un enrichissement dans l'évolution de mon travail. Son appui financier m'était d'un grand secours. Je lui dirais simplement merci.

Je remercie les membres de jury d'avoir accepté de lire ce travail.

Je tiens à remercier mon épouse qui a toujours su être présente pendant les moments parfois difficiles.

Je remercie aussi le département de mathématiques et statistique de l'université de Montréal et mes collegues à la faculté des sciences de Kénitra.

Enfin, je voudrais témoigner ma reconnaissance à mes parents ainsi qu'à mes frères et soeurs et leur exprimer toute mon affection.

Table des matières

INTRODUCTION

Nous utiliserons dans les préliminaires qui suiveront les différentes notations et définitions suivantes:

Soit Ω un domaine de $\mathbf{C}^n$. On note par $\mathcal{C}^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ dans Ω. Pour simplifer, $\mathcal{C}^0(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)$. $H(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes dans Ω. $A^\infty(F)$ (F est un fermé) désigne l'ensemble de toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de F, qui sont holomorphes à l'intérieur de F. Pour simplifier, $A^0(F) = A(F)$. Par $R(K)$, où K est un compact de $\mathbf{C}^n$, on désigne l'algèbre des fonctions qui sont limites uniformes dans K de fonctions rationnelles dont les singularités sont en dehors de K. $M(K)$ désignera l'ensemble des fonctions qui sont limites uniformes dans K de fonctions méromorphes dans Ω dont les singularités sont en dehors de K. Nous noterons par Ω^* le compactifié d'Alexandrov de Ω par adjonction d'un point $\{*\}$.
Soit u une fonction définie sur Ω. On désigne par u^* la régularisée semi-continue supérieurment de la fonction u.

Soit $\quad z = x + iy, \quad \overline{z} = x - iy;\ x, y \in \mathbf{R}.$

On note par

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$d = \partial + \overline{\partial}$ et $d^c = i(\overline{\partial} - \partial)$.

Définition 0.1 *Une fonction u définie dans Ω à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ est dite plurisousharmonique sur Ω si u est semi-continue supérieurement sur Ω, non identiquement $-\infty$ dans aucune composante de Ω et pour tout $a \in \Omega$ et $w \in \mathbf{C}^n$ la* *fonction qui à z associe $u(a+zw)$ est sousharmonique ou identiquement $-\infty$ sur chaque composante de l'ouvert $\{z \in \mathbf{C} : a+zw \in \Omega\}$.*

On note par $P(\Omega)$ l'ensemble de toutes les fonctions plurisousharmoniques dans Ω.

Notons que si la fonction u est de classe $\mathcal{C}^2$ dans Ω, alors u est plurisousharmonique si et seulement si son Hessien complexe

$$L_z(u,w) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z) w_j \overline{w}_k,$$

est semi-définie positive sur $\mathbf{C}^n$ en tout point $z \in \Omega$. Si $L_z(u,w)$ est définie positive sur $\mathbf{C}^n$ pour tout $z \in \Omega$, alors u est dite strictement plurisousharmonique sur Ω.

Les transformations biholomorphes conservent la plurisousharmonicité stricte.

Nous avons maintenant, l' outil nécessaire pour définir une classe de domaines très importants en analyse complexe.

Définition 0.2 *Un domaine Ω dans $\mathbf{C}^n$ est dit strictement pseudoconvexe, si il existe un voisinage U de $\partial\Omega$ et une fonction strictement plurisousharmonique $u \in \mathcal{C}^2(U)$ telle que*

$$\Omega \cap U = \{z \in U : u(z) < 0\}.$$

0.1 Fonctions finement harmoniques et l'axiome de domination

Dans cet article, on montre que l'axiome de domination est une conséquence de la propriété de faisceau, pour les fonctions finement harmoniques, dans un espace $\mathcal{P}$-harmonique au sens de Bauer ou de Constantinescu-Cornea. La réciproque a été montré par B. Fuglede [16].

Soit Ω un espace localement compact connexe et localement connexe. On note par $\mathcal{U}$ l'ensemble des ouverts non vides de Ω, et par $\mathcal{U}_c$ l'ensemble des ouverts non vides et relativement compacts dans Ω.

Soit H une application qui, a tout ouvert $\omega \in \mathcal{U}$, fait correspondre un espace vectoriel $H(\omega)$, de fonctions réelles continues sur ω. On dit que H est un faisceau sur Ω si, les deux propriétés suivantes sont satisfaites.

1) $\omega_1 \subset \omega_2$ implique $H(\omega_2)|\omega_1 \subset H(\omega_1)$, où ω_1 et $\omega_2 \in \mathcal{U}$.

2) Pour toute famille $(\omega_i)_{i\in I}$ d'ouverts de Ω, et toute fonction numérique u définie dans $\omega = \cup_{i\in I}\omega_i$ tel que la réstriction $u|\omega_i \in H(\omega_i)$, pour tout $i \in I$, alors $u \in H(\omega)$.

Définition 0.3 *Un ouvert $\omega \in \mathcal{U}_c$ est dit régulier si, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\partial\omega)$, il existe un seul élément de $H(\omega)$, noté H_f^ω, tel que $\lim_{x\to z} H_f^\omega(x) = f(z)$, pour tout $z \in \partial\omega$.*

Pour tout $f \in \mathcal{C}(\partial\omega)$, $f \geq 0$ on a $H_f^\omega \geq 0$. Pour tout $x \in \omega$, l'application qui à $f \in \mathcal{C}(\partial\omega)$, associe $H_f^\omega(x)$ est une mesure de Radon positive sur $\partial\omega$, notée μ_x^ω, dite mesure harmonique relative à ω et x. On peut donc écrire

$$H_f^\omega(x) = \int f(y)d\mu_x^\omega(y).$$

Axiome 1 : H est un faisceau.

Axiome 2 : (Résolutivité locale du problème de Dirichlet) Il existe une base de domaines réguliers pour la topologie de Ω.

Axiome 3 : (Axiome de convergence de Doob) L'enveloppe supérieure d'un ensemble filtrant croissant de fonctions harmoniques, finies dans un ensemble partout dense de ω, est harmonique; ceci pour tout ω.

L'espace (Ω, H) qui satisfait ces trois axiomes, est dit espace harmonique au sens de Bauer [2].

Définition 0.4 *Une fonction numérique f, définie dans $V \in \mathcal{U}$, est dite hyperharmonique si, elle satisfait les propriétés suivantes.*
1) f est semi-continue inférieurement dans V et $> -\infty$.
2) Pour tout ouvert régulier $\omega \subset \overline{\omega} \subset V$, et pour tout $x \in \omega$ on a

$$\int^* f d\mu_x^\omega \leq f(x).$$

Une fonction f est dite hypoharmonique si $-f$ est hyperharmonique. Elle est dite surharmonique si elle est finie dans un ensemble partout dense dans ω. Finalement on dit que f est sousharmonique si $-f$ est surharmonique.
On note par $\mathcal{S}(\omega)$, l'ensemble de toutes les fonctions surharmoniques positives sur ω.

Définition 0.5 *Une fonction $p \in \mathcal{S}(\omega)$ est dite potentiel, si toute minorante harmonique positive de p est égale à zéro.*

On désigne par $\mathcal{P}(\omega)$ l'ensemble des potentiels dans ω.

Définition 0.6 *Un espace harmonique Ω est dit $\mathcal{P}$-harmonique ou harmonique fort si, pour chaque point x de Ω, il existe un potentiel p sur Ω tel que $p(x) > 0$.*

Dans tout ce qui suit dans ce paragraphe, Ω désignera un espace harmonique fort au sens de Bauer.

Le support harmonique $S(u)$ d'une fonction surharmonique u est le plus petit ensemble fermé, tel que u est harmonique dans le complémentaire de $S(u)$.

Définition 0.7 *Une fonction surharmonique positive v sur Ω est dite vérifier la propriété de domination si la propriété suivante est satisfaite.*
Pour toute fonction u hyperharmonique sur Ω, telle que $u \geq v$ dans $S(v)$, alors $u \geq v$ partout dans Ω.

Théorème 0.1 [13] *Etant donné une mesure de Radon positive μ sur Ω à support compact, et un ensemble $E \subset \Omega$, il existe une mesure de Radon positive sur Ω et une seule, notée μ^E, telle que pour tout potentiel fini et continu sur Ω, on a*

$$\int p d\mu^E = \int \hat{R}_p^E d\mu.$$

$\hat{R}_p^E$ est la plus grande fonction semi-continue inférieurement, majorée par la fonction $R_p^E(x) = \inf\{v(x) : v \in \mathcal{S}(\Omega), v \geq 0 \text{ et } v \geq p \text{ dans } E\}$.
La mesure μ^E est appelée balayée de μ sur l'ensemble E.

Un ensemble E est dit effilé au point x si et seulement si

$$\varepsilon_x^E \neq \varepsilon_x,$$

où ε_x est la mesure de Dirac au point x. Pour plus de détail sur la notion d'effilement, voir [13].

Soit $E \subset \Omega$. On notera par CE, le complémentaire de E dans Ω.

Théorème 0.2 *Pour tout x, la famille $\mathcal{V} = \{\omega \subset \Omega : x \in \omega \text{ et } C\omega \text{ est effilé en } x\}$, forme un système fondamental de voisinage de x pour une topologie sur Ω. Cette topologie s'appelle la topologie fine sur Ω.*

La topologie fine, est aussi la moins fine des topologies, rendant continues les fonctions surharmoniques positives. Cette topologie est plus fine que la topologie initiale sur Ω.

Soit V un ensemble de Ω, on note par $V^{\sim}$ (résp. $\partial_f V$, V') l'adhérence fine de V (résp. frontière fine, intérieur fin de V).

La notion de base essentielle est introduite en théorie du potentiel par Bliedtner et Hansen [5], pour caractériser la frontière de Choquet associée à un cône de fonctions. Soit $\beta(A) = \cup\{B \subset A \cup b(A) : B \subset b(B)\}$, $\beta(A)$ est appelée base essentielle de A. Nous avons [5 prop. 11],

$\beta(A) = b(\beta(A))$, $\beta(A) = \beta(\beta(A))$, $\beta(A) \subset b(A)$.

$\beta(A)$ est non effilé en chcun de ses points.

Théorème 0.3 [13] *(Axiome de domination) Soit Ω un espace $\mathcal{P}$-harmonique. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1) Pour tout potentiel p localement borné sur Ω, et tout ouvert relativement compact ω de Ω, H_p^{ω} est la plus grande minorante harmonique de p sur ω.

2) Pour tout potentiel p localement borné sur Ω, et toute fonction u hyperharmonique positive sur Ω on a :

$u \geq p$ sur $S(p)$ implique que $u \geq p$ sur Ω tout entier.

Remarque : Tout ouvert d'un espace $\mathcal{P}$-harmonique qui satisfait à l'axiome de domination est un espace avec les mêmes propriétés que Ω.

0.2 Opérateur de Monge-Ampère complexe

Le second article, quant à lui, donne quelques résultats concernant l'existence et l'unicité de solutions du problème de Dirichlet pour l'opérateur de Monge-Ampère complexe.

Un premier résultat dans ce sens fut obtenu par Bremermann [8].

Théorème 0.4 *[8] Soit Ω un domaine borné et strictement pseudoconvexe dans $\mathbf{C}^n$ et soit φ une fonction continue sur $\partial\Omega$. Alors il existe une fonction $u \in P(\Omega)$ telle que*

$$\limsup_{\Omega \ni z, z \longrightarrow \xi} u(z) = \varphi(\xi), \text{ pour tout } \xi \in \partial\Omega.$$

L'opérateur de Monge-Ampère complexe est un opérateur qui, à chaque fonction $u \in P(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$, associe une mesure de Borel positive,

$$(dd^c u)^n = dd^c u \wedge \ldots \wedge dd^c u = 4^n n! det(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}) dV,$$

où dV est la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{C}^n$.

Dans [4], on trouve une extension de l'opérateur de Monge-Ampère complexe à $P(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ comme suit. Etant donné $u \in P(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$, et $k = 2, 3, \ldots,$ on définit par récurrence $(dd^c u)^k = dd^c u \wedge \ldots \wedge dd^c u$, comme un courant positif dont l'action sur une forme test ψ de bidegree $(n-k, n-k)$, est comme suit

$$\int_\Omega (dd^c u)^k \wedge \psi = \int_\Omega u (dd^c u)^{k-1} \wedge dd^c \psi.$$

Si $k = 1$ et ψ est une forme test de bidegree $(n-1, n-1)$ alors

$$\int_\Omega (dd^c u) \wedge \psi = \int_\Omega u dd^c \psi.$$

Sadulaev a montré que la fonction de Bremermann (voir Théorème 0.4) satisfait l'équation de Monge-Ampère complexe homogène ($(dd^c u)^n = 0$). Bedford et Taylor [4] ont considéré le problème suivant:

$$(I) = \begin{cases} u \in P(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) & \\ (dd^c u)^n = f dV, & \text{sur } \Omega \\ \limsup u(z) = \varphi(\xi), & z \longrightarrow \xi, \text{ pour tout } \xi \in \partial\Omega, \end{cases}$$

où f est une fonction positive mesurable dans Ω.

Les deux théorèmes qui suivent sont les principaux outils dans notre deuxième article. On commence par le Principe de Domination (ou Principe de Comparaison), montré par Bedford et Taylor [4].

Théorème 0.5 [4] *Soit Ω un domaine strictement pseudoconvexe et borné de $\mathbf{C}^n$. Soient u et v deux fonctions dans $P(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ telles que*

$$(dd^c u)^n \leq (dd^c v)^n$$

et

$$\liminf_{\Omega \ni z, z \longrightarrow \xi} (u - v)(z) \geq 0, \quad \textit{pour tout } \xi \in \partial\Omega.$$

Alors $u \geq v$ dans Ω.

Le théorème suivant a été montré d'abord par Bedford et Taylor [3] pour $f \in C(\overline{\Omega})$ et généralisé plus tard pour $f \in L^2(\Omega)$ par Cegrell et Persson [24].

Théorème 0.6 *Soit Ω un domaine strictement pseudoconvexe et borné dans $\mathbf{C}^n$. Si $f \in L^2(\Omega)$, $f \geq 0$ et $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$, alors il existe une fonction plurisousharmonique unique $u \in P(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ telle que*

$$(dd^c u)^n = f dV$$

et

$$\lim_{\Omega \ni z \to \xi} u(z) = \varphi(\xi), \text{ pour tout } \xi \in \partial\Omega.$$

Notons que ces deux résultats fondamentaux sont à l'origine de plusieurs travaux dans ce sujet.

Soit μ une mesure positive sur Ω et $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. On pose

$\mathcal{B}(\varphi, \mu) =$
$\{v \in P(\Omega) \cap L^\infty(\Omega); (dd^c v)^n \geq \mu, \limsup_{z \longrightarrow \xi} v(z) \leq \varphi(\xi),$ pour tout $\xi \in \partial\Omega\}$.

Rapellons que la fonction solution donnée par le théorème précédent, est l'enveloppe supérieure $\sup \mathcal{B}(\varphi, fdV)(z) = \sup\{v(z) : v \in \mathcal{B}(\varphi, fdV)\}$ de la classe de Perron-Bremermann $\mathcal{B}(\varphi, fdV)$.

Considérons maintenant un problème plus général, à savoir.

$$(II) = \begin{cases} u \in P(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega) & \\ (dd^c u)^n = \mu, & \text{sur } \Omega \\ \limsup u(z) = \varphi(\xi), & z \longrightarrow \xi, \text{ pour tout } \xi \in \partial\Omega, \end{cases}$$

Une solution à ce problème est donnée par Cegrell et Kolodziej [10] dans la boule unité de $\mathbf{C}^n$, dans le cas où μ est à support compact, invariante par rotation et $\mathcal{B}(0, \mu) \neq \phi$. Une solution pour $\mu = (dd^c u)^n$, où u est une fonction plurisousarmonique radiale, a été donnée par Persson [24]. Dans [10], on trouve entre autre le résultat suivant pour μ mesure positive quelconque, qui nous sera utile.

Théorème 0.7 *Si* $\mathcal{B}(\varphi,\mu) \neq \phi$, *alors* $\sup \mathcal{B}(\varphi,\mu) \in \mathcal{B}(\varphi,\mu)$.

Remarque : Ce qui est approprié dans le théorème précédent, c'est de conclure que $(\sup \mathcal{B}(\varphi,\mu))^* \in \mathcal{B}(\varphi,\mu)$. Mais cela, entraîne $\sup \mathcal{B}(\varphi,\mu) \in \mathcal{B}(\varphi,\mu)$. En effet, si $(\sup \mathcal{B}(\varphi,\mu))^* \in \mathcal{B}(\varphi,\mu)$, alors $(\sup \mathcal{B}(\varphi,\mu))^* \leq \sup \mathcal{B}(\varphi,\mu) \leq (\sup \mathcal{B}(\varphi,\mu))^*$. Donc on a $(\sup \mathcal{B}(\varphi,\mu))^* = \sup \mathcal{B}(\varphi,\mu)$.

Le théorème suivant nous donne la continuité de l'opérateur de Monge-Ampère complexe pour les suites décroissantes, relativement à la topologie de convergence faible de mesures.

Théorème 0.8 [4] *Soit* $\{u_j\}$ *une suite décroissante de fonctions dans* $P(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$ *et supposons que* $\lim_{j\to\infty} u_j = u \in P(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$. *Alors*

$$\lim_{j\to\infty} (dd^c u_j)^n = (dd^c u)^n.$$

0.3 Approximation de Carleman

En 1927 T. Carleman [9] a montré le théorème suivant.

Théorème 0.9 *Soit* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, *pour tout* $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ *il existe une fonction entière* g *telle que*

$$|f - g| < \varepsilon, \text{ dans } \mathbf{R}.$$

Ce résultat fondamental était à l'origine de la notion d'ensemble de Carleman.

Définition 0.8 *Soit* F *un ensemble fermé dans* U *domaine de* $\mathbf{C}$. *On dit que* F *est un ensemble de Carleman si pour toute fonction* $f \in A(F)$, *pour toute fonction* $\varepsilon \in \mathcal{C}(F)$, $\varepsilon > 0$, *il existe une fonction* $g \in H(U)$ *telle que*

$$|f - g| < \varepsilon, \text{ dans } F.$$

Notons que le problème de caractérisation d'ensemble de Carleman a suscité l' intérêt de plusieurs mathématiciens. Toutefois, Keldysh et Lavrentiev [19] en 1939 ont caractérisé les ensemble de Carlemann d'intérieur vide, comme suit.

Théorème 0.10 [19] *Un fermé* $F \subset \mathbf{C}$, $F^o = \phi$, *est un ensemble de Carleman si et seulement si il satisfait la condition suivante:*
Le complémentaire de F *dans* $\overline{\mathbf{C}}$ *est connexe et localement connexe.*

Plus tard en 1969 P.M. Gauthier [18] a montré que la condition des longues îles ci-dessous est nécessaire pour qu'un ensemble F soit un ensemble de Carleman.

Définition 0.9 *Un fermé* $F \subset \mathbf{C}$ *satisfait à la condition des longues îles si, pour tout compact* $K \subset \mathbf{C}$, *il existe un compact* $L \subset \mathbf{C}$ *tel que* L *contient toutes les composantes de* F^o *qui intersectent* K.

Peu après, A.H. Nersessian en 1971 [23] a caractérisé les ensembles de Carleman dans un domaine du plan complexe comme suit.

Théorème 0.11 [23] *Soit F un fermé d'un domaine D de $\mathbf{C}$ tel que $D^* \setminus F$ soit connexe et localement connexe. Alors F est un ensemble de Carleman par rapport à $H(D)$ si et seulement si on a la propriété suivante :*
Pour tout compact $K \subset D$, il existe un compact $L \subset D$ tel que L contient toutes les composantes de F^o, qui intersectent K.

Sur une surface de Riemann, Boivin [7] a montré que les mêmes conditions sont nécessaires et suffisantes pour qu'un fermé F soit un ensemble de Carleman. Sa démonstration repose essentiellement sur le Lemme 0-1, qui est une conséquence immédiate du Lemme de Forelli [14] et du Théorème de Wilken [27].

Théorème 0.12 *Si R est une surface de Riemann et si F est un fermé de R, alors F est un ensemble de Carleman si et seulement si*
1) $R^* \setminus F$ est connexe et localement connexe.
2) F satisfait la condition des longues iles.

Mais dans $\mathbf{C}^n$, il reste encore du chemin à faire. Une caractérisation, semble-il, est très difficile même dans le cas d'un compact. Cependant, l'étude de certains ensembles particuliers a intéressé plusieurs mathématiciens. Le premier résultat dans ce sens fut obtenu par S. Scheinberg en 1976 [26]. Plus précisémment il a montré que la partie réelle de $\mathbf{C}^n$ est un ensemble de Carleman. Alexander [1] a montré qu' une courbe lisse dans $\mathbf{C}^n$, allant à l'infini, est un ensemble de Carleman dans $\mathbf{C}^n$. Frih et Gauthier [15] ont montré le résultat suivant.

Théorème 0.13 [15] *Le produit de courbes lisses $\alpha_i \subset \mathbf{C}^{n_i}$, $i = 1, 2 \ldots, k$, , est un ensemble de Carleman dans $\mathbf{C}^n$, où $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.*

Dans le dernier article, nous généralisons le théorème de Frih et Gauthier dans le cas où chaque $n_i = 1$. Pour se faire nous avons besoin des outils suivants.

Soit M_A l'espace des idéaux maximaux d'une algèbre de Banach, ou ce qui revient au même, l'espace des homomorphismes non nuls de A dans $\mathbf{C}$. Deux homomorphismes φ et ψ dans M_A sont dit équivalents, si $||\varphi - \psi|| < 2$, la norme étant celle du dual A^* de A. Les classes d' équivalences de l'espace des idéaux maximaux de A relativement à cette relation sont dites parties de Gleason de l'algèbre A. Notons que si $A = R(K)$, alors $M_A \sim \hat{K}$, où $\hat{K}$ est l'enveloppe rationnelle de K.

Théorème 0.14 [27] *Soit μ une mesure représentative de x pour $R(K)$. Soit P une partie de Gleason de $R(K)$ contenant x. Alors μ est portée par $\overline{P}$ et μ représente x dans $R(\overline{P})$.*

Le lemme suivant, qui est une conséquence du lemme de Forelli et du théorème précedent, est du à Boivin [7]

Lemme 0.1 *Soit K un compact d'une surface de Riemann R, soit P une partie de Gleason non triviale de $M(K)$ et E_n une suite de sous ensembles compacts tel que $\cup E_n = K \setminus \overline{P}$. Alors, il existe une suite de fonctions g_n dans $M(K)$ telle que*

1) $|g_n| \leq 1$ sur K.

2) $|1 - g_n| < \frac{1}{n}$ sur E_n.

3) La suite g_n tend vers zero sur P^0, uniformément sur les compacts.

Bibliographie

[1] H. Alexander, A Carleman theorem for curves in $\mathbf{C}^n$. Math. Scand. 45 (1979), 70-76.

[2] H. Bauer, Harmonische Raume und ihre Potentialtheorie, Lecture Notes in Mathematics No.22, Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1966.

[3] E. Bedford and B.A. Taylor, The Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère equation, Invent. Math. 37 (1976), 1-44.

[4] E. Bedford and B.A. Taylor, A new capacity for plurisubharmonic functions. Acta Math. 149 (1982), 1-40.

[5] J. Bliedtner and W. Hansen, Simplicial cones in potential theory, Invent. Math. 46 (1978), 255-275.

[6] N. Boboc, Gh. Bucur and A. Cornea, H-cones and potential theory, Ann. Inst. Fourier. 25 (1975), 71-108.

[7] A. Boivin, Carleman approximation on Riemann surfaces. Math. Ann. 275 (1986), 57-70.

[8] Bremermann, On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudoconvex domain, Characterization of Silov boundary. Tran. Amer. Math. Soc. 91 (1959), 246-276.

[9] T. Carleman, Sur un théorème de Weierstrass. Ark. Mat. Astronom. Fys 20B, (1927), 1-5.

[10] U. Cegrell and S. Kolodziej, The Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator. Perron class and rotation invariant measure. Michigan Math. J. 41 (1994), 563-569.

[11] U. Cegrell and L. Persson, The Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator: Stability in L^2. Michigan Math. J. 39 (1992), 145-151.

[12] S. Chacrone, Fonctions finement harmoniques et l'axiome de domination. J. Potential-analysis. 2 (1993), 131-136.

[13] C. Constantinescu and A. Cornea, Potential Theory in Harmonic spaces, Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1972.

[14] F. Forelli, Analytic measure. Pac. J. Math. 13 (1963), 571-578.

[15] E. Frih and P.M. Gauthier, Global holomorphic approximation on the product of curves in $\mathbf{C}^n$, Canad. Math. Bull. 34(2), (1991), 220-223.

[16] B. Fuglede, Finely Harmonic Functions, Lecture Notes in Mathematics No. 289, Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1972.

[17] B. Fuglede, On the mean value property of finely harmonic and finely hyperharmonic functions, Manuscript, 1989.

[18] P.M. Gauthier, Tangential approximation by entire functions and functions holomorphic in a disc, Izv. Akad. Armjan. SSR Ser. Mat. 4 (1969), 319-126.

[19] M. Keldysh and M. Lavrentiev, Sur un problème de M. Carleman. C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS. 23 (1939), 746-748.

[20] P. Lelong, Intégration sur un ensemble analytique complexe. Bull. Soc. Math. France. 85 (1957), 239-262.

[21] J. Lukes and J. Malý, Fine hyperharmonicity without axiom D. Math. Ann. 261 (1982), 299-306.

[22] J. Lukes, J. Malý and L. Zajicek, Fine topology Methods in Real Analysis and Potential Theory, Lecture Note in Mathematics N0. 1189, Springer. Berlin/Heidelberg/New York, 1986.

[23] A.H. Nersessian, On the Carleman sets, Izv. Akad. Nauk. Armjan. SSR 6 (1971), 465-471.

[24] L. Persson, On the Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator. Thesis, University of Ameå (Sweden) 1992.

[25] A. Roth, Approximationseigenschaften und strahlengrenzwerte meromorpher und ganzer Funktionen. Comment. Math. Helv. 11 (1938), 77-125.

[26] S. Scheinberg, Uniform Approximation by entire functions, Journal d'analyse Mathématique. 29 (1976), 16-19.

[27] D. Wilken, The support of representing measures for $R(X)$. Pac. J. Math. 26 (1968), 621-626.

Chapitre 1

Fonctions finement harmoniques et l'axiome de domination

Ce chapitre est une reproduction mot par mot, de l'article publié dans le journal, Potential Analysis 2 (1993), no. 2, 131-136.

Abstract: In a harmonic space with the domination Axiom (axiom D), B. Fuglede [5] has introduced the sheaf property of the cones of the finely hyperharmonic functions (defined in the fine opens). In [7], [8], J. Lukes, J. Malý and L. Zajicek have studied a notion analogous to the finely hyperharmonic functions without supposing axiom D, and have proved ([8] theorem 12.16) that if the cones of the positive finely hyperharmonic functions make a sheaf, then axiom D is satisfied. See N. Boboc, Gh. Bucur and A. Cornea [3] for the first result of this type given within the context of the H-cones.

In this paper, we prove axiom D is a consequence of the sheaf property even for the smallest class of the functions (the class of the finely harmonic functions; absolute-value bounded in a convenient sense). This result implies that of Lukes et al. cited above. Consequently, the tow 'fine' properties of the sheaf are equivalent, which has not been evident previously.

Sur un espace harmonique satisfaisant à l'axiome de domination (axiome D), B. Fuglede [5] a introduit le faisceau des cônes des fonctions finement hyperharmoniques (définies sur des ouverts fins). Dans [7], [8] , J. Lukes. J. Malý et L. Zajicek ont étudié une notion analogue de fonctions finement hyperharmoniques sans supposer l'axiome D, et ils ont montré ([8] théorème 12.16) que si les cônes des fonctions finement hyperharmoniques positives forment un faisceau, alors l'axiome D est satisfait. Voir M. Boboc, Gh. Bucur et A. Cornea [3] pour le premier résultat de ce type, donné dans le cadre des H-cônes.

Dans le papier présent nous montrons que l'axiome D est une conséquence de la propriété de faisceau même pour une plus petite classe de fonctions, à savoir la classe des fonctions *finement harmoniques* (majorées en valeur absolue dans un sens convenable). Ce résultat entraîne donc celui de Lukes et *al.* cité ci-dessus. Par conséquent les deux propriétés 'fines' de faisceau sont équivalentes, ce qui n'etait pas évident à l'avance.

On désigne par Ω un espace $\mathcal{B}$-harmonique à base dénombrable au sens de Bauer [1] ou de Constantinescu et Cornea [4].

Soit U un ouvert fin de Ω. On note par $L(U)$ l'ensemble des fonctions numériques finement semi-continues inférieurement $> -\infty$ sur U, et par $B(U)$ l'ensemble des ouverts fins relativement compacts (par rapport à la topologie initiale) V tels que $\overline{V} \subset U$. D'après [7] une fonction numérique f définie dans U est dite :

1) *finement hyperhamonique* sur U, si $f \in L(U)$ et si, pour tout $V \in B(U)$, f est bornée inférieurement sur $\overline{V}$, et

$$\int^* f d\varepsilon_x^{CV} \leq f(x), \text{ pour tout } x \in V;$$

2) *finement hyperharmonique au sens de Fuglede* sur U, si $f \in L(U)$ et si l'ensemble des $V \in B(U)$ tels que f soit bornée inférieurement sur $\overline{V}$ et que $f^{CV} \leq f$ sur V, forme une base de la topologie fine induite sur U (on pose $f^{CV}(x) = \int^* f d\varepsilon_x^{CV}$);

3) *localement finement hyperharmonique* sur U, si $f \in L(U)$ et si pour tout $x \in U$ l'ensemble des $V \in B(U)$ avec $x \in V$ tels que f soit bornée inférieurement sur $\overline{V}$ et que $f^{CV}(x) \leq f(x)$, forme un système fondamental de voisinages fins de x dans U.

Remarque. On dit que f est finement harmonique sur un ouvert fin U de Ω si, f et $-f$ sont finement hyperharmoniques sur U, c'est à dire si f est finement continue et si, pour tout $V \in B(U)$, f est bornée sur $\overline{V}$ et

$$\int f d\varepsilon_x^{CV} = f(x), \text{ pour tout } x \in V.$$

Définition 1.1 *([5] p.34) Un ouvert fin $V \subset \Omega$ est dit régulier lorsque CV est une base, c'est à dire que $b(CV) = CV$. Autrement dit, CV est ineffilé en tout point de la frontière fine $\partial_f V$ de V.*

Lemme 1.1 *Les ouverts fins réguliers forment une base pour la topologie fine sur Ω.*

Preuve. Soit V un voisinage fin d'un point x de Ω. La topologie fine est régulière; il existe donc un voisinage fin et finement fermé W de x contenu dans V. Or CW est un ouvert fin; $CW \subset \beta(CW)$, la base essentielle de CW, voir [2]; et $\beta(CW)$ est un fermé fin. Donc $Y = C\beta(CW) \subset W$ est un ouvert fin. De plus

$$(CW)^{\sim} = CW' = CW \cup b(CW), \quad (W' = \text{ l'intérieur fin de } W),$$

voir ([5] p.27), et comme $x \in W'$, il vient x n'appartient pas à $b(CW)$, donc x n'appartient pas à $\beta(CW)$. Par suite $x \in Y \subset W \subset V$. On sait que Y est un ouvert fin régulier.

Proposition 1.1 *Soient u et v deux fonctions localement finement hyperharmoniques sur un ouvert fin U, alors* $\inf(u, v)$ *est une fonction localement finement hyperharmonique sur U.*

Preuve. Soit $\omega(x) = \inf(u(x), v(x))$, $x \in U$; alors ω est finement semi-continue inférieurement $> -\infty$ sur U. Soit $x \in U$ et soit U_x un voisinage fin de x dans

U. Supposons par exemple que $\omega(x) = u(x) \leq v(x)$. Il existe $V \in B(U)$ tel que $x \in V \subset U_x$, ω soit bornée inférieurement sur $\overline{V}$ et que

$$\int^* u d\varepsilon_x^{CV} \leq u(x).$$

Or $\omega \leq u$ dans U, d'où

$$\int^* \omega d\varepsilon_x^{CV} \leq \int^* u d\varepsilon_x^{CV} \leq u(x) = \omega(x),$$

et ω est donc localement finement hyperharmonique sur U.

Proposition 1.2 *Soit u (résp. v) une fonction localement finement hyperharmonique sur un ouvert fin U (résp. sur un ouvert fin V tel que $V \subset U$). On suppose que*

$$\liminf_{x \longrightarrow y, x \in V} \textit{fine } v(x) \geq u(y), \textit{ pour tout } y \in U \cap \partial_f V.$$

Alors la fonction w définie par

$$w(x) = \begin{cases} \inf(u(x), v(x)), & si\ x \in V \\ \\ u(x), & si\ x \in U \setminus V \end{cases}$$

est localement finement hyperharmonique sur U.

Preuve. La fonction w ainsi définie est finement semi-continue inférieurement $> -\infty$ sur U et localement finement hyperharmonique sur $U \setminus \partial_f V$ selon la Proposition 1.1. Soit $x \in \partial_f V$, et soit U_x un voisinage fin de x dans U; il existe $W \in B(U)$ tel que $x \in W \subset U_x$ et que $u^{CW}(x) \leq u(x)$. Or $w \leq u$ dans U, et la preuve s'achève comme celle de la Proposition 1.1.

Définition 1.2 *On dit que l'espace harmonique Ω possède la propriété de faisceau pour les fonctions finement harmoniques si, pour toute famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts fins U_i dans Ω et pour toute fonction f définie dans $U = \cup_{i \in I} U_i$ telle qu'on a $|f| \leq h$ pour une fonction finement harmonique h sur U, l'harmonicité fine de $f|U_i$ pour tout $i \in I$ entraîne celle de f.*

Sans l'hypothèse $|f| \leq h$ cette propriété de faisceau ne serait pas remplie par l'espace harmonique classique $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, voir Fuglede [6]. D'ailleurs on pourrait remplacer h dans la définition par un potentiel localement borné sur Ω.

Théorème 1.1 *Dans un espace $\mathcal{B}$-harmonique Ω à base dénombrable, la propriété de faisceau pour les fonctions finement harmoniques implique l'axiome de domination.*

Ce théorème résulte du corollaire du lemme suivant où l'on suppose que Ω possède la propriété fine de faisceau ci- dessus. D'ailleurs le théorème reste valable avec la même démonstration si on emploie la définition d'harmonicité fine donnée dans [8] (au lieu de celle de [7] utilisée dans la note présente).

Lemme 1.2 *Soit u une fonction finement hypoharmonique au sens de Fuglede sur Ω, et v une fonction hyperharmonique positive localement bornée sur Ω telle que $u \leq v$. Alors il existe une fonction harmonique $h \geq 0$ sur Ω telle que $u \leq h \leq v$.*

Bien entendu, u est dite finement hypoharmonique au sens de Fuglede si $-u$ est finement hyperharmonique au sens de Fuglede.

Preuve. Soit

$$H = \{s \text{ hyperharmonique } \geq 0 \text{ sur } \Omega : u \leq s \leq v\}$$

On a H est non vide, car $v \in H$. Comme u est finement hypoharmonique au sens de Fuglede sur Ω, il existe une famille $(U_i)_{i \in I}$ d'ouverts fins $U_i \in B(U)$ telle que $\Omega = \cup_{i \in I} U_i$, et que $u(x) \leq \int_* u\varepsilon_x^{CU_i}$ pour tout $i \in I$ et tout $x \in U_i$. On a donc pour tout $x \in U_i$

$$u(x) \leq \int_* u d\varepsilon_x^{CU_i} \leq s^{CU_i}(x) \leq s(x) \leq v(x).$$

D'après ([7] Corollaire 7) s^{CU_i} est finement harmonique dans U_i. D'après le Lemme 1.1, il existe pour tout $i \in I$ une famille d'ouverts fins réguliers $V_{ij} \in B(U_i)$ telle que $U_i = \cup_j V_{ij}$. Alors

$$s^{CU_i} = (S^{CU_i})^{CV_{ij}} \leq s^{CV_{ij}} \leq s \leq v, \text{ dans } V_{ij},$$

et par suite $u \leq s^{CV_{ij}} \leq v$, dans V_{ij}. Comme V_{ij} est régulier on a $s^{CV_{ij}}(x) = s(x)$, pour tout $x \in CV_{ij}$, d'où $u \leq s^{CV_{ij}} \leq v$ dans Ω tout entier. Ceci montre que $s^{CV_{ij}} \in H$. Comme plus haut on sait que $s^{CV_{ij}}$ est finement harmonique dans V_{ij}. Posons

$$h(x) = \inf_{s \in H} s(x) = \inf_{s \in H} \int s d\varepsilon_x^{CV_{ij}}, \text{ pour tout } i, j \text{ et tout } x \in \Omega.$$

Alors $h \geq 0$ est finement harmonique dans V_{ij} d'après [8: théorème 12.12], vu que H, donc aussi la famille $\{s^{CV_{ij}} : s \in H\}$, est filtrante décroissante. Evidemment, $u \leq h \leq v$ dans Ω, et il reste à montrer que h est harmonique.

Soit $x \in \Omega$, il existe un voisinage W_x de x, W_x ouvert relativement compact dans Ω, et une fonction harmonique $h_0 > 0$ sur W_x tels que

$$0 \leq h \leq v \leq h_0, \text{ dans } W_x.$$

Or $W_x = \cup_{i,j} V_{ij} \cap W_x$ et $h|V_{ij} \cap W_x$ est finement harmonique. D'après ([7], Théorème 4) h_0 est finement harmonique, et il résulte donc de la propriété fine de faisceau que h est finement harmonique sur W_x, donc aussi harmonique sur W_x et donc dans $\cup_{x \in \Omega} W_x = \Omega$.

Si v ci-dessus est un *potentiel*, il vient $h = 0$ et par suite $u \leq 0$, d'où le corollaire suivant:

Corollaire 1.1 *Soit p un potentiel localement borné sur Ω et u une fonction finement hypoharmonique au sens de Fuglede sur Ω telle que $u \leq p$. Alors $u \leq 0$.*

Ceci signifie que tout potentiel localement borné sur Ω est un 'potentiel fin', voir ([5] paragraphe 10) (où l'on suppose l'axiome D).

Preuve du théorème 1.1. Soit p un potentiel localement borné sur Ω, de support harmonique S, et soit u une fonction hyperharmonique positive telle que $u \geq p$

dans S. Pour montrer que $u \geq p$ dans Ω tout entier, on pose

$$\omega(x) = \begin{cases} \inf(0, (u-p)(x)), & \text{si } x \in CS \\ 0, & \text{si } x \in S. \end{cases}$$

Comme p est harmonique dans CS, $u-p$ est hyperharmonique, donc aussi finement hyperharmonique dans CS d'après ([7], théorème 4). De plus u et p sont finement continues dans Ω et $u-p \geq 0$ dans S, d'où

$$\liminf_{x \longrightarrow y, x \in CS} fine(u-p)(x) = (u-p)(y) \geq 0, \text{ pour tout } y \in \partial_f S = \partial_f CS.$$

D'après la proposition 1.2, ω est localement finement hyperharmonique sur Ω. ω est aussi finement hyperhamonique au sens de Fuglede sur Ω, voir ([7], corollaire 9). Or $-\omega \leq p$ dans Ω, et il en résulte d'après le Corollaire 1.1 que $-\omega \leq 0$, ce qui entraîne que $u-p \geq 0$ dans CS, donc $u \geq p$ dans Ω.

Remarque. La propriété de faisceau pour les fonctions finement hyperharmoniques est définie comme celle plus haut pour les fonctions finement harmoniques, sauf que $|f| \leq h$ est remplacé par $f \geq -h$, ou d'une manière équivalente par $f \geq 0$; voir aussi ([8] p.381). Evidemment la propriété de faisceau pour les fonctions finement hyperharmoniques implique celle pour les fonctions finement harmoniques. Comme l'axiome de domination entraîne ces deux propriétés de faisceau selon ([5], lemme 9.5) (utilisé pour $f+h \geq 0$ dans le cas hyperharmonique), on tire du Théorème 1.1 ci-dessus le corollaire suivant qui étend la première partie du ([8], théorème 12.16).

Corollaire 1.2 *Dans un espace $\mathcal{B}$-harmonique au sens de Bauer ou de Constantinescu-Cornea à base dénombrable, la propriété de faisceau pour les fonctions finement hyperharmoniques est équivalente à celle pour les fonctions finement harmoniques; laquelle est équivalente à l'axiome de domination.*

Bibliographie

[1] H. Bauer, Harmonische Raume und ihre Potentialtheorie; Lecture Notes in Mathematics. 22, Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1966.

[2] J. Bliedtner and W. Hansen, Simplicial cones in potential theory. Inventiones Math. 46(1978), 255-275.

[3] N. Boboc, Gh. Bucur and A. Cornea, H-cones and potential theory. Ann. Inst. Fourier. 25 (1975), 71-108.

[4] C. Constantinescu and A. Cornea, Potential Theory in Harmonic Spaces; Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1972.

[5] B. Fuglede, Finely Harmonic Functions; Lecture Notes in Mathematics. 289, Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1972.

[6] B. Fuglede, On the mean value property of finely harmonic and finely hyperharmonic functions. Manuscript, 1989.

[7] J. Lukes and J. Malý, Fine hyperharmonicity without axiom D. Math. Ann. 261 (1982), 299-306.

[8] J. Lukes, J. Malý and L. Zajicek, Fine Topology Methods in Real Analysis and Potential Theory; Lecture Notes in Mathematics. 1189, Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1986.

Chapitre 2

The Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator

Definition 2.1 *Let D be an open set in $\mathbf{C}^n$. A function u defined on D to $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ is said to be plurisubharmonic on D if u is upper semi-continuous, identically infinite on no component of D and for every $a \in D$ and $w \in \mathbf{C}^n$ the function which to z associates $u(a + zw)$ is subharmonic or identically $-\infty$ on each component of the open set $\{z \in \mathbf{C} : a + zw \in D\}$.*

$P(\Omega)$ denotes the set of all plurisubharmonic functions on Ω.

The complex Monge-Ampère operator for $u \in P(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ is defined as follows:

$$(dd^c u)^n = dd^c u \wedge \ldots \wedge dd^c u = 4^n n! det \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} \right) dV$$

where $d = \partial + \overline{\partial}$, $d^c = i(\overline{\partial} - \partial)$, and dV is Lebesgue measure in $\mathbf{C}^n$.

Definition 2.2 *A real valued C^2 function u defined on an open set $D \subset \mathbf{C}^n$ is said to be strictly plurisubharmonic on D, if*

$$L_z(u, w) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z) w_j \overline{w}_k$$

is positive semi-definite on $\mathbf{C}^n$ *for every* $z \in D$.

We now use strictly plurisubharmonic functions to define an important class of domains.

Definition 2.3 *A bounded domain* D *in* $\mathbf{C}^n$ *is called strictly pseudoconvex if there are a neighborhood* U *of* ∂D *and a strictly plurisubharmonic function* $r \in C^2(U)$ *such that*

$$D \cap U = \{z \in U : r(z) < 0\}.$$

Bedford and Taylor [2] have extended the definition of the complex Monge-Ampère operator to functions $u \in P(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, where Ω is a strictly pseudoconvex domain, as follows. Given $u \in P(\Omega) \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$, they define $(dd^c u)^k = dd^c u \wedge \ldots \wedge dd^c u$, $(k - times)$, inductively as a current, where its action on a test form ψ of bidegree $(n-k, n-k)$ is

$$\int_\Omega (dd^c u)^k \wedge \psi = \int_\Omega u(dd^c u)^{k-1} \wedge dd^c \psi.$$

The following theorem was first proved by Bedford and Taylor [1] for $f \in C(\overline{\Omega})$ and generalized later for $f \in L^2(\Omega)$ by Cegrell and Person [6].

Theorem A: Let Ω be a bounded strictly pseudoconvex domain in $\mathbf{C}^n$. If $f \in L^2(\Omega)$, $f \geq 0$ and $\varphi \in C(\partial\Omega)$, then there exists a unique plurisubharmonic function $u \in P(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ such that

$$(dd^c u)^n = f dV, \text{ on } \Omega,$$

and

$$\lim_{\Omega \ni z \to \xi} u(z) = \varphi(\xi), \text{ for every } \xi \in \partial\Omega,$$

where dV is the Lebesgue measure in $\mathbb{C}^n$.

The following principle is of great importance. We shall use it several times in our paper.

Theorem 2.1 [2] *(**domination principle**) Let Ω be a bounded strictly pseudoconvex domain in $\mathbb{C}^n$. Let u and v be two functions in $P(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ such that*

$$(dd^c u)^n \leq (dd^c v)^n$$

and

$$\liminf_{\Omega \ni z, z \longrightarrow \xi} (u - v)(z) \geq 0, \text{ for every } \xi \in \partial\Omega.$$

Then $u \geq v$ in Ω.

Let μ be a positive measure on Ω and φ a continuous function on $\partial\Omega$. We consider the Perron-Bremermann class:

$\mathcal{B}(\varphi, \mu) =$

$\{v \in P(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) : (dd^c u)^n \geq \mu; \limsup v(z) \leq \varphi(\xi), z \longrightarrow \xi, \text{ for every } \xi \in \partial\Omega\}$.

Remark 1: For $z \in \partial\Omega$, and u defined on Ω,

$$\limsup_{x \longrightarrow z} u(x) = \inf_{V \in \mathcal{V}(z)} (\sup_{x \in V \cap \Omega} u(x)),$$

where $\mathcal{V}(z)$ is the set of all neighborhoods of z.

u^* will denote the smallest upper semi-continuous majorant of the function u.

Remark 2: The solution in Theorem A, is the upper envelope $\sup \mathcal{B}(\varphi, fdV)(z) = \sup\{v(z) : v \in \mathcal{B}(\varphi, fdV)\}$ of the Perron-Bremermann class.

In [5] Cegrell and Kolodziej suggested the general problem as follows:

$$\begin{cases} u \in P(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \\ (dd^c u)^n = \mu, & \text{on } \Omega \\ \limsup u(z) = \varphi(\xi), & \text{as } z \longrightarrow \xi, \text{ for every } \xi \in \partial\Omega, \end{cases}$$

where μ is a positive measure and $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. They showed that, if Ω is the unit ball in $\mathbf{C}^n$, μ has compact support and is invariant under rotations, and the Perron - Bremermann class $\mathcal{B}(0, \mu)$ is nonempty, then the function $(\sup \mathcal{B}(\varphi, f d\mu))^*$ where $0 \leq f \in L^\infty(d\mu)$, solves the problem for the measure $f\mu$. Cegrell and Sadulaev in [7] construct a function $f \in L^1(\Omega)$, such that there is no $u \in P(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ with $(dd^c u)^n \geq f dV$ on Ω. Persson [9] showed that the problem always has a radial solution on the unit ball, if $\mu = (dd^c u)^n$, where u is radial.

In this paper we discuss some questions related to sufficient conditions for the existence of a solution. Let Ω be a bounded strictly pseudoconvex domain in $\mathbf{C}^n$. If f is any non-negative measurable function on Ω and if there exists a function $\beta \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap P(\Omega)$ such that

$$(dd^c \beta)^n \geq f dV \text{ on } \Omega,$$

then we show a solution exists for the measure $f dV$. We study the weak solution (i.e. $\limsup u \leq \varphi$) for a bounded upper semi-continuous function on the boundary. Finally, we give a solution to the problem above if the measure $\mu = (dd^c u)^n$, where $u \in P(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

We shall also need the following results.

Theorem B [5] If $\mathcal{B}(\varphi, \mu) \neq \phi$, then $\sup \mathcal{B}(\varphi, \mu) \in \mathcal{B}(\varphi, \mu)$.

Remark : The appropriate conclusion in the last theorem is that $(\sup \mathcal{B}(\varphi, \mu))^* \in \mathcal{B}(\varphi, \mu)$. But this implies that $\sup \mathcal{B}(\varphi, \mu) \in \mathcal{B}(\varphi, \mu)$. Indeed, if $(\sup \mathcal{B}(\varphi, \mu))^* \in \mathcal{B}(\varphi, \mu)$, then $(\sup \mathcal{B}(\varphi, \mu))^* \leq \sup \mathcal{B}(\varphi, \mu) \leq (\sup \mathcal{B}(\varphi, \mu))^*$. Thus we have $(\sup \mathcal{B}(\varphi, \mu))^* = \sup \mathcal{B}(\varphi, \mu)$.

The following theorem gives the continuity, on a decreasing sequence, of the complex Monge-Ampère operator in the topology of the weak convergence of measures.

Theorem 2.2 [2] *Let* $\{u_j\}$ *be a decreasing sequence of functions in* $P(\Omega) \cap L^{\infty}_{loc}(\Omega)$ *and assume that* $\lim_{j\to\infty} u_j = u \in P(\Omega) \cap L^{\infty}_{loc}(\Omega)$. *Then*

$$\lim_{j\to\infty}(dd^c u_j)^n = (dd^c u)^n,$$

in the topology of weak convergence of measures.

Proposition 2.1 *Let* Ω *be a bounded strictly pseudoconvex domain in* $\mathbf{C}^n$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$ *and* μ *be a positive measure on* Ω. *If* $\mathcal{B}(\varphi,\mu) \neq \phi$ *and* $u = \sup \mathcal{B}(\varphi,\mu)$, *then*

$$\limsup_{\Omega\ni z, z\longrightarrow\xi} u(z) = \varphi(\xi), \text{ for every } \xi \in \partial\Omega.$$

Proof : $u \in \mathcal{B}(\varphi,\mu)$. Thus $\limsup u \leq \varphi$, on $\partial\Omega$. Suppose that there exists $x_0 \in \partial\Omega$ such that $\limsup u(x_0) < \varphi(x_0)$. We can suppose that u is defined and is uppersemicontinuous on $\overline{\Omega}$. There exists a neighbourhood V of x_0 such that $u < \alpha < \beta$ on $V \cap \overline{\Omega}$ where α and β are two real numbers, and $\beta < \varphi$ on $V \cap \partial\Omega$. Let W be a neighbourhood of x_0 with $\overline{W} \subset V$. There is a continuous function f on $\partial\Omega$ such that

$$f(x) = \begin{cases} (\beta-\alpha), & \text{if } x \in \overline{W} \cap \partial\Omega \\ 0, & \text{if } x \in \partial\Omega \setminus V, \end{cases}$$

and $f \leq \beta - \alpha$, on $\partial\Omega$. By Theorem A, there is $v \in P(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ such that $v = f$ on $\partial\Omega$ and $(dd^c v)^n = 0$ on Ω. So, $w = u + v$ is plurisubharmonic on Ω. By [8, Corollary 3.4.9] we have

$$(dd^c w)^n = (dd^c(u+v))^n \geq (dd^c u)^n + (dd^c v)^n \geq (dd^c u)^n \geq \mu, \text{ on } \Omega$$

and

$$\limsup_{\Omega \ni z, z \longrightarrow \xi} w(z) \leq \varphi(\xi), \text{ for every } \xi \in \partial\Omega.$$

Indeed, $\limsup_{\Omega \ni z, z \longrightarrow \xi} w(z) \leq \limsup_{\Omega \ni z, z \longrightarrow \xi} u(z) \leq \varphi(\xi)$ on $\partial\Omega \setminus V$, since $v = 0$ in $\partial\Omega \setminus V$. In $V \cap \partial\Omega$, we have $u - \alpha + \beta \leq \varphi$. Then $\limsup_{\Omega \ni z, z \longrightarrow \xi} u(z) + \limsup_{\Omega \ni z, z \longrightarrow \xi} v(z) = \limsup_{\Omega \ni z, z \longrightarrow \xi} u(z) + f(\xi) \leq u(\xi) - \alpha + \beta \leq \varphi(\xi)$.
This shows that $w \in \mathcal{B}(\varphi, \mu)$ thus $w \leq u$ on Ω. It follows that $v \leq 0$ on Ω which is absurd, since v is continuous on $\overline{\Omega}$ and $v > 0$ on $\overline{W} \cap \partial\Omega$.

Lemme 2.1 *Let Ω be a bounded strictly pseudoconvex domain in $\mathbf{C}^n$, and $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. If $\mu = (dd^c v)^n$ where $v \in P(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, then there exists $u \in P(\Omega)$ such that*

$$\lim_{\Omega \ni z, z \rightarrow \xi} u(z) = \varphi(\xi), \text{ for every } \xi \in \partial\Omega,$$

and

$$(dd^c u)^n \geq \mu.$$

Proof: According to Theorem A, there is $w \in P(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, such that

$$(dd^c w)^n = 0, \text{ on } \Omega$$

and

$$\lim_{\omega \ni z, z \rightarrow \xi} w(z) = \varphi(\xi) - v(\xi), \text{ for every } \xi \in \partial\Omega.$$

Thus the function $u = w + v \in P(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\lim_{\Omega \ni z, z \rightarrow \xi} u(z) = w(\xi) + v(\xi) = \varphi(\xi)$, for every $\xi \in \partial\Omega$ and

$$(dd^c u)^n \geq (dd^c w)^n + (dd^c v)^n \geq \mu.$$

Theorem 2.3 *Let Ω be a bounded strictly pseudoconvex domain in $\mathbf{C}^n$, $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ and f be a non-negative measurable function on Ω. If there is $v \in P(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ such that*

$$(dd^c v)^n \geq f dV, \; \textit{on } \Omega \; ,$$

then there exists a unique bounded function $u \in P(\Omega)$ such that

$$(dd^c u)^n = f dV, \; \textit{on } \Omega$$

and

$$\lim_{\Omega \ni z, z \to \xi} u(z) = \varphi(\xi), \; \textit{for every } \xi \in \partial\Omega \; .$$

Proof: Let $f_j = \min(f, j)$. $f_j \in L^2(\Omega)$ for every $j \geq 0$. Using Theorem A, for each $j \geq 0$, there is $u_j \in P(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ such that

$$(dd^c u_j)^n = f_j dV, \text{ on } \Omega$$

and

$$\lim_{\Omega \ni z \longrightarrow \xi} u_j(z) = \varphi(\xi), \text{ for every } \xi \in \partial\Omega \; .$$

Let now α be a real number such that $v + \alpha \leq \varphi$ on $\partial\Omega$. We have

$$(dd^c(v+\alpha))^n \geq (dd^c v)^n \geq f dV \geq f_{j+1} dV = (dd^c u_{j+1})^n \geq f_j dV = (dd^c u_j)^n,$$

for every $j \geq 0$, and

$$\lim_{\Omega \ni z \longrightarrow \xi} (v+\alpha)(z) \leq \lim_{\Omega \ni z \longrightarrow \xi} u_j(z) = \lim_{\Omega \ni z \longrightarrow \xi} u_{j+1}(z),$$

for every $j \geq 0$ and every $\xi \in \partial\Omega$. By the domination principle, $v + \alpha \leq u_{j+1} \leq u_j$. The sequence $\{u_j\}$ is decreasing and bounded from below by $v + \alpha$, then $u = \lim_{j \to \infty} u_j$ is in $P(\Omega)$, and is bounded on Ω. It follows that

$$f dV = \lim_{j \to \infty} (dd^c u_j)^n = (dd^c u)^n, \text{ on } \Omega \; .$$

Clearly, $\limsup u \le \varphi$ on $\partial\Omega$. Hence $u \in \mathcal{B}(\varphi, fdV)$ and we claim that $u = \sup \mathcal{B}(\varphi, fdV))$. Indeed, let $\beta \in \mathcal{B}(\varphi, fdV)$ then $(dd^c\beta)^n \ge fdV \ge f_j dV = (dd^c u_j)^n$ and $\limsup_{\Omega \ni z, z \longrightarrow \xi} \beta(z) \le \varphi(\xi) = \lim_{\Omega \ni z \to \xi} u_j$ for every $\xi \in \partial\Omega$, and for every $j \ge 0$. So $\liminf_{\Omega \ni z, z \longrightarrow \xi}(u_j - \beta)(z) \ge 0$, for every $\xi \in \partial\Omega$, and for every $j \ge 0$. Then by the domination principle we have $\beta \le u_j$ on Ω for every $j \ge 0$. It follows that $\beta \le u$ on Ω. Thus $u = (\sup \mathcal{B}(\varphi, fdV))^*$. By Proposition 2.1,

$$\limsup_{\Omega \ni z, z \longrightarrow \xi} u(z) = \varphi(\xi), \text{ for every } \xi \in \partial\Omega.$$

According to Lemma 2.1, there is $w \in P(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, such that

$$(dd^c w)^n \ge (dd^c v)^n \ge fdV, \text{ on } \Omega,$$

and $\lim_{\Omega \ni z, z \to \xi} w(z) = \varphi(\xi)$, for every $\xi \in \partial\Omega$. This means that $w \in \mathcal{B}(\varphi, fdV)$. Thus $w \le u$, on Ω. We conclude that

$$\lim_{\Omega \ni z, z \to \xi} u(z) = \varphi(\xi), \text{ for every } \xi \in \partial\Omega.$$

The unicity follows from the domination principle, and the proof is complete.

Corollary 2.1 *Let Ω be a bounded strictly pseudoconvex domain in $\mathbf{C}^n$ and $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. If $\mu = (dd^c v)^n$ on Ω, where $v \in P(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, then there is a unique bounded function $u \in P(\Omega)$ such that*

$$(dd^c u)^n = (dd^c v)^n, \text{ on } \Omega$$

and

$$\lim_{\Omega \ni z, z \to \xi} u(z) = \varphi(\xi), \text{ for every } \xi \in \partial\Omega.$$

Proof: Since $v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, then $(dd^c v)^n = fdV$, where f is a non-negative continuous function on Ω. The result follows immediatly from the last theorem.

Theorem 2.4 *Let Ω be a bounded strictly pseudoconvex domain in $\mathbf{C}^n$. If $f \in L^2(\Omega)$, $f \geq 0$ and φ is a bounded upper semicontinuous function on $\partial\Omega$, then there exists a bounded plurisubharmonic function u, upper semi continuous on $\overline{\Omega}$ such that*

$$(dd^c u)^n = f dV, \ \text{on } \Omega,$$

and

$$\limsup_{\Omega \ni z, z \longrightarrow \xi} u(z) \leq \varphi, \ \text{on } \partial\Omega.$$

Furthermore, if φ is continuous at $x \in \partial\Omega$ then

$$\lim_{\Omega \ni z \rightarrow x} u(z) = \varphi(x).$$

Proof: Let $\{\varphi_j\}_{j>0}$ be a decreasing sequence of continuous functions which converges to φ. According to Theorem A, there exists a sequence $\{u_j\}$ of functions plurisubharmonic on Ω and continuous on $\overline{\Omega}$, such that $(dd^c u_j)^n = f dV$ and $u_j = \varphi_j$ on $\partial\Omega$. We have

$$(dd^c u_j)^n = (dd^c u_{j+1})^n, \ \text{on } \Omega$$

and

$$u_j = \varphi_j \geq \varphi_{j+1} = u_{j+1}, \ \text{on } \partial\Omega.$$

By the domination principle the sequence $\{u_j\}$ is decreasing on Ω.

Since φ is bounded, there is a constant c such that $\varphi \geq c$ on $\partial\Omega$. It follows that $u_j \geq c$ on $\partial\Omega$, for every $j \geq 0$. Let $v \in P(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ such that $(dd^c v)^n = f dV$ and $v = c$ on $\partial\Omega$. Again by the domination principle we have $u_j \geq v$ for every $j \geq 0$, so $u_j \geq u = \lim_{j \to \infty} u_j \geq v$. Thus u is in $P(\Omega)$, upper semicontinuous and bounded on $\overline{\Omega}$. Since $u_j = \varphi_j$ on $\partial\Omega$, for every $j \geq 0$, it follows that $\limsup_{\Omega \ni z, z \longrightarrow \xi} u(z) \leq \limsup_{\overline{\Omega} \ni z, z \longrightarrow \xi} u(z) = \varphi$ on $\partial\Omega$. It was shown that the sequence $\{u_j\}$ is decreasing on Ω, then

$$f dV = \lim_{j \to \infty} (dd^c u_j)^n = (dd^c u)^n.$$

Let now $x_0 \in \partial\Omega$ such that φ is continuous at x_0. Then there is a function $\psi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ such that $\psi \leq \varphi$ on $\partial\Omega$ and $\psi(x_0) = \varphi(x_0)$. Let $w \in P(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ such that

$$fdV = (dd^c w)^n$$

and

$$\lim_{\Omega \ni z \longrightarrow \xi} w(z) = \psi(\xi), \text{ for every } \xi \in \partial\Omega \,.$$

We have

$$(dd^c w)^n = fdV = (dd^c u_j)^n, \text{ for every } j \geq 0$$

and

$$\lim_{\Omega \ni z \to \xi} w(z) = \psi(\xi) \leq \varphi(\xi) \leq \varphi_j(\xi) = \lim_{\Omega \ni z \to \xi} u_j(z).$$

By the domination principle $w \leq u_j$ on Ω, for any $j \geq 0$. It follows that $w \leq u$ on Ω. Hence, $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = \lim_{\Omega \ni z \to x_0} w(z) \leq \liminf_{\Omega \ni z \to x_0} u(z) \leq \limsup_{z \to x_0} u(z) \leq \lim_{\Omega \ni z \to x_0} u_j(z) = \varphi_j(x_0)$, for every $j \geq 0$. Thus

$$\lim_{z \to x_0} u(z) = \varphi(x_0).$$

Bibliographie

[1] E. Bedford and B.A. Taylor. The Dirichlet problem for the complex Monge - Ampère equation. Invent. Math. 37 (1976), 1 - 44.

[2] E. Bedford and B.A. Taylor. A new capacity for plurisubharminic functions. Acta Math. 149 (1982), 1 - 40.

[3] H. T. Bremermann. On a generalised Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudo-convex domains. Characterization of Silov boundaries. Trans. Amer. Math. Soc. 91 (1959), 246 - 276.

[4] U. Cegrell. On the Dirichlet problem for the complex Monge - Ampère operator. Math. Z. 185 (1984), 247-251.

[5] U. Cegrell and S. Koldziej. The Dirichlet problem for the complex Monge - Ampère operator. Perron class and rotation invariant measures. Michigan Math. J. 41 (1994), 563-569.

[6] U. Cegrell and L. Persson. The Dirichlet problem for the complex Monge - Ampère operator: Stability in L^2. Michigan Math. J. 39 (1992), 145 - 151.

[7] U. Cegrell and A. Sadulaev. Approximation of plurisubharmonic functions and the Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator. Math. Scand. 71 (1989), 257-272.

[8] M. Klimek. Pluripotential Theory, Oxford University Press, 1991.

[9] L. Persson, On the complexe Monge-Ampère operator. Thesis, University of Umeå (1992).

[10] P. Lelong, Intégration sur un ensemble analytique complexe. Bull. Soc. Math. France. 85 (1957), 239-262.

Chapitre 3

Carleman approximation on products in $\mathbf{C}^n$

Seddik Chacrone, Paul M. Gauthier and Ashot H. Nersessian.

Abstract

In [19] Scheinberg generalized a celebrated theorem of Carleman by showing that a continuous function on $\mathbf{R}^n$ can be approximated with arbitrary speed by entire functions of n complex variables. Alexander showed in [1] that an unbounded smooth curve in $\mathbf{C}^n$ is such a set of Carleman approximation. Frih and Gauthier in [8] studied Carleman approximation by entire functions in $\mathbf{C}^n$ on products of curves in $\mathbf{C}^{n_i}, n_1+\cdots+n_k=n$. In the present paper, we show that products of Carleman approximation sets in $\mathbf{C}$ are Carleman approximation sets in $\mathbf{C}^n$, thus generalizing the results of [18] and [19].

For a locally compact Hausdorff space Ω, we denote by $\Omega^* = \Omega \cup \{*\}$ the one-point (Aleksandrov) compactification of Ω. Unless otherwise specified, all topological notions in Ω are with respect to Ω (rather than Ω^*). For example, if $X \subset \Omega$, $\overline{X}$ and X^c denote the closure and complement of X in Ω. X is said to be bounded if $\overline{X}$ is a compact subset of Ω. A hole of X is a non-empty bounded component of X^c.

Let X be a closed subset of a Riemann surface Ω. We denote by $H(\Omega)$ the holomorphic functions on Ω, by $C(X)$ the set of continuous complex-valued functions on

X, and by $A(X)$ those functions in $C(X)$ which are holomorphic in the interior of X. A proper closed subset X is said to be a Carleman set in Ω if for each $f \in A(X)$ and each positive $\epsilon \in C(X)$, there exists a function $g \in H(\Omega)$, such that $|f-g| < \epsilon$. A compact Carleman set is called a Mergelyan set.

The following characterization of Mergelyan was first proved by Mergelyan in [17] for plane domains and later extended by Bishop [3] to Riemann surfaces.

Lemma 3.1 *A compact subset K of a Riemann surface Ω is a Mergelyan set if and only if $\Omega^* \setminus K$ is connected.*

The following characterization of Carleman sets was first proved by Nersessian in [18] for plane domains and later extended by Boivin [4] to Riemann sufaces.

Theorem 3.1 *A closed subset X of a Riemann surface Ω is a Carleman set in Ω if and only if $\Omega^* \setminus X$ is connected and locally connected and for any compact $K \subset \Omega$ there exists another compact L, $K \subset L \subset \Omega$, such that no component of $intX$ intersects both K and $\Omega \setminus L$.*

Now, for $j = 1, 2, \ldots, n$, let X_j be a closed subset of a Riemann surface Ω_j. Consider the closed subset $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ of the complex manifold $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$. We denote by $H(\Omega)$ the holomorphic functions on Ω, by $C(X)$ the set of continuous functions on X, and by $A(X)$ the slice product $A(X_1)\#\ldots\#A(X_n)$, that is, the family of those functions $f \in C(X)$ such that: for each $p \in X$, setting $g_j(q) = f(p_1, \ldots, p_{j-1}, q, p_{j+1}, \ldots, p_n)$, for $q \in X_j$, we have $g_j \in A(X_j)$; for every $1 \leq j \leq n$.

The set $X = X_1 \times \ldots \times X_n \subset \Omega$ is said to be a Carleman set in Ω, if for each $f \in A(X)$ and each positive $\varepsilon \in C(X)$, there exists a function $g \in H(\Omega)$, such that $|f - g| < \varepsilon$, on X.

We now formulate the main statement of this paper.

Theorem 3.2 *Let $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ be a product of Riemann surfaces $\Omega_j, j = 1, 2, \ldots, n$ and assume $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ is a product type subset of Ω, closed in Ω. Then X is a Carleman set in Ω if and only if each X_j is a Carleman set in Ω_j.*

An unbounded Jordan arc in $\mathbf{C}$ is (the image of) a homeomorphism $J : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ such that $J(t) \longrightarrow \infty$ as $t \longrightarrow \infty$.

Corollary 3.1 [8] *For $j = 1, 2$, let J_j be unbounded Jordan arcs in $\mathbf{C}$ and set $J = J_1 \times J_2$. Then, J is a Carleman set in $\mathbf{C}^2$.*

In [8] it was actually shown that if, for $j = 1, 2$, J_j is a *smooth* unbounded Jordan arc in $\mathbf{C}^{n_j}$, then $J = J_1 \times J_2$ is a Carleman set in $\mathbf{C}^{n_1} \times \mathbf{C}^{n_2}$. In case each $n_j = 1$, the proof in [8] works without the smoothness assumption on the J_j.

If $\mathbf{C}^2$ is represented as $\mathbf{R}^2 + i\mathbf{R}^2$, then we may identify $\mathbf{R}^2$ with the real part of $\mathbf{C}^2$.

Corollary 3.2 *(Scheinberg [19]) In $\mathbf{C}^2$, the real part $\mathbf{R}^2$ is a Carleman set.*

In what follows we consider in detail only the case of $\Omega_1 \times \Omega_2$, noting that the treatment for higher dimensions is identical.

At this point, we pause to explain why we insisted that X be a *proper* closed subset of Ω, when we defined a Carleman set X in a Riemann surface Ω. After all, the set $X = \Omega$ trivially satisfies the required approximation property. Our first reason for excluding $X = \Omega$ is that Theorem 3.1 would fail for $X = \Omega$. This is obvious.

Our second reason is that Theorem 3.2 would also fail if some X_j were allowed to be Ω_j. Indeed, let $X_1 = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbf{N}\}$ and set $X = X_1 \times \mathbf{C}$. On X we define $f(z_1, z_2)$ as z_2 if $z_1 = 1$ and as 0 otherwise. Suppose g is holomorphic in a connected open neighbourhood of X in $\mathbf{C}^2$ and $|f - g| < 1$. Then, by the Liouville theorem, for each $z_1 \in X_1 \setminus \{1\}$, $g(z_1, .)$ is constant. Hence, $\partial g / \partial z_2 = 0$

on $(X_1 \setminus \{1\}) \times \mathbf{C}$. Since this set is contained in no proper analytic set, $\partial g/\partial z_2$ is the zero function. Thus, $g(1,.)$ is constant. But this contradicts the fact that $g(1, z_2)$ approximates z_2. Thus, X is an example of a product of two sets on each of which Carleman approximation is possible. Yet, as we have just shown, Carleman approximation is not possible on X.

This example shows, in fact, that not only is Carleman approximation impossible on X, even the (apparently) easier task of uniform approximation is impossible. We are left with the open problem as to whether there is an analog of Theorem 3.2 for uniform approximation. The last example shows that, in defining a set X of uniform approximation in Ω, we should exclude the trivial case $X = \Omega$, just as we have done for Carleman approximation.

There is another difficulty in trying to find a uniform analog of Theorem 3.2. Although, for plane domains Ω, there is a complete discription of uniform approximation sets (a famous theorem of Arakelyan), for Riemann surfaces Ω, in contrast to the Carleman situation, there is no known description of *Arakelyan* sets. In fact, Gauthier and Hengartner [12] have shown that the topological characterization of uniform approximation sets given by Arakelyan in planar domains fails on Riemann surfaces. Moreover, Scheinberg [20] subsequently showed that *no* topological characterization thereof is possible! This seems to indicate that the well-known phenomenon, that describing approximation sets in several complex variables is not a topological question, seems to emerge already on Riemann surfaces.

This paper is devoted to better-than-uniform (Carleman) approximation. The previous paragraph already shows that, surprisingly, we obtain more complete answers to problems in better-than-uniform approximation than are presently available for uniform approximation. This is because the conditions necessary for better-than-uniform approximation are so stringent that they point the way to sufficient conditions.

The tensor product of the algebras $A(X_1)$ and $A(X_2)$, denoted by $A(X_1) \otimes A(X_2)$, is the smallest closed subalgebra of $C(X_1 \times X_2)$ containing the functions $f o \pi_j$, where, for $j = 1, 2$, π_j is the natural projection of $X_1 \times X_2$ onto X_j and $f \in A(X_j)$.

A Banach space A has the approximation property, if and only if for each compact subset K of A and each $\varepsilon > 0$ there exists a continuous linear operator T mapping A into A such that T has finite rank and $\|x - T(x)\| \leq \varepsilon$, for each $x \in K$. The following result was formulated by Eifler [7] (see also [9], [11, Coroll. 6.3], [13], [10]).

Theorem 3.3 *(Eifler) Suppose A and B are closed linear subspaces of $C(X)$ and $C(Y)$ respectively where X and Y are compact spaces. If A has the approximation property, then $A \otimes B = A \# B$.*

Lemma 3.2 *If each K_j is a Mergelyan set in Ω_j, then $K = K_1 \times K_2$ is a Mergelyan set in Ω.*

Proof. Boivin [5] has shown that each of the algebras $A(K_j)$ is T-invariant, where T is the Vitushkin localization operator. It then follows from Theorem 1 in another paper by Boivin [6] that there is a sequence of linear operators on $A(K_j)$ of finite rank which converges to the identity operator on $A(K_j)$ pointwise, i.e. in the strong operator topology.

Our lemma now follows directly from Eifler's theorem.

3.1 Preliminaries about parts

Let $M(X)$ represent the class of functions uniformly approximable on X by meromorphic functions of the form $f = g/h$, where $g, h \in H(\Omega)$, and h has no zeros on X. We note that if $\Omega = \mathbf{C}^2$ and $X \subset \mathbf{C}^2$ is compact, then $M(X)$ coincides with $R(X)$, the class of functions uniformly approximable on X by rational functions $f = g/h$, where g and h are polynomials and h has no zeros on X.

$$\|f\|_X = \sup\{|f(z)| : z \in X\}$$

is the uniform norm of a function f defined on X.

Proposition 3.1 *A product type compact subset $X = X_1 \times X_2$ of $\Omega_1 \times \Omega_2$ is meromorphically convex.*

Proof. Assume $(z_1, z_2) \notin X_1 \times X_2$. Then $z_1 \notin X_1$. There exists a meromorphic function r without poles on X_1 such that $|r(z_1)| > \|r\|_{X_1}$. Since this function can be taken as a meromorphic function in $\Omega_1 \times \Omega_2$ (as a function which is constant with respect to the second variable) and its supremum on X is equal to $\|r\|_{X_1}$, we see that (z_1, z_2) is not in the meromorphically convex hull of X, and the proposition is proved.

Lemma 3.3 *For a product type compact set $X = X_1 \times X_2$, the maximal ideal space of the algebra $M(X)$ coincides with X.*

Proof. This follows from Proposition 3.1 and Lemma 2.1 in [9, Chap.3], taking into account that Ω can be properly embedded into some $\mathbf{C}^n$ (see also [15, Theorem 7.2.11]).

According to the definition of Gleason, two homomorphisms φ, ψ of a Banach algebra A are called equivalent, if $\|\varphi - \psi\| < 2$, where $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(f)| : f \in A, |f|_A \leq 1\}$. The equivalence classes of the maximal ideal space of A under the defined relation are called Gleason parts of the algebra A (see [9, Ch. VI] for further details).

Our next objective is to find a characterization for Gleason parts of the algebras $M(X)$ for product type compact subsets of $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Theorem 3.4 *The Gleason parts of $M(X)$ for the product type compact subsets $X \subset \Omega_1 \times \Omega_2$, $X = X_1 \times X_2$, are exactly the subsets of the type $G_1 \times G_2$, where G_j are Gleason parts of the respective algebras $M(X_j)$.*

Proof. Let $G = G_1 \times G_2$, where each G_j, $j = 1, 2$, is some Gleason part of $M(X_j)$, $x_1, x_2 \in G_1$ and $y_1, y_2 \in G_2$. We claim that the points

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2)$$

are equivalent as homomorphisms on $M(X)$. We have to verify that

$$\sup\{|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| : f \in M(X),\ \|f\|_X \leq 1\} < 2.$$

Note, that $f(\cdot, y) \in M(X_1)$ and $f(x, \cdot) \in M(X_2)$ for any $x \in G_1, y \in G_2$. Hence, since $x_1 \sim x_2$ and $y_1 \sim y_2$, then $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_1)$ and $(x_2, y_1) \sim (x_2, y_2)$, which results in the desired equivalence: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$. This implies that $G = G_1 \times G_2$ is contained in a single part of $M(X)$.

On the other hand, if G is a part of $M(X)$, take $G_1 = \pi_1 G$, the projection of G on Ω_1. First, according to the Lemma 3.3 we have $G_1 \subset X_1$. We claim that G_1 is contained in some part of $M(X_1)$. Indeed, for every $f \in M(X_1)$, $\|f\|_{X_1} \leq 1$, set $g(x, y) = f(x)$ for $(x, y) \in X$. Then we have $g \in M(X)$ and for all pairs $x_1, x_2 \in G_1$,

$$\begin{aligned}
\sup\ & \{|f(x_1) - f(x_2)| :\ f \in M(X_1),\ \|f\|_{X_1} \leq 1\} \\
\leq\ & \sup\{|g(x_1, y_1) - g(x_2, y_2)|\ :\ g \in M(X),\ \|g\|_X \leq 1\} \\
=\ & \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| < 2,
\end{aligned}$$

for some suitable y_1, y_2 such that (x_1, y_1) and $(x_2, y_2) \in G$. In the same way we see that $G_2 = \pi_2 G$, the projection of G on Ω_2, is contained in a part of $M(X_2)$. If these parts were larger than, either, respectively, G_1 or G_2, then, according to the above reasoning, their product would be contained in some part for $M(X)$ larger than G, which is inconsistent with the definition of a part. Hence G_1, G_2 are parts for, respectively, $M(X_1)$ and $M(X_2)$.

We see that the product of two parts is contained in some part for $M(X)$ whose projections are parts for $M(X_j)$. The proof is complete.

The following assertion generalizes the characterization, due to Arens and Sarason [9, Theorem VI.4.4], of the Gleason parts for the algebra $R(X)$ on a compact subset of the plane, having a finite number of complementary components.

Corollary 3.3 *A non-trivial Gleason part of the algebra $R(X)$ for a product type compact subset X of $\mathbf{C}^2$, with projections X_j having a finite number of complementary components, is either*

a) a component of the interior of X, or

b) coincides with a subset of the type $\{a_1\} \times G_2$ or $G_1 \times \{a_2\}$, where $a_j \in \partial X_j$ and G_j is a component of the interior of X_j.

As a further auxiliary statement we shall need a generalization of Wilken's theorem on supports of representing measures (see [9, p. 146]). Although we will be using this theorem only in part, we give it in full because of its own interest. Define the Cauchy transform of a Borel measure μ with compact support:

$$\hat{\mu}(\zeta_1, \zeta_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int k_1(z_1, \zeta_1) k_2(z_2, \zeta_2) d\mu(z_1, z_2)$$

where k_j is a Cauchy kernel on Ω_j. It is easy to see that $\hat{\mu}$ is holomorphic in $X_1^c \times X_2^c$, if $\operatorname{supp}\mu \subset X = X_1 \times X_2$.

Theorem 3.5 $\mu \perp M(X)$ *if and only if* $\hat{\mu} = 0$ *in* $X_1^c \times X_2^c$.

Proof. Necessity is obvious. Indeed, μ is orthogonal to $M(X)$ implies $\hat{\mu} = 0$ on $X_1^c \times X_2^c$.

Sufficiency. Suppose $\hat{\mu} = 0$ in $X_1^c \times X_2^c$. By Eifler's theorem the slice and tensor products of the algebras $M(X_1)$ and $M(X_2)$ coincide, so it is sufficient to see that

μ is orthogonal to products $f_1 f_2$ for each pair of meromorphic functions f_j without poles on X_j. Assume $L_j \subset X_j^c$ are smooth contours surrounding X_j but no poles of f_j. We have, as a consequence of the Cauchy representation formula and Fubini's theorem:

$$\int_X f_1 f_2 \, d\mu = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial G} f_1(\zeta_1) f(\zeta_2) \, d\zeta_1 \, d\zeta_2 \int_X k_1(z_1, \zeta_1) k_2(z_2, \zeta_2) d\mu(z_1, z_2) = 0,$$

where ∂G is the distinguished boundary of a set $G = G_1 \times G_2$ such that the functions f_j have no poles in the smoothly bounded neighbourhoods G_j of the corresponding sets X_j.

Theorem 3.6 *The representing measures of a point $p \in P$, where P is a Gleason part of $M(X_1 \times X_2)$, are supported on $\bar{P}$ and represent p on $M(\bar{P})$.*

Proof. We define the "projections" of a finite measure μ defined on $X_1 \times X_2$ by setting $\pi_1\mu(E_1) = \mu(E_1 \times X_2)$, for each Borel set $E_1 \subset X_1$ and $\pi_2\mu(E_2) = \mu(X_1 \times E_2)$, for each Borel set $E_2 \subset X_2$. From the definition, $\text{supp}\pi_j\mu = \pi_j \text{supp}\mu$. We now show that the measures $\pi_j\mu$ give representing measures for the points x_j on $M(X_j)$, if μ is a representing measure for (x_1, x_2) on $M(X)$. Assuming again that $M(X_j)$ are embedded in $M(X)$ in the natural way (see the second paragraph in the proof of Theorem 3.4, for an arbitrary $f \in M(X_1)$,

$$f(x_1) = f(x_1, x_2) = \int f \, d\mu = \int f \, d\pi_1\mu.$$

Therefore, by Boivin's version of Wilken's theorem for Riemann surfaces [4] and from Theorem 3.4, $\text{supp}\pi_j\mu \subset \overline{\pi_j P}$ which implies $\text{supp}\mu \subset \overline{P}$ and the first assertion is verified.

Let $h_j \in H(\Omega_j)$ have a simple zero at p_j and no other zeros. If m is a representing measure for p on $M(X)$, it is supported on $\overline{P}$ as shown and hence the measure

$\mu = mh_1h_2$, which is orthogonal to $M(X)$, is supported on $\overline{P}$. By Theorem 3.5, $\hat{\mu} = 0$ on $X_1^c \times X_2^c$. Since $\hat{\mu}$ is holomorphic in $P_1^c \times P_2^c$, each component of the interior of which contains a component of $X_1^c \times X_2^c$, then $\hat{\mu} = 0$ on $P_1^c \times P_2^c$ (we set $P_j = \pi_j \bar{P}$). Again by Theorem 3.4 this implies $\mu \perp M(\overline{P})$. For an arbitrary pair of meromorphic functions f_j, having no poles on P_j we have,

$$
\begin{aligned}
0 &= \int \frac{(f_1(z_1) - f_1(p_1))(f_2(z_2) - f_2(p_2))}{h_1(z_1)h_2(z_2)}\, d\mu \\
&= \int f_1 f_2\, dm + f_1(p_1) f_2(p_2) \\
&\qquad\qquad - \left(f_2(p_2) \int f_1\, dm + f_1(p_1) \int f_2\, dm \right) \\
&= \int f_1 f_2\, dm + f_1(p_1) f_2(p_2) \\
&\qquad\qquad - \left(f_2(p_2) \int_{P_1} f_1\, d\pi_1 m + f_1(p_1) \int_{P_2} f_2\, d\pi_2 m \right) \\
&= \int f_1 f_2\, dm - f_1(p_1) f_2(p_2).
\end{aligned}
$$

In deducing the latter equality we have assumed that $\pi_j m$ represent p_j on $M(P_j)$, which follows from Boivin's version of Wilken's theorem for Riemann surfaces [4]that $\pi_j m$ represent p_j on $M(P_j)$.

Remark. It is easy to show that cartesian products of representing measures of respective points x_j on respective algebras $R(X_j)$, $j = 1, 2$, give representing measures for the points (x_1, x_2) on the algebra $R(X)$. We do not know if all representing measures on $R(X)$ are obtained in this way. If this be true, the proof of the second assertion in Theorem 3.6 could be further simplified, reducing it to yet another application of the corresponding assertion of Wilken's theorem for the planar case.

3.2 Proof of the theorem

Proof. Necessity. Assume $f \in A(X_1)$ and $0 < \varepsilon \in C(X_1)$. Then the functions $\hat{f}(z,w) = f(z)$, $\hat{\varepsilon}(z,w) = \varepsilon(z)$, $z \in X_1, w \in X_2$ are in $A(X)$ and $C(X)$ respectively. By assumption there exists a function $g \in H(\Omega)$ such that $|\hat{f} - g| < \hat{\varepsilon}$ on X. This implies $|f - g(\cdot, y_0)| < \varepsilon$ on X_1 and it remains to notice that $g(\cdot, y_0) \in H(\Omega_1)$ for arbitrary $y_0 \in X_2$. An identical argument shows that X_2 is a Carleman set in Ω_2.

Sufficiency. We need certain exhaustions of both projections Ω_j and we give the details of the construction for Ω_1. Let ρ_j stand for a distance function on Ω_j^* and assume the positive number r_0 is so small that $A_{10}^0 \neq \emptyset$, where $A_{10} = \{z \in \Omega_1 : \rho_1(z,*) \geq r_0\}$. According to Theorem 3.1 the closure B_{10} of the union of bounded components of $\Omega_1 \setminus A_{10} \cup X_1$ is a bounded subset of Ω_1. From the last condition in that theorem we also have that the closure C_{10} of the union of the bounded components of X_1^0 whose closures meet $A_{10} \cup B_{10}$ is bounded. Denote $D_{10} = A_{10} \cup B_{10} \cup C_{10}$. The following properties of D_{10} are immediate.

a) D_{10} is a compact subset of Ω_1.

b) $\partial D_{10} \subset \partial(D_{10} \cup X_1)$. Indeed, $\partial D_{10} \subset \partial A_{10} \cup \partial B_{10} \cup \partial C_{10}$. A point $z_0 \in \partial C_{10}$ cannot be an interior point of X_1 and $z_0 \in \partial D_{10} \cap \partial C_{10}$ implies $z_0 \in \partial(D_{10} \cup X_1)$. A point $z_0 \in \partial D_{10} \cap (\partial A_{10} \cup \partial B_{10})$ is a limit point of the complement of the set $D_{10} \cup X$ because clearly $z_0 \in \overline{\Omega_1 \setminus D_{10}}$ and $z_0 \in \overline{\Omega_1 \setminus X_1}$.

c) $\Omega_1 \setminus D_{10}$ has no bounded components. Indeed, suppose z_0 were a point of such a component. If z_0 were in the interior of X_1, then z_0 would be in $C_{10} \subset D_{10}$. If z_0 were not in the interior of X_1, then z_0 would be in $B_{10} \subset D_{10}$.

By a), $\rho_1(D_{10}, *) = r_0' > 0$. Take a number r_1, $0 < r_1 < r_0'/2$, and carry out the previous construction starting from $A_{11} = \{z \in \Omega_1 : \rho_1(z,*) \geq r_1\}$ in place of A_{10}. Continuing this procedure by induction, taking each time $0 < r_n < r_{n-1}'/2$, we construct a compact exhaustion $D_{10}, D_{11}, \ldots$ for Ω_1 such that each D_{1n} has the properties a)–c). By the same construction we obtain an exhaustion $\{D_{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ having properties a)–c) with respect to Ω_2 and X_2.

We further construct another pair of compact exhaustions $\{D'_{jn}, D''_{jn}\}_{n=0}^{\infty}$ of the sets $\Omega_j, j = 1, 2$, having following properties:

d) $D'_{jn} \subset D^0_{jn}$, $D_{jn} \subset (D''_{jn})^0$, $D''_{jn} \subset (D'_{j(n+1)})^0$;

e) $\Omega_j \setminus D''_{jn}$ have only a finite number of components none of them bounded.

Denote $D_n = D_{1n} \times D_{2n}$, $D'_n = D'_{1n} \times D'_{2n}$ and $D''_n = D''_{1n} \times D''_{2n}$, $n \geq 0$. Then we have $D'_n \subset D^0_n \subset D_n \subset D''^0_n \subset D'^0_{n+1}$.

Remarks. 1) We notice first, that thanks to Bishop's Mergelyan type theorem [3], each of the sets $X_j \cap D''_{jn}$, $n \geq 0$, is a set of approximation by meromorphic functions on Ω_j. Boivin [5, 6] has shown that $A(X_j \cap D''_{jn})$ has the Banach approximation property. Therefore, by Eifler's theorem we obtain that each set $X \cap D''_m$ is a set of approximation by meromorphic functions on Ω.

2) According to Boivin [5] Proposition 1, and by property b) , the sets D^0_{jn} constitute (no more than countable) unions of entire Gleason parts for the respective algebras $M(D_{jn} \cup X_j \cap D''_{jm})$ for any $m \geq n$. Consequently, according to Theorem 3.4, the sets D^0_n constitute unions of Gleason parts for the algebras $M(\mathcal{E}_n)$, where $\mathcal{E}_n$ is the product set $[(D_{1n} \cup X_1) \times (D_{2n} \cup X_2)] \cap D''_{n+1}$. It is important for the next remark to notice that $D_n \cup X \cap D''_{n+1} \subset \mathcal{E}_n$.

3) Since the sets $D''_{n+1} \setminus D_n$ are obviously of F_σ-type, the conditions of Lemma 0-1 and its Corollary 2 in [4, p. 61] are satisfied. Although in [5] these are formulated for the algebra $M(K)$, where K is a compact subset of a Riemann surface, the first assertion in Theorem 3.6 provides the only additional statement that is needed to extend Boivin's proof to the case where K is a product $K_1 \times K_2$. Therefore, for any $n \geq 0$ and an arbitrary $\varepsilon > 0$, there exist meromorphic functions r_n such that

$$i) \qquad |r_n| \leq 1 \text{ on } \mathcal{E}_n,$$

$$ii) \; |1 - r_n| \; < \; \varepsilon \; \text{ on } \; \mathcal{E}_n \setminus D_n'',$$

$$iii) \qquad |r_n| \; < \; \varepsilon \; \text{ on } \; D_n'.$$

We show that r_n can be taken to be holomorphic. Take $\varepsilon_n = \min_{D_n''} \varepsilon$, $n \geq 0$. By Remark 1) there is a holomorphic function R_0 such that

$$|f - R_0| < \frac{\varepsilon_0}{4} \quad \text{on} \quad X \cap D_0''.$$

We choose the next holomorphic function Q_1 so that

$$|f - R_0 - Q_1| < \frac{\varepsilon_1}{4} \quad \text{in} \quad X \cap D_1''.$$

According to the Remark 3) above, there exists a holomorphic function r_0, constructed for the sets $D_0', \mathcal{E}_0, D_0''$ and appropriately small ε, such that the function $R_1 = r_0 Q_1$ has the properties:

$$|R_1| \; < \; \frac{1}{2}, \quad \text{in} \quad D_0',$$

$$|f - R_0 - R_1| \; < \; \frac{\varepsilon_1}{4}, \quad \text{in} \quad X \cap (D_1'' \setminus D_0'').$$

Then we have for $z \in X \cap D_0''$:

$$|f - R_0 - R_1| \leq |f - R_0| + |r_0(f - R_0 - Q_1)| + |r_0(f - R_0)| \; < \; \frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_1}{4} + \frac{\varepsilon_0}{4}$$

$$< \; \varepsilon_0.$$

Suppose that for some $n \geq 1$ the functions $R_0, R_1, \ldots, R_n$ have been chosen in such a way that

$$
\begin{aligned}
i)\ |R_k| &< \frac{1}{2^k}, \text{ in } D'_{k-1}, \\
& \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots, n, \\
ii)\ |f - R_0 - \cdots - R_n| &< \varepsilon_k, \text{ in } X \cap (D''_k \setminus D''_{k-1}), \qquad (3.1) \\
(D''_{-1} &= \emptyset) \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1, \\
iii)\ |f - R_0 - \cdots - R_n| &< \frac{\varepsilon_n}{4}, \text{ in } X \cap (D''_n \setminus D''_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Again by Remark 1) there exists a holomorphic function Q_{n+1} such that

$$|f - R_0 - \cdots - R_n - Q_{n+1}| < \frac{\varepsilon_{n+1}}{4}, \text{ in } X \cap D''_{n+1}. \qquad (3.2)$$

Taking the number $\varepsilon > 0$ small enough we can assure that the function $R_{n+1} = r_n Q_{n+1}$, where r_n is the function constructed according to the Remark 3) for the sets $D'_n, \mathcal{E}_n, D''_n$, satisfies the following inequalities:

$$
\begin{aligned}
|R_{n+1}| &< \frac{1}{2^{n+1}}, \text{ in } D'_n, \\
|f - R_0 - \cdots - R_n - R_{n+1}| &< \varepsilon_k, \quad \text{in } X \cap (D''_k \setminus D''_{k-1}), \\
& \qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, n-1, \\
|f - R_0 - \cdots - R_n - R_{n+1}| &< \frac{\varepsilon_{n+1}}{4}, \text{ in } X \cap (D''_{n+1} \setminus D''_n).
\end{aligned}
$$

Then we have in $X \cap (D''_n \setminus D''_{n-1})$ from (3.1,iii) and (3.2):

$$
\begin{aligned}
|f - R_0 - \cdots - R_{n+1}| &< \frac{\varepsilon_n}{4} + \frac{\varepsilon_{n+1}}{4} + \frac{\varepsilon_n}{4} \\
&< \varepsilon_n.
\end{aligned}
$$

Continuing this process we will find a sequence of holomorphic functions $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$, satisfying (3.1,i), (3.1,ii) for all $k = 0, 1, \ldots$. We then see from (3.1,i) for all $k \geq 0$ that $\sum_{n=0}^{\infty} R_n$ converges uniformly on each compact subset of D. Thus $g = \sum_{n=0}^{\infty} R_n$ is holomorphic in D, and, passing to the limit in (3.1,ii) as $n \to \infty$ for a fixed k, such that the arbitrarily selected point $z \in X$ is in $(D_k'' \setminus D_{k-1}'') \cap X$, we will have

$$|f - g| < \varepsilon \text{ on } X.$$

3.3 Case of bounded interior

In this section we give a different proof of the sufficiency in Theorem 3.2, for the special case where $\text{int}X_j$ are bounded. We remark that Kasten and Schmieder [16] had already shown that $X = X_1 \times X_2$ is a set of *uniform* approximation in $\mathbf{C}^2$ if X_1 is a bounded set of uniform approximation (a Mergelyan set) in $\mathbf{C}$ and X_2 is a set of uniform approximation in $\mathbf{C}$ with $\text{int}X_2 = \phi$.

Lemma 3.4 [2] *For each $j = 1, 2$, there exist compact sets $\Delta_j^1 \subset \Delta_j^2 \subset \ldots$ such that*

a) $\Omega_j = \cup_{k=1}^{\infty} int(\Delta_j^k)$;

b) Δ_j^k *has no holes, for* $k = 1, 2, \ldots$;

c) $\Delta_j^k \cup X_j$ *has no holes, for* $k = 1, 2, \ldots$.

The following lemma is an adaptation of a technique due to Hakim and Sibony [14]..

Lemma 3.5 *For $j = 1, 2$, let Ω_j be a Riemann surface, and let Δ_j and K_j be compact subsets of Ω_j, where K_j has no interior. Suppose $\Delta_j \cup K_j$ has no holes relative to Ω_j. Set $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$, $K = K_1 \times K_2$, and $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Then, each function continuous on $\Delta \cup K$ and holomorphic on Δ is the uniform limit of functions holomorphic on Ω.*

Proof. Let μ be a measure on $\Delta \cup K$ such that $\mu \perp H(\Omega)$. It is sufficient, by the Hahn-Banach theorem, to show that $\mu \perp C(\Delta \cup K) \cap H(\Delta)$ and in order to show this it is sufficient to show that $\operatorname{supp} \mu \subset \Delta$. Indeed, if $\operatorname{supp} \mu \subset \Delta$ and $f \in C(\Delta \cup K) \cap H(\Delta)$, then, since each Δ_j is hole-free, according to Lemmas 3.2 and 3.4 there exists a sequence of functions $g_k \in H(\Omega)$ such that:

$$\int f d\mu = \int_\Delta f d\mu = \int (\lim_{k\to\infty} g_k) d\mu = 0.$$

Let $\varphi \in C(\Delta \cap K)$, with $(\operatorname{supp} \varphi) \cup \Delta = \emptyset$. We show that $\varphi\mu$ is the zero measure. For $j = 1, 2$, let d_j be a metric on Ω_j and for $p \in \Delta \cup K$, set $\theta_j(p) = d_j(p_j, \Delta_j)$. Define h as $\varphi / \sum \theta_j$ on $\operatorname{supp} \varphi$ and as zero elsewhere. Then h is continuous, with the same support as φ and $\varphi = \sum h\theta_j$. It is sufficient to show that $\theta_j \mu = 0$, for each j. For each j, $\theta_j \in A(\Delta_j \cup K_j)$ and, by Lemma 3.1, can be approximated uniformly by functions in $H(\Omega)$. Thus, θ_j can be approximated uniformly on $\Delta \cup K$ by functions in $H(\Omega)$, and hence $\theta_j \mu \perp H(\Omega)$. Since $\operatorname{supp}(\theta_j \mu) \subset K$, it follows from Lemma 3.2 that each function continuous on $\operatorname{supp}(\theta_j \mu)$ can be approximated uniformly by functions in $H(\Omega)$. Since, on the other hand, $\theta_j \mu \perp H(\Omega)$, it follows that $\theta_j \mu \equiv 0$. This concludes the proof of the lemma.

We now give an alternate proof of the sufficiency in Theorem 3.2, when $\operatorname{int} X_j$ are bounded. To prove the sufficiency, let $\Delta_j^k, k = 1, 2, \ldots$ be the exhaustion of Ω_j given by Lemma 3.4. Let $\epsilon^{(k)}$ be an arbitrary sequence of positive numbers. Using Lemmas 3.2 and 3.5 in a standard way, we can inductively construct a sequence of functions $g^{(k)} \in H(\Omega)$ such that, setting $\Delta^0 = \emptyset$ and $\epsilon^{(0)} = 0$, we have, for $k = 1, 2, \ldots$,

$$|g^{(k)}| < \epsilon^{(k)}, \qquad \text{on } \Delta^{k-1}; \tag{3.3}$$

$$|f - g^{(1)} - \ldots - g^{(k)}| < \epsilon^{(k)}, \qquad \text{on } X \cap (\Delta^{k+1} \setminus \Delta^k); \tag{3.4}$$

$$|f - g^{(1)} - \ldots - g^{(k)}| < 2\epsilon^{(k-1)} + \epsilon^{(k)}, \text{ on } X \cap (\Delta^k \setminus \Delta^{k-1}). \tag{3.5}$$

Indeed, set $X_j^k = X_j \cap \Delta_j^k, X^k = X_1^k \times X_2^k$, and suppose that $\overline{X_1^0} \times \overline{X_2^0} \subset X^2$. There exists $g^{(1)} \in H(\Omega)$ such that $|f - g^{(1)}| < \epsilon^{(1)}$ on X^2 (Lemma 3.2). Let $h^{(2)}$

be a function continuous on $\Delta^1 \cup X^3$, bounded by $\epsilon^{(1)}$, zero in a neighborhood of Δ^1, and equal to $f - g^{(1)}$ on $X^3 \setminus \Delta^2$. We may assume that the interior of X_j is contained in Δ^1 and so by Lemma 3.5, there exists a function $g^{(2)} \in H(\Omega)$ such that $|h^{(2)} - g^{(2)}| < \epsilon^{(2)}$ on $\Delta^1 \cup X^3$. Then (3.3), (3.4), and (3.5) are satisfied for $k = 1$.

Suppose now that (3.3), (3.4), and (3.5) have been already established for $k = 1, \ldots, m-1$. We establish (1), (2), and (3) for $k = m$. Let $h^{(m)}$ be a function continuous on $\Delta^{m-1} \cup X^{m+1}$, bounded by $\epsilon^{(m-1)}$, vanishing on a neighborhood of Δ^{m-1}, and equal to $f - g^{(1)} - \ldots g^{(m-1)}$ on $X^{m+1} \setminus \Delta^m$. By Lemma 3.5, there is a $g^{(m)} \in H(\Omega)$ such that $|h^{(m)} - g^{(m)}| < \epsilon^{(m)}$ on $\Delta^{m-1} \cup X^{m+1}$. Then $g^{(m)}$ satisfies (1), (2), and (3) for $k = m$. By induction, then, we may construct a sequence $g^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, satisfying (1), (2), and (3).

We may choose $\epsilon^{(k)}$ such that $\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^{(k)} < \infty$. Thus, by (1), $g = \sum_{k=1}^{\infty} g^{(k)}$ is in $H(\Omega)$. Now fix f and ϵ in $C(X)$ with $\epsilon > 0$. If the $\epsilon^{(k)}$ are chosen to decrease sufficiently rapidly, it follows from (2) and (3) that on X $|f - g| < \varepsilon$. This completes the proof of the theorem.

Bibliographie

[1] H. Alexander, A Carleman theorem for curves in $\mathbf{C}^n$. Math. Scand. 45 (1979), 70–76.

[2] T. Bagby, P.M. Gauthier, Approximation by harmonic functions on closed subsets of Riemann surfaces. J. d'Analyse Math. 51 (1988), 259-284.

[3] E. Bishop, Subalgebras of functions on Riemann surfaces. Pacific J. Math. 8 (1958), 29-50.

[4] A. Boivin, Carleman approximation on Riemann surfaces. Math. Annalen. 275 (1986), 57-70 .

[5] A. Boivin, T-invariant algebras on Riemann surfaces. Mathematika. 34 (1987), 160-171.

[6] A. Boivin, T-invariant algebras on Riemann surfaces II. Rocky Mountain J. 19 (1989), 83-92.

[7] L. Eifler, The slice product of function algebras. Proc. A.M.S. 23 (1969), 559–564.

[8] E. Frih and P.M. Gauthier, Global holomorphic approximation on the product of curves in $\mathbf{C}^n$. Canad. Math. Bull. 34 (1991), 220–223.

[9] T.W. Gamelin, Uniform Algebras; Prentice-Hall, Engl. Cliffs. N. J (1969).

[10] T.W. Gamelin, Rational Approximation Theory. UCLA Course Notes, Math 285G, Fall, 1975.

[11] T. W. Gamelin, J. Garnett, Constructive techniques in rational approximation. Trans. Amer. Math. Soc. 143 (1969), 187–200.

[12] P.M. Gauthier and W. Hengartner, Uniform approximation on closed sets by functions analytic on a Riemann surface. Approximation theory (Z. Ciesielski and J. Musielak, eds.), Reidel Publ. Holland (1975), 63-70.

[13] A. Grothendieck, Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955). Amer. Math. Soc, Providence, (1966).

[14] M. Hakim, N. Sibony, Boundary properties of holomorphic functions in the ball in $\mathbf{C}^n$. Math. Ann. 276 (1987), 549-555.

[15] L. Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables; Van Nostrand, Princeton, 1966.

[16] V. Kasten and G. Schmieder, Zur approximation auf dunnen Mergen in $\mathbf{C}^2$. Math. Z. 178 (1981), 735-379.

[17] S.N. Mergelyan, Uniform approximation of functions of a complex variables. Uspekhi Mat. Nauk 7(1952). 2(48). 31-122; English transl. in Amer. Math. Soc. Transl. (1) 3 (1962).

[18] A. H. Nersessian, On Carleman sets. Izv. Akad. Nauk Armyan. SSR Ser. Mat. 6 (1971), 465-471; English transl. in Amer. Math. Soc. Transl. (2) 122(1984), 99-104.

[19] S. Scheinberg, Uniform approximation by entire functions. J. d'Analyse Math. 29 (1976), 16–19.

[20] S. Scheinberg, Uniform approximation by functions analytic on a Riemann surface. Ann. Math. 108 (1978), 257-298.

[21] B. Weinstock, Approximation by holomorphic functions on certain product sets in $\mathbf{C}^n$. Pacific J. Math. 43 (1972), 811-824.

CONCLUSION

Après le depôt de cette thèse, E. Bedford et E.A. Poletsky nous ont signalé que le théorème 2.3 du chapitre 2 a été publié récemment dans Indiana University Journal of Mathematics par S. Kolodzej sous une forme plus générale que la nôtre. Précisement, si μ est une mesure positive et $\phi \in \mathcal{C}(\Omega)$ où Ω est un domaine strictement pseudo-convexe dans $\mathbf{C}^n$, si de plus il existe une fonction $u \in P(\Omega)$ telle que

$$(dd^c u)^n = \mu$$

et

$$\limsup u = \phi, \text{ sur } \partial\Omega,$$

alors il existe une solution du problème de Dirichlet pour l'opérateur de Monge-Ampère complexe, pour la mesure μ et la donnée frontière ϕ.

Soient Ω ouvert fin dans un espace $\mathcal{B}$-harmonique au sens de Bauer ou de Constantinescu et Cornea, à base dénombrable, u une fonction finement hypoharmonique dans Ω et v une fonction finement surharmonique localement bornée dans Ω, telle que $u \leq v$, dans Ω. Existe-t-il une fonction h finement harmonique dans Ω, telle que $u \leq h \leq v$, dans Ω. Ceci, généralisera le lemme 1.2, page 21. Cette propriété, une fois prouvée, donnera une réponse à la question posée par B. Fuglede, à savoir si on peut définir un potentiel fin comme étant une fonction finement surharmonique positive dont la plus grande minorante finement harmonique est nulle.

En ce qui concerne le chapitre 2, nous avons deux questions.

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la mesure de Monge-Ampère d'une fonction $u \in P(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ soit de la forme $(dd^c u)^n = f dV$, où f est une fonction mesurable positive dans Ω?

Dans le chapitre 3, nous avons étudié l'approximation de Carleman sur les produits de C. Soit $X = X_1 \times \ldots \times X_k$, où X_j est un ensemble de Carleman dans $\mathbf{C}^{n_j}$. Est ce que X est un ensemble de Carleman dans $\mathbf{C}^n$, où $n = n_1 + \ldots + n_k$?

Il ya aussi le problème à savoir si le produit d'ensembles d'approximation uniforme est un ensemble d'approximation uniforme.