

Université de Montréal

MESURES D'ASSOCIATION VECTORIELLE BASÉES  
SUR DES MATRICES DE CORRÉLATION

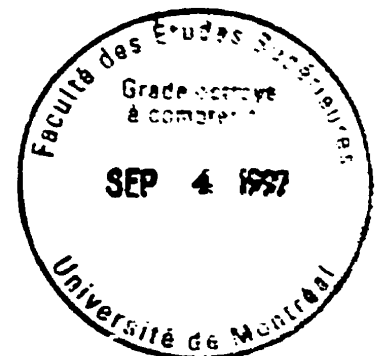
par

Hamani EL MAACHE

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de Doctorat ès Sciences (Ph.D.)  
en statistique

Mai 1997





National Library  
of Canada

Acquisitions and  
Bibliographic Services

395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

Bibliothèque nationale  
du Canada

Acquisitions et  
services bibliographiques

395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-32622-5

**Canada**

Université de Montréal  
Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

MESURES D'ASSOCIATION VECTORIELLE BASÉES  
SUR DES MATRICES DE CORRÉLATION

présentée par

Hamani EL MAACHE

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

*Robert CLÉROUX*

---

(président-rapporteur)

*Yves LEPAGE*

---

(directeur de recherche)

*Jean-François ANGERS*

---

(membre du jury)

*Yves ESCOUFIER*

---

(examineur externe)

Thèse acceptée le :

*29 juillet 1997*

---

## SOMMAIRE

---

Cette thèse traite de la structure de liaison entre deux ou plusieurs vecteurs aléatoires. En se basant sur un concept original de matrices de  $U$ -statistiques inspiré d'Hoeffding (1948), la loi asymptotique de différentes matrices d'association est déterminée. Ce résultat est appliqué aux matrices de corrélation de Pearson, de Spearman et de Kendall puis, les mesures d'association vectorielle d'Escoufier (1973), Stewart & Love (1968) et Cramer & Nicewander (1979) sont définies à partir de ces matrices. L'avantage principal de cette méthode est que les mesures sont invariantes au changement de position et d'échelle des vecteurs d'observations. Les lois des différentes mesures d'association sont déterminées et des tests asymptotiques d'indépendance entre deux ou plusieurs vecteurs sont construits. Une comparaison expérimentale de ces tests asymptotiques avec ceux construits à partir de la matrice de covariance est effectuée pour étudier le comportement du niveau et de la puissance.

## REMERCIEMENTS

---

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont soutenu durant toute la période qu'a nécessité la préparation de cette thèse. En particulier, mon directeur, le Professeur Yves Lepage mérite mes remerciements, non seulement pour m'avoir accepté comme étudiant et m'avoir guidé, mais aussi pour son support et son encouragement durant la scolarité et la rédaction de cette thèse de doctorat.

La pensée ne doit jamais se soumettre,  
ni à un dogme, ni à un parti, ni à une passion,  
ni à un intérêt, ni à une idée préconçue,  
ni à quoi que ce soit, si ce n'est aux faits eux-mêmes,  
parce que, pour elle, se soumettre, ce serait cesser d'être.

H. Poincaré - 1909

# TABLE DES MATIÈRES

---

SOMMAIRE	iii
REMERCIEMENTS	iv
LISTE DES TABLEAUX	viii
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1. Notions préliminaires	4
1.1. PRODUIT DE KRONECKER	4
1.2. RÉSULTATS SUR LES DISTRIBUTIONS ELLIPTIQUES	8
1.3. MATRICE DE U-STATISTIQUES	11
1.3.1. Applications	14
1.4. MESURES D'ASSOCIATION VECTORIELLE	20
CHAPITRE 2. Mesures d'association vectorielle construites à partir de la matrice de corrélation	23
2.1. DISTRIBUTION ASYMPTOTIQUE DE $n^{1/2}vecR_n$	26
2.2. DISTRIBUTIONS ASYMPTOTIQUES DE $n^{1/2}vecR_{21}$	30

2.3. DISTRIBUTIONS ASYMPTOTIQUES DES MESURES	36
2.3.1. Sous $H_0$	36
2.3.2. Sous $H_{1:n}$	40
2.4. TESTS ET APPLICATIONS	43
2.4.1. Algorithme de calcul	44
2.4.2. Un exemple	45
2.5. ETUDE EXPÉRIMENTALE	47
2.6. TESTS D'ABSENCE DE LIAISON ENTRE PLUSIEURS VECTEURS	52
2.6.1. Distributions asymptotiques des mesures	53
2.6.2. Tests asymptotiques pour $H_0^{(G)}$	60
2.6.3. Tests de non corrélation totale	61
2.6.4. Un exemple	63
<b>CHAPITRE 3. Lois asymptotiques de différentes matrices de corrélation</b>	<b>65</b>
3.1. RAPPEL	65
3.1.1. Le coefficient $\tau$ de Kendall	66
3.1.2. Le coefficient $\rho$ de Spearman	68
3.2. LE CAS MULTIVARIÉ	70
3.2.1. Matrice de Kendall	70
3.2.2. Matrice de Spearman	71

3.3. DISTRIBUTIONS ASYMPTOTIQUES	75
3.3.1. Sous $H_0^*$	76
3.3.2. Sous $H_{1:n}^*$	79
3.4. CAS DE G SOUS-VECTEURS	87
3.4.1. Sous $H_{1:n}^{*(G)}$	92
<b>CHAPITRE 4. Tests asymptotiques d'indépendance</b>	<b>98</b>
4.1. TESTS D'INDÉPENDANCE ENTRE DEUX VECTEURS	99
4.1.1. Distributions asymptotiques de $RV^{(h)}$ , $SL^{(h)}$ et $CN^{(h)}$ sous $H_0^*$	102
4.1.2. Distributions asymptotiques de $RV^{(h)}$ , $SL^{(h)}$ et $CN^{(h)}$ sous $H_{1:n}^*$	107
4.1.3. Tests d'indépendance entre deux vecteurs aléatoires	111
4.1.4. Application des tests	112
4.2. ETUDE EXPÉRIMENTALE	115
4.3. TESTS D'INDÉPENDANCE ENTRE PLUSIEURS VECTEURS	129
4.3.1. Tests asymptotiques pour $H_0^{*(G)}$	133
4.3.2. Test d'indépendance totale	135
<b>APPENDICE A.</b>	<b>139</b>
A.1. FORMES QUADRATIQUES DE VARIABLES MULTINORMALES	139
<b>RÉFÉRENCES</b>	<b>142</b>



## LISTE DES TABLEAUX

---

2.1	Tests d'absence de liaison basés sur la matrice de corrélation, points critiques et niveaux critiques.	46
2.2	Tests d'absence de liaison basés sur la matrice covariance, points critiques et niveaux critiques.	47
2.3	Puissance expérimentale ( $\times 10000$ ) des tests au niveau 5% pour des distributions multivariées de structure de covariance donnée avec $p = 2$ et $q = 2$ .	50
2.4	suite du tableau 2.3	51
2.5	Niveau expérimental ( $\times 10000$ ) des tests au niveau nominal 5% pour $n=1000$ et différentes distributions.	52
2.6	Tests d'absence de liaison pour l'ensemble des records nationaux masculins de 55 pays pour 3 sous-ensembles de courses et leur niveau critique.	64
4.1	Tests d'indépendance globale entre les performances nationales féminines et masculines, points critiques au niveau nominal 5% et niveaux critiques.	114
4.2	Tests d'indépendance entre les performances nationales féminines et masculines pour les courses de sprint, points critiques au niveau nominal 5% et niveaux critiques.	114

4.3	Tests d'indépendance entre les performances nationales féminines et masculines pour les courses de demi-fond, points critiques au niveau nominal 5% et niveaux critiques.	115
4.4	Puissance expérimentale (x10000) des tests basées sur les matrices de covariance, de corrélation, de Spearman et de Kendall au niveau nominal 1% pour des distributions multivariées données avec $p = 2$ et $q = 3$ .	119
4.5	suite du tableau 4.4	120
4.6	suite du tableau 4.4	121
4.7	suite du tableau 4.4	122
4.8	Puissance expérimentale (x10000) des tests basés sur les matrices de Spearman et de Kendall au niveau nominal 1% pour une distribution multivariée de Cauchy donnée avec $p = 2$ et $q = 3$ .	123

*Je dédie cette thèse de doctorat  
à ma mère Rkia,  
à ma femme Saaida,  
à ma fille Houda  
et à mon fils Amine.*

# INTRODUCTION

---

L'objectif du présent travail est l'étude de la structure de liaison entre deux ou plusieurs vecteurs aléatoires. Plus particulièrement, on désire éprouver l'hypothèse d'absence de liaison entre deux ou plusieurs vecteurs aléatoires.

Pour répondre à cet objectif, un concept original de matrices de  $U$ -statistiques inspiré des travaux d'Hoeffding (1948) est utilisé. Cet outil théorique permet de déduire dans un cadre général la loi asymptotique d'une matrice d'association. Cette approche permet aussi de donner une démonstration plus courte et plus facile lorsque tous les moments d'ordre 4 existent, du résultat de Cook (1951) concernant la loi asymptotique de la matrice de covariance échantillonnale (Théorème 1.3.2) de même que celui de Steiger & Hakstian (1982) concernant la loi asymptotique de la matrice de corrélation de Pearson (Théorème 1.3.3). Ce cadre théorique est présenté au chapitre 1 qui rappelle en plus certains résultats sur le produit de Kronecker, les distributions elliptiques et les mesures d'association vectorielle d'Escoufier (1973), Stewart & Love (1968) et Cramer & Nicewander (1979).

Au chapitre 2, ces trois mesures sont appliquées à la matrice de corrélation de Pearson afin de construire trois nouveaux tests asymptotiques pour éprouver l'absence de liaison entre deux vecteurs aléatoires provenant d'une distribution elliptique. La distribution asymptotique des mesures est obtenue sous l'hypothèse nulle d'absence de liaison (Théorème 2.3.1) et sous une suite d'alternatives convergeant vers l'hypothèse nulle (Théorème 2.3.2). Ces résultats originaux reposent sur la connaissance explicite de la matrice de covariance de la loi asymptotique de la matrice de corrélation d'un

échantillon provenant d'une distribution elliptique (Théorèmes 2.1.1 et 2.2.1). Un exemple illustre les tests et une étude expérimentale permet de comparer les niveaux et les puissances des trois tests basés sur la matrice de corrélation de Pearson à ceux construits à partir de la matrice de covariance. Enfin, les trois nouveaux tests sont généralisés selon l'approche d'Allaire & Lepage (1990) pour vérifier l'absence de liaison entre plusieurs vecteurs aléatoires provenant d'une distribution elliptique. Ces tests reposent sur la loi asymptotique conjointe des mesures sous l'hypothèse nulle d'absence de liaison entre les vecteurs et sous une suite d'alternatives convergeant vers l'hypothèse nulle (Théorème 2.6.2). De plus, un test de non corrélation totale est obtenu (Corollaire 2.6.1) et les tests sont appliqués à un exemple.

Cléroux, Lazraq & Lepage (1995) et Lazraq, Lepage & Cléroux (1995) ont développé des tests non paramétriques pour tester l'indépendance entre deux et plusieurs vecteurs aléatoires d'une distribution arbitraire en appliquant les mesures d'Escoufier (1973) et Stewart & Love (1968) à la matrice de covariance des rangs obtenue en utilisant la transformation des rangs de Conover & Iman (1980, 1981) à la matrice de covariance. Cette matrice correspond à la matrice des coefficients de corrélation des rangs entre les paires de variables formant le vecteur. La loi asymptotique des mesures est obtenue en appliquant des résultats de Puri, Sen & Gokhale(1970) concernant la loi asymptotique d'une matrice d'association formée de grades fonctionnelles. Toutefois, l'approche de Puri, Sen & Gokhale(1970) qui permet une généralisation multivariée du coefficient de corrélation des rangs ne tient que pour des matrices d'association dont les éléments s'expriment comme le coefficient de corrélation entre deux fonctions qui dépendent uniquement des fonctions de distributions marginales. Ainsi, pour généraliser le coefficient  $\tau$  de Kendall au cas multivarié cette approche ne peut être utilisée.

Dans le chapitre 3, la définition et quelques propriétés des coefficients de corrélation de Spearman et de Kendall sont rappelées avant de construire les matrices de Spearman et de Kendall dont les éléments correspondent aux coefficients de corrélation respectifs entre les paires de variables formant le vecteur. En utilisant l'approche des matrices de U-statistiques du chapitre 1, la loi asymptotique des matrices de Kendall (Théorème 3.2.1) et de Spearman (Théorème 3.2.2) est obtenue. Comme la matrice

de covariance des rangs utilisée par Cléroux, Lazraq & Lepage (1995) n'est pas une matrice de U-statistiques mais qu'elle est asymptotiquement équivalente à la matrice de Spearman, tous les résultats de ces derniers peuvent être plus facilement déduits de la présente approche. Sans le présupposé d'ellipticité de la distribution, les lois asymptotiques des matrices de Kendall, de Spearman, de covariance et de corrélation sont obtenues sous l'hypothèse nulle d'indépendance entre les deux vecteurs aléatoires (Théorème 3.3.1) et sous une suite d'alternatives convergeant vers l'hypothèse nulle (Théorème 3.3.2). De plus, ces résultats sont généralisés au cas de plusieurs vecteurs aléatoires (Théorèmes 3.4.1 et 3.4.2).

Les tests asymptotiques d'indépendance entre deux vecteurs aléatoires obtenus en appliquant les mesures d'Escoufier (1973), Stewart & Love (1968) et Cramer & Nicewander (1979) aux matrices de Kendall, de Spearman, de covariance et de corrélation sont étudiés dans le chapitre 4. Sans le présupposé d'ellipticité de la distribution, la distribution asymptotique des mesures est obtenue sous l'hypothèse nulle d'indépendance (Théorème 4.1.1) et sous une suite d'alternatives convergeant vers l'hypothèse nulle (Théorème 4.1.2). Ces tests asymptotiques sont appliqués à un exemple et une étude expérimentale permet d'analyser le comportement des tests quant à leur niveau et leur puissance. Les tests sont aussi généralisés au cas de l'indépendance entre plusieurs vecteurs aléatoires à l'aide de la distribution asymptotique conjointe de plusieurs mesures (Théorème 4.3.1).

# CHAPITRE 1

---

## Notions préliminaires

Ce chapitre est essentiellement consacré à des brefs rappels de notions dont nous aurons besoin pour le développement de cette thèse. On n'y trouve pas de résultats originaux sinon quelques démonstrations nouvelles plus simples à des résultats connus comme les théorèmes 1.3.2 et 1.3.3. Dans la première section traitant du produit de Kronecker, on trouve le lemme 1.1.1 qui est probablement connu mais dont on n'a pas trouvé une démonstration complète dans la littérature. Dans la section 2, nous décrivons brièvement la classe des distributions elliptiques. Dans la troisième, nous rappelons l'essentiel de la théorie des  $U$ -statistiques que nous avons adaptée à notre problématique en introduisant un double indice pour construire ce que nous appellerons des matrices de  $U$ -statistiques. Cette section est la charpente de la thèse. La dernière est réservée à la présentation de mesures qui serviront à construire des tests d'absence de liaison entre deux ou plusieurs vecteurs aléatoires.

### 1.1. PRODUIT DE KRONECKER

Soient  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  deux matrices de dimensions respectives  $p \times q$  et  $s \times t$ . Rappelons que le produit de Kronecker  $A \otimes B$  est une matrice de dimension  $ps \times qt$  définie par

$$A \otimes B = (a_{ij}B).$$

On peut trouver dans Magnus & Neudecker (1979), les démonstrations des quelques propriétés et résultats que nous énonçons dans ce qui suit.

- PROPRIÉTÉ 1.1.1. (i)  $(A \otimes B)' = A' \otimes B'$  et  $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ .
- (ii)  $(A_1 \otimes B_1) \dots (A_k \otimes B_k) = (A_1 \dots A_k \otimes B_1 \dots B_k)$ .
- (iii)  $\text{vec}(ABC) = (C' \otimes A) \text{vec} B$  et  $(\text{vec} A)' \text{vec} B = \text{tr} AB$  où  $\text{tr}(\cdot)$  désigne l'opérateur trace et  $\text{vec} A$  représente le vecteur  $pq \times 1$  formé en empilant les colonnes de la matrice  $A$  de dimension  $p \times q$ .
- (iv)  $x \otimes y = \text{vec}(yx')$  et  $x \otimes y' = xy' = y' \otimes x$  où  $x$  et  $y$  sont des vecteurs de dimensions respectives  $r \times 1$  et  $s \times 1$ .
- (v) Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices de dimensions respectives  $p \times p$  et  $q \times q$  avec  $\lambda_i$  et  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , comme valeurs et vecteurs propres de  $A$ ,  $\mu_j$  et  $b_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ , comme valeurs et vecteurs propres de  $B$ , alors  $\lambda_i \mu_j$  et  $a_i \otimes b_j$  sont les valeurs et vecteurs propres de  $A \otimes B$ ,  $i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ .
- (vi) Pour  $i = 1, \dots, m$ , posons  $e'_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , le vecteur de dimension  $m \times 1$  dont toutes les composantes sont nulles sauf la  $i^{\text{ième}}$  qui prend la valeur 1. Ces vecteurs forment la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ . Soit  $H_{ij} = e_i e'_j = e_i \otimes e'_j$ ,  $i$  et  $j = 1, \dots, m$ . Alors, les  $m^2$  matrices  $H_{ij}$  (ayant 1 à la position  $(i, j)$  et 0 ailleurs) constituent une base canonique pour les matrices de dimension  $m \times m$  c'est-à-dire que toute matrice  $A = (a_{ij})$  de dimension  $m \times m$  peut s'écrire sous la forme<sup>1</sup>
- $$A = \sum_{ij} a_{ij} H_{ij}.$$
- (vii)  $H_{ij} H_{jl} = H_{il}$ .
- (viii)  $\sum_i^m H_{ii} = I_m$  et  $I_m \otimes I_m = I_{m^2}$  où  $I_d$  est la matrice identité  $d \times d$ .
- (ix)  $K = \sum_{ij}^m H_{ij} \otimes H_{ji}$ , est dite la matrice de commutation  $m^2 \times m^2$ . Plus généralement, la matrice de commutation  $mn \times mn$  est définie par  $K_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n H_{ij} \otimes H_{ji}$  avec  $H_{ij} = a_i e'_j$  où le vecteur  $a_i$  de dimension  $n \times 1$  a toutes les composantes nulles sauf la  $i^{\text{ième}}$  qui prend la valeur 1 et on a

$$K_{mn} = K'_{nm}, \quad K_{mn} K'_{nm} = K'_{nm} K_{mn} = I_{mn} \quad \text{ou} \quad K_{mn}^{-1} = K_{nm}.$$

<sup>1</sup> Les sommations portant sur un ou plusieurs indices comme  $\sum_i^m$  ou  $\sum_{ij}^m$  signifient  $\sum_{i=1}^m$  ou  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m$ . Ces notations seront utilisées sauf dans les cas où une certaine ambiguïté est possible.



Par exemple si  $m = n = 2$ , on a

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une matrice de commutation possède plusieurs propriétés intéressantes.

PROPRIÉTÉ 1.1.2. Soient  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  deux matrices de dimensions respectives  $p \times q$  et  $s \times t$ . Alors, on a

- (i)  $K(e_i \otimes e_j) = (e_j \otimes e_i)$  et  $(e'_j \otimes e'_i)K = (e'_i \otimes e'_j)$ .
- (ii)  $K_{pq} \text{vec}(A) = \text{vec}(A')$ .
- (iii)  $K_{sp}(A \otimes B) = (B \otimes A)K_{tq}$ .

Définissons la matrice  $E = \sum_i^m (H_{ii} \otimes H_{ii})$ . Si  $m = 2$ , on a

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme toute matrice  $A = (a_{ij})$  de dimension  $m \times m$  peut s'écrire sous la forme

$$A = \sum_{ij}^m a_{ij} H_{ij} = \sum_{ij}^m a_{ij} (e_i e'_j) = \sum_{ij}^m (e'_i A e_j) H_{ij}, \quad (1.1.1)$$

le produit de Kronecker de deux matrices  $A = (a_{ij})$  et  $B = (b_{ij})$  de dimensions  $m \times m$  peut se décomposer en utilisant la base  $(H_{ik} \otimes H_{jl})_{i,j,k,l=1,\dots,m}$ . En effet, si on note par  $(A \otimes B)_{(ij,kl)}$  l'élément générique de  $(A \otimes B)$ , on a, en suivant la même écriture que

dans 1.1.1,

$$\begin{aligned}
A \otimes B &= \sum_{ijkl}^m (A \otimes B)_{(ij,kl)} (e_i \otimes e_j) (e_k \otimes e_l)' \\
&= \sum_{ijkl}^m (A \otimes B)_{(ij,kl)} (H_{ik} \otimes H_{jl}) \\
&= \sum_{ijkl}^m \left( (e_i \otimes e_j)' (A \otimes B) (e_k \otimes e_l) \right) (H_{ik} \otimes H_{jl}) \\
&= \sum_{ijkl}^m (e_i' A e_k) (e_j' B e_l) (H_{ik} \otimes H_{jl}) \\
&= \sum_{ijkl}^m (a_{ik} b_{jl}) (H_{ik} \otimes H_{jl}) \tag{1.1.2}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que  $a_{ik} b_{jl}$  est l'élément générique de la matrice  $A \otimes B$ .

Les résultats du lemme suivant nous seront utiles dans le chapitre 2. Ils ne se trouvent pas, à notre connaissance, dans la littérature et c'est pourquoi nous en donnons une démonstration.

LEMME 1.1.1. *Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices symétriques de dimensions  $m \times m$ , alors on a*

- (i)  $K(\text{vec}A)(\text{vec}B)' = (\text{vec}A)(\text{vec}B)'K = (\text{vec}A)(\text{vec}B)'$ .
- (ii)  $(\text{vec}A)(\text{vec}B)' = \sum_{jk}^m (AH_{jk} \otimes H_{jk}B)$ .
- (iii)  $(\text{vec}A)(\text{vec}A)' = \sum_{jk}^m (AH_{jk} \otimes H_{jk}A) = \sum_{jk}^m (H_{jk}A \otimes AH_{jk})$ .
- (iv)  $(\text{vec}I_m)(\text{vec}I_m)' = \sum_{jk}^m (H_{jk} \otimes H_{jk})$ .
- (v)  $KE = EK = E$ .

**Démonstration:**

- (i) Le résultat est évident puisque  $K\text{vec}A = \text{vec}A$  et  $K' = K$ .
- (ii) Soit  $C = (\text{vec}A)(\text{vec}B)'$ . Il est évident que l'élément générique de  $C$  est  $a_{ij} b_{kl}$ .  
Décomposons alors la matrice  $C$  sur la base  $(H_{ik} \otimes H_{jl})$  où

$$H_{ik} \otimes H_{jl} = (e_i e_k') \otimes (e_j e_l') = (e_i \otimes e_j) (e_k \otimes e_l)', \quad i, j, k, l = 1, \dots, m.$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned}
 C &= \sum_{ijkl}^m (e_i \otimes e_j) [(e'_i A e_j) (e'_k B e_l)] (e_k \otimes e_l)' \\
 &= \sum_{ijkl}^m (e_i \otimes e_j) [(e'_i \otimes e'_k) (A \otimes B) (e_j \otimes e_l)] (e'_k \otimes e'_i) \\
 &= \sum_{ijkl}^m (H_{ii} \otimes H_{jk}) (A \otimes B) (H_{jk} \otimes H_{ll}) \\
 &= \sum_{jk}^m (I \otimes H_{jk}) (A \otimes B) (H_{jk} \otimes I) \\
 &= \sum_{jk}^m (A H_{jk} \otimes H_{jk} B).
 \end{aligned}$$

(iii) Si  $A = B$ , alors  $C$  est symétrique et on a

$$C = C' = \sum_{jk}^m (A H_{jk} \otimes H_{jk} A) = \sum_{jk}^m (H_{jk} A \otimes A H_{jk}).$$

(iv) Dans (iii), on remplace  $A$  par  $I_m$  et on trouve le résultat

$$(\text{vec} I_m)(\text{vec} I_m)' = \sum_{jk}^m (H_{jk} \otimes H_{jk}).$$

(v) Montrons que  $KE = EK = E$ . On a

$$\begin{aligned}
 KE &= \left[ \sum_{ij}^m (H_{ij} \otimes H_{ji}) \right] \left[ \sum_t^m (H_{tt} \otimes H_{tt}) \right] = \sum_{ijt}^m (H_{ij} H_{tt} \otimes H_{ji} H_{tt}) \\
 &= \sum_t^m (H_{tt} \otimes H_{tt}) = E.
 \end{aligned}$$

De même, on a  $EK = E$ .

C.Q.F.D.

## 1.2. RÉSULTATS SUR LES DISTRIBUTIONS ELLIPTIQUES

La distribution multinormale a longtemps servi de modèle type pour des hypothèses faites sur les mesures statistiques. Une classe plus flexible de distributions, incluant les distributions multinormales, est la classe des distributions elliptiques.

Un vecteur  $X$  de dimension  $m \times 1$  suit une loi elliptique de paramètres  $\mu : m \times 1$

et  $V : m \times m$ , notée  $E_m(\mu, V)$ , si sa fonction de densité s'écrit sous la forme

$$|V|^{-1/2} f\left((x - \mu)'V^{-1}(x - \mu)\right), x \in \mathbb{R}^m,$$

où  $|V|$  est le déterminant de la matrice  $V$  définie positive et  $f$  est une fonction positive donnée qui ne dépend que de la quantité  $d^2 = (x - \mu)'V^{-1}(x - \mu)$ . De plus, sa fonction caractéristique  $\phi(t) = E(\exp(it'X))$  est de la forme  $\psi(t'Vt) \exp(it'\mu)$  où  $\psi$  est une certaine fonction, sa moyenne  $E(X) = \mu$  et sa matrice de covariance  $\Sigma = \alpha V$  où  $\alpha$  est une constante.

La distribution multinormale est elliptique. Le théorème suivant (voir Muirhead (1982), p.35) en donne une caractérisation.

**THÉORÈME 1.2.1.** *Supposons que  $X$  est  $E_m(\mu, V)$  avec  $V$  diagonale. Si toutes les composantes  $X^{(1)}, \dots, X^{(m)}$  de  $X$  sont indépendantes alors  $X$  est multinormale.*

Si  $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(m)})'$  est elliptique et admet tous les moments d'ordre 4, c'est-à-dire

$$\mu'_{ijkl} = E[X^{(i)}X^{(j)}X^{(k)}X^{(l)}] \quad \text{pour } i, j, k \text{ et } l = 1, \dots, m,$$

existent, alors toutes les distributions marginales de  $X^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , admettent le même coefficient d'aplatissement  $\kappa$  donné par

$$\gamma_2^{(i)} = 3 \frac{[\psi''(0) - \psi'(0)^2]}{\psi'(0)^2} = 3\kappa = \frac{E[(X^{(i)} - \mu^{(i)})^4]}{(E(X^{(i)} - \mu^{(i)})^2)^2} - 3, \quad i = 1, \dots, m.$$

Dans la suite, lorsqu'on parle de distribution elliptique avec coefficient d'aplatissement  $\kappa$ , il est implicite que tous les moments d'ordre 4 existent.

La famille de distributions elliptiques comprend entre autres la loi multinormale  $\epsilon$ -contaminée et la loi  $t$  (de Student) multivariée dont voici les définitions.

On dit que  $X$  suit une distribution multinormale  $\epsilon$ -contaminée si sa fonction de densité est

$$\frac{(1 - \epsilon)|V|^{-1/2}}{(2\pi)^{m/2}} \exp\left(\frac{-1}{2}(x - \mu)'V^{-1}(x - \mu)\right) + \frac{\epsilon|V|^{-1/2}}{(2\pi\sigma^2)^{m/2}} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}(x - \mu)'V^{-1}(x - \mu)\right)$$

pour  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $0 \leq \epsilon \leq 1$  et  $\sigma$  un réel. Son coefficient d'aplatissement  $\kappa$  est donné par

$$\kappa = \frac{1 + \epsilon(\sigma^4 - 1)}{[1 + \epsilon(\sigma^2 - 1)]^2} - 1$$

( voir Muirhead (1982), p.49) tandis que sa moyenne est  $\mu$  et sa matrice de covariance est

$$\Sigma = (1 - \epsilon + \epsilon\sigma^2)V.$$

D'autre part, on dit que  $X$  suit une distribution elliptique  $t$  avec  $\nu$  degrés de liberté si sa fonction de densité est de la forme

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu + m)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)(\nu\pi)^{m/2}} |V|^{-1/2} \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{\nu}(x - \mu)'V^{-1}(x - \mu)\right]^{(\nu+m)/2}}$$

pour  $x \in \mathbb{R}^m$ . On a  $E(X) = \mu$ ,  $\Sigma = \frac{\nu}{\nu-2}V$  et  $\kappa = \frac{2}{\nu-4}$ .

La distribution elliptique  $t$  avec un degré de liberté est appelée la distribution multivariée de Cauchy. Elle ne possède aucun moment.

Pour plus de détails concernant les distributions elliptiques on peut se référer, entre autres, à Muirhead(1982) ou à Fang, Kotz & Wang (1990).

Désignons par  $S_n$  la matrice de covariance échantillonnale construite à partir de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$  et dont les éléments sont donnés par

$$s_{ij} = \frac{1}{(n-1)} \sum_{h=1}^n (X_h^{(i)} - \bar{X}^{(i)})(X_h^{(j)} - \bar{X}^{(j)})$$

où  $\bar{X}^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n X_h^{(i)}$  pour  $i$  et  $j = 1, \dots, m$ . Le résultat suivant se trouve dans Muirhead(1982). On en donne aussi une démonstration à la page 16.

**THÉORÈME 1.2.2.** *Soit  $S_n$  la matrice de covariance d'un échantillon de taille  $n$  issu d'une distribution elliptique dont la matrice de covariance  $m \times m$  est  $\Sigma = (\sigma^{(i,j)})$  et le coefficient d'aplatissement est  $\kappa$ . Alors la distribution asymptotique, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , de  $\sqrt{n}(\text{vec}S_n - \text{vec}\Sigma)$  est une loi multinormale  $\mathcal{N}_{m^2}(O, W)$  où*

$$W = (1 + \kappa)(I_{m^2} + K)(\Sigma \otimes \Sigma) + \kappa[\text{vec}\Sigma][\text{vec}\Sigma]', \quad (1.2.1)$$

$I_{m^2}$  est la matrice identité  $m^2 \times m^2$  et  $K$  est la matrice de commutation de dimension  $m^2 \times m^2$ .

En posant  $\text{vec}U_n = \sqrt{n}(\text{vec}S_n - \text{vec}\Sigma) = (u_{ij})$ , le théorème précédent permet d'écrire que lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\text{Cov}(u_{ij}, u_{kl}) = (1 + \kappa)\left(\sigma^{(i,j)}\sigma^{(k,l)} + \sigma^{(i,k)}\sigma^{(j,l)} + \sigma^{(i,l)}\sigma^{(j,k)}\right) - \sigma^{(i,j)}\sigma^{(k,l)}. \quad (1.2.2)$$

### 1.3. MATRICE DE U-STATISTIQUES

Il existe une abondante littérature sur les U-statistiques. Pour le rappel ci-dessous, nous nous référons principalement à Hoeffding (1948) et à Randles & Wolfe (1979).

Considérons l'échantillon  $X_\alpha = (X_\alpha^{(1)}, \dots, X_\alpha^{(m)})'$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , issu du vecteur aléatoire de dimension  $m \times 1$ ,  $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(m)})'$ , dont la distribution  $F(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$  appartient à une famille de distributions continues  $\mathcal{F}$ . Rappelons d'abord quelques définitions.

Un paramètre  $\gamma$  est dit estimable de degré  $r$  pour la famille  $\mathcal{F}$  si  $r$  est la plus petite taille échantillonnale pour laquelle il existe une fonction  $\Phi(x_1, \dots, x_r)$  telle que  $E_F[\Phi(X_1, \dots, X_r)] = \gamma$  pour toute fonction de distribution  $F \in \mathcal{F}$ . La fonction  $\Phi$  est appelée un noyau pour le paramètre  $\gamma$  et elle ne dépend pas de  $F$ . On peut, sans nuire à la généralité, supposer le noyau symétrique en ses  $r$  arguments, c'est-à-dire  $\Phi(x_1, \dots, x_r) = \Phi(x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_r})$  pour toute permutation  $(\beta_1, \dots, \beta_r)$  des entiers  $1, \dots, r$ .

La statistique définie par

$$U_n = \frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{\beta \in B} \Phi(X_{\beta_1}, \dots, X_{\beta_r}) = U_n(X_1, \dots, X_n)$$

où  $B = \{\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r) \mid 1 \leq \beta_1 < \dots < \beta_r \leq n\}$  est dite une U-statistique de degré  $r$  pour le paramètre  $\gamma$ . On convient d'appeler une statistique constante une U-statistique de degré  $r = 0$ .

Soit  $U_n^* = U_n - E(U_n) = U_n(X_1, \dots, X_n) - \gamma$  et considérons la classe des sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées:

$$\mathcal{V} = \left\{ V \mid V = \sum_{i=1}^n k(X_i), k(\cdot) \text{ est une fonction réelle} \right\}.$$

La projection de  $U_n^*$  sur  $\mathcal{V}$  est donnée par

$$V^* = \sum_{i=1}^n E[U_n(X_1, \dots, X_n) - \gamma \mid X_i = x] = \sum_{i=1}^n E[U_n^* \mid X_i = x] = \frac{r}{n} \sum_{i=1}^n [\Phi_1(\cdot X_i) - \gamma]$$

où  $\Phi_1(x) = E[\Phi(x, X_2, \dots, X_r)]$ .

Voici quelques propriétés importantes des U-statistiques tirées de Randles & Wolfe (1979).

PROPOSITION 1.3.1. Soit  $U_n$  une U-statistique de degré  $r$  pour le paramètre  $\gamma$  avec noyau  $\Phi$ . Alors,

- (i)  $\Phi_1(x) = E[\Phi(x, X_2, \dots, X_r)] = E[\Phi(X_1, x, X_3, \dots, X_r)] = \dots = E[\Phi(X_1, \dots, X_{r-1}, x)]$ .
- (ii)  $E[\Phi_1(X_1)] = E[\Phi(X_{\beta_1}, \dots, X_{\beta_r})] = \gamma$  pour toute permutation  $(\beta_1, \dots, \beta_r)$  des entiers  $1, \dots, r$ .
- (iii)  $Var(\Phi_1(X_1)) = E[\Phi(X_1, \dots, X_r)\Phi(X_1, X_{r+1}, \dots, X_{2r-1})] - \gamma^2 = \zeta_1$ .
- (iv)  $\lim_{n \rightarrow \infty} [n Var(U_n(X_1, \dots, X_n))] = r^2 \zeta_1$ .
- (v)  $\sqrt{n}(U_n - \gamma)$  converge en loi, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers une loi normale de moyenne 0 et de variance  $r^2 \zeta_1$ , pourvu que  $\zeta_1 > 0$ .

La proposition suivante est une généralisation de la dernière propriété. C'est le théorème 7.1 d'Hoeffding (1948).

PROPOSITION 1.3.2. Pour  $k = 1, \dots, g$ , soit  $U_n^{(k)}$  une U-statistique de degré  $r^{(k)}$  pour le paramètre  $\gamma^{(k)}$  avec noyau  $\Phi^{(k)}$ . Si pour  $k = 1, \dots, g$ ,

$$\gamma^{(k)} = E[\Phi^{(k)}(X_1, \dots, X_{r^{(k)}})]$$

et

$$E[\Phi^{(k)}(X_1, \dots, X_{r^{(k)}})]^2$$

existent alors, le vecteur

$$\left( \sqrt{n}(U_n^{(1)} - \gamma^{(1)}), \dots, \sqrt{n}(U_n^{(g)} - \gamma^{(g)}) \right)'$$

converge en loi, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers une loi multinormale  $N_g(0, \Theta)$  où la matrice  $\Theta = (\theta_{ij}) = \left( r^{(i)} r^{(j)} \zeta_1^{(i,j)} \right)$  avec, pour  $i$  et  $j = 1, \dots, g$ ,

$$\zeta_1^{(i,j)} = E \left[ \Phi_1^{(i)}(X_1) \Phi_1^{(j)}(X_1) \right] - \gamma^{(i)} \gamma^{(j)},$$

où  $\Phi_1^{(i)}(x) = E \left( \Phi^{(i)}(x, X_2, \dots, X_{r^{(i)}}) \right)$ . La distribution limite est non dégénérée si le déterminant de la matrice  $\Theta$  est positif.

Pour traiter les mesures d'association vectorielle, nous devons considérer des  $\bar{U}$ -statistiques doublement indexées. Soit  $p$  et  $q$  deux entiers et considérons un ensemble de  $pq$   $\bar{U}$ -statistiques notées  $U_n^{(i,j)}$ ,  $i=1, \dots, p$  et  $j=1, \dots, q$ . On suppose que la  $\bar{U}$ -statistique  $U_n^{(i,j)}$ , construite à partir de l'échantillon  $X_1, \dots, X_n$ , est de degré  $r^{(i,j)}$  pour le paramètre  $\gamma^{(i,j)}$ . Formons trois matrices, de dimension  $p \times q$ , de la façon suivante:

$$U_n = \left( U_n^{(i,j)} \right) \quad , \quad R = \left( r^{(i,j)} \right) \quad \text{et} \quad \Gamma = \left( \gamma^{(i,j)} \right).$$

DÉFINITION 1.3.1. On appelle  $U_n$  une matrice de  $U$ -statistiques de matrice de degré  $R$  pour la matrice  $\Gamma$  de paramètres.

En écrivant les éléments de la matrice  $U_n$  sous forme vectorielle, on déduit directement de la proposition 1.3.2 la distribution asymptotique de la matrice  $U_n$ .

THÉORÈME 1.3.1. Soit  $U_n = (U_n^{(i,j)})$  une matrice de  $U$ -statistiques de matrice de degré  $R = (r^{(i,j)})$  pour la matrice de paramètres  $\Gamma = (\gamma^{(i,j)})$  avec  $i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ . Si le noyau  $\Phi^{(i,j)}$  pour le paramètre  $\gamma^{(i,j)}$  est tel que

$$E \left[ \Phi^{(i,j)}(X_1, \dots, X_{r^{(i,j)}}) \right] = \gamma^{(i,j)}$$

et

$$E \left[ \left( \Phi^{(i,j)}(X_1, \dots, X_{r^{(i,j)}}) \right)^2 \right] < \infty,$$

pour tout couple  $(i,j)$ , alors <sup>2</sup>

$$\sqrt{n} \text{vec}(U_n - \Gamma) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{pq}(0, \Omega)$$

<sup>2</sup>  $\xrightarrow{\mathcal{L}}$  désigne la convergence en loi lorsque  $n \rightarrow \infty$ .



où les éléments de  $\Omega$  sont donnés par

$$\begin{aligned} m^{(ij,kl)} &= r^{(i,j)} r^{(k,l)} \text{Cov}(\Phi_1^{(i,j)}(X_1), \Phi_1^{(k,l)}(X_1)) \\ &= r^{(i,j)} r^{(k,l)} \left[ E \left[ \Phi_1^{(i,j)}(X_1) \Phi_1^{(k,l)}(X_1) \right] - \gamma^{(i,j)} \gamma^{(k,l)} \right] \end{aligned}$$

avec  $\Phi_1^{(i,j)}(x) = E[\Phi^{(i,j)}(x, X_2, \dots, X_{r(i,j)})]$  pour  $i, k=1, \dots, p$  et  $j, l = 1, \dots, q$ .

De la propriété (iv) de la proposition 1.3.1, puisque chaque élément  $\Phi^{(i,j)}$  de la matrice converge en moyenne quadratique vers  $\gamma^{(i,j)}$ , pour  $i=1, \dots, p$  et  $j=1, \dots, q$ , on déduit le résultat suivant.

**COROLLAIRE 1.3.1.** *La matrice  $U_n$  converge en moyenne quadratique (et donc en probabilité) vers la matrice  $\Gamma$ , si  $E \left[ \left( \Phi^{(i,j)}(X_1, \dots, X_{r(i,j)}) \right)^2 \right] < \infty$  pour  $i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ .*

**1.3.1. Applications.** Le résultat suivant est connu (voir par exemple Cook (1951) ou Muirhead (1982), p.19). On en donne une nouvelle démonstration, plus courte et plus simple, basée sur la normalité asymptotique des U-statistiques.

**THÉORÈME 1.3.2.** *Soit  $S_n = (s_{ij})$  la matrice de covariance d'un échantillon de taille  $n$  issu d'un vecteur aléatoire de dimension  $m \times 1$  admettant tous les moments d'ordre 4 et dont la moyenne est  $\mu$  et la matrice de covariance est  $\Sigma = (\sigma^{(i,j)})$ . Alors, la distribution asymptotique, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , de  $\sqrt{n}(\text{vec}S_n - \text{vec}\Sigma)$  est une loi multinormale  $N_{m^2}(O, \Omega_C)$  où*

$$\Omega_C = \begin{pmatrix} D_{11} & \dots & D_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{m1} & \dots & D_{mm} \end{pmatrix}$$

pour  $j$  et  $l = 1, \dots, m$ ,  $D_{jl} = (d_{jl}^{(i,k)}) : m \times m$  où

$$d_{jl}^{(i,k)} = \sigma^{(ij,kl)} - \sigma^{(i,j)} \sigma^{(k,l)}, \quad i \text{ et } k = 1, \dots, m,$$

avec  $\sigma^{(ij,kl)} = E \left[ (X_1^{(i)} - \mu^{(i)})(X_1^{(j)} - \mu^{(j)})(X_1^{(k)} - \mu^{(k)})(X_1^{(l)} - \mu^{(l)}) \right]$ .

**Démonstration:**

On sait ( voir Randles & Wolfe (1979), p.63) que  $\sigma^{(i,j)}$  est un paramètre estimable de degré  $r^{(i,j)} = 2$  et de noyau symétrique  $h^{(i,j)}$  défini pour  $i$  et  $j=1, \dots, m$ , par

$$\begin{aligned} h^{(i,j)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} \left( (x_1^{(i)} - x_2^{(i)})(x_1^{(j)} - x_2^{(j)}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( x_1^{(i)} x_1^{(j)} + x_2^{(i)} x_2^{(j)} - x_1^{(i)} x_2^{(j)} - x_1^{(j)} x_2^{(i)} \right) \end{aligned}$$

où pour  $k=1, 2$ ,  $x_k = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(m)})' \in \mathbb{R}^m$ .

D'autre part, la condition du théorème 1.3.1,  $E[(h^{(i,j)}(X_1, X_2))^2] < \infty$ , est satisfaite car tous les moments d'ordre 4 existent par hypothèse. On a alors

$$\begin{aligned} h_1^{(i,j)}(x) &= E[h^{(i,j)}(x, X_2)] \\ &= \frac{1}{2} \left( x^{(i)} x^{(j)} - \mu^{(i)} x^{(j)} - \mu^{(j)} x^{(i)} + \mu^{(i)} \mu^{(j)} + \sigma^{(i,j)} \right) \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

pour  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)})' \in \mathbb{R}^m$ . Ainsi, pour  $\alpha = 1, \dots, n$ , on a

$$\begin{aligned} h_1^{(i,j)}(X_\alpha) &= \frac{1}{2} \left( X_\alpha^{(i)} X_\alpha^{(j)} - \mu^{(i)} X_\alpha^{(j)} - \mu^{(j)} X_\alpha^{(i)} + \mu^{(i)} \mu^{(j)} + \sigma^{(i,j)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( X_\alpha^{(i)} - \mu^{(i)} \right) \left( X_\alpha^{(j)} - \mu^{(j)} \right) + \frac{\sigma^{(i,j)}}{2}. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

La U-statistique pour le paramètre  $\sigma^{(i,j)}$  est donc

$$\begin{aligned} U_n^{(i,j)} &= \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq n} \frac{1}{2} \left( X_\alpha^{(i)} X_\alpha^{(j)} + X_\beta^{(i)} X_\beta^{(j)} - X_\alpha^{(i)} X_\beta^{(j)} - X_\alpha^{(j)} X_\beta^{(i)} \right) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \left( n \sum_{\alpha=1}^n X_\alpha^{(i)} X_\alpha^{(j)} - \left( \sum_{\alpha=1}^n X_\alpha^{(i)} \right) \left( \sum_{\alpha=1}^n X_\alpha^{(j)} \right) \right) \\ &= \frac{1}{(n-1)} \sum_{\alpha=1}^n \left( X_\alpha^{(i)} - \bar{X}^{(i)} \right) \left( X_\alpha^{(j)} - \bar{X}^{(j)} \right) \\ &= s_{ij}, \end{aligned}$$

pour  $i$  et  $j=1, \dots, m$ , et par conséquent, la matrice de U-statistiques pour la matrice de paramètres  $\Sigma = (\sigma^{(i,j)})$  est

$$U_n = \begin{pmatrix} U_n^{(1,1)} & \dots & U_n^{(1,m)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ U_n^{(m,1)} & \dots & U_n^{(m,m)} \end{pmatrix} = S_n,$$

la matrice échantillonnale. On a  $E[U_n] = \Sigma$  et le résultat découle directement du théorème 1.3.1 en écrivant

$$\begin{aligned} d_{jl}^{(i,k)} &= 2 \times 2 \text{Cov}(h_1^{(i,j)}(X_1), h_1^{(k,l)}(X_1)) \\ &= \text{Cov}((X_1^{(i)} - \mu^{(i)})(X_1^{(j)} - \mu^{(j)}), (X_1^{(k)} - \mu^{(k)})(X_1^{(l)} - \mu^{(l)})) \\ &= \sigma^{(ij,kl)} - \sigma^{(i,j)}\sigma^{(k,l)}, \end{aligned}$$

$i, j, k, \text{ et } l = 1, \dots, m.$

C.Q.F.D.

On observe que la quantité  $2(h_1^{(i,j)}(X_1) - \sigma^{(i,j)})$  est effectivement l'élément générique de la matrice  $Z_1 = \{(X_1 - \mu)(X_1 - \mu)' - \Sigma\}$  tel qu'il apparaît dans la démonstration de Muirhead (1982), p.17. D'autre part, la matrice  $\Omega_C$  est singulière puisqu'elle est la matrice de covariance  $m^2 \times m^2$  du  $\text{vec}(S_n)$  où la matrice  $S_n$  est symétrique. Néanmoins, des parties non-singulières de cette matrice nous intéresseront par la suite.

Comme on l'a déjà signalé, le résultat du théorème 1.3.2 n'est pas nouveau. Il est établi par Cook (1951) et repris par Muirhead (1982), p.42, qui donne

$$\text{Cov}(u_{ij}, u_{kl}) = \kappa_{1111}^{(ij,kl)} + \sigma^{(i,k)}\sigma^{(j,l)} + \sigma^{(i,l)}\sigma^{(j,k)}$$

où le coefficient  $\kappa_{1111}^{(ij,kl)}$  est défini par

$$\kappa_{1111}^{(ij,kl)} = \sigma^{(ij,kl)} - \sigma^{(i,j)}\sigma^{(k,l)} - \sigma^{(i,k)}\sigma^{(j,l)} - \sigma^{(i,l)}\sigma^{(j,k)}$$

(voir Cook (1951), p.180), avec  $u_{ij}$  représentant l'élément  $(i,j)$  de la matrice  $U_n = \sqrt{n}(S_n - \Sigma)$ . En remplaçant  $\kappa_{1111}^{(ij,kl)}$  par sa valeur, on obtient

$$\text{Cov}(u_{ij}, u_{kl}) = d_{jl}^{(i,k)} = \sigma^{(ij,kl)} - \sigma^{(i,j)}\sigma^{(k,l)}.$$

Si  $X$  suit une distribution elliptique alors

$$\kappa_{1111}^{(ij,kl)} = \kappa(\sigma^{(i,j)}\sigma^{(k,l)} + \sigma^{(i,k)}\sigma^{(j,l)} + \sigma^{(i,l)}\sigma^{(j,k)}).$$

En égalisant les deux expressions de  $\kappa_{1111}^{(ij,kl)}$ , on obtient

$$\sigma^{(ij,kl)} = (1 + \kappa)[\sigma^{(i,j)}\sigma^{(k,l)} + \sigma^{(i,k)}\sigma^{(j,l)} + \sigma^{(i,l)}\sigma^{(j,k)}], \quad (1.3.3)$$

et on retrouve  $\Omega_C = W$ . Ceci démontre le théorème 1.2.2. On en déduit aussi

$$\rho^{(ij,kl)} = (1 + \kappa)[\rho^{(i,j)}\rho^{(k,l)} + \rho^{(i,k)}\rho^{(j,l)} + \rho^{(i,l)}\rho^{(j,k)}] \quad (1.3.4)$$

avec  $\rho^{(i,j)} = \sigma^{(i,j)}(\sigma^{(i,i)}\sigma^{(j,j)})^{-1/2}$  et  $\rho^{(ij,kl)} = \sigma^{(ij,kl)}(\sigma^{(i,i)}\sigma^{(j,j)}\sigma^{(k,k)}\sigma^{(l,l)})^{-1/2}$  où  $\rho^{(i,j)}$  est l'élément de la matrice de corrélation  $\mathcal{P}$ .

À l'aide d'un développement limité et des calculs élémentaires, nous déduisons du théorème précédent la distribution asymptotique de la matrice de corrélation échantillonnale d'un vecteur aléatoire dont tous les moments d'ordre quatre existent. Ce résultat est aussi connu (voir Steiger & Hakstian (1982)) mais nous en donnons ici une démonstration différente.

**THÉORÈME 1.3.3.** *Sous les conditions du théorème 1.3.2, si  $\mathcal{P}$  et  $R_n$  désignent respectivement la matrice de corrélation de la population et la matrice de corrélation échantillonnale, alors*

$$\sqrt{n}(\text{vec}R_n - \text{vec}\mathcal{P}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{m^2}(0, \Omega_R)$$

où les éléments de  $\Omega_R$  sont donnés par

$$\begin{aligned} \omega^{(ij,kl)} = & \rho^{(ij,kl)} + \frac{1}{4}\rho^{(i,j)}\rho^{(k,l)}[\rho^{(ii,kk)} + \rho^{(ii,ll)} + \rho^{(jj,kk)} + \rho^{(jj,ll)}] \\ & - \frac{1}{2}\rho^{(i,j)}[\rho^{(ii,kl)} + \rho^{(jj,kl)}] - \frac{1}{2}\rho^{(k,l)}[\rho^{(ij,kk)} + \rho^{(ij,ll)}]. \end{aligned}$$

De plus,  $R_n$  converge en probabilité vers  $\mathcal{P}$ .

### Démonstration:

Avec les notations précédentes, on pose, pour  $i$  et  $j = 1, \dots, m$ ,

$$\text{vec}(U_n) = \sqrt{n}(\text{vec}S_n - \text{vec}\Sigma) \quad \text{c'est-à-dire } u_{ij} = \sqrt{n}(s_{ij} - \sigma^{(i,j)}).$$

Par conséquent, on a  $s_{ij} = \sigma^{(i,j)} + \frac{1}{\sqrt{n}}u_{ij}$ ,  $i$  et  $j = 1, \dots, m$ .

Pour  $n$  assez grand, écrivons pour  $i$  et  $j = 1, \dots, m$  le développement limité suivant:

$$\begin{aligned}
 r_{ij} &= s_{ij}(s_{ii})^{-1/2}(s_{jj})^{-1/2} \\
 &= [\sigma^{(i,j)} + n^{-1/2}u_{ij}][\sigma^{(i,i)} + n^{-1/2}u_{ii}]^{-1/2}[\sigma^{(j,j)} + n^{-1/2}u_{jj}]^{-1/2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^{(i,i)}\sigma^{(j,j)}}}[\sigma^{(i,j)} + n^{-1/2}u_{ij}] \\
 &\quad [1 + n^{-1/2}u_{ii}(\sigma^{(i,i)})^{-1}]^{-1/2}[1 + n^{-1/2}u_{jj}(\sigma^{(j,j)})^{-1}]^{-1/2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^{(i,i)}\sigma^{(j,j)}}}[\sigma^{(i,j)} + n^{-1/2}u_{ij}] \\
 &\quad [1 - \frac{1}{2}n^{-1/2}(\sigma^{(i,i)})^{-1}u_{ii} + O_p^{(i)}(n^{-1})][1 - \frac{1}{2}n^{-1/2}(\sigma^{(j,j)})^{-1}u_{jj} + O_p^{(j)}(n^{-1})].
 \end{aligned}$$

Après plusieurs manipulations algébriques, on obtient en regroupant les termes de même ordre <sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
 r_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{\sigma^{(i,i)}\sigma^{(j,j)}}} \left\{ \sigma^{(i,j)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{n}} \left[ -\frac{1}{2}\sigma^{(i,j)}(\sigma^{(i,i)})^{-1}u_{ii} + u_{ij} - \frac{1}{2}\sigma^{(i,j)}(\sigma^{(j,j)})^{-1}u_{jj} + O_p^{(i,j)}(n^{-1/2}) \right] \right\} \\
 &= \rho^{(i,j)} + \frac{1}{\sqrt{n}} \left[ -\frac{1}{2}\frac{\rho^{(i,j)}}{\sigma^{(i,i)}}u_{ii} + \frac{u_{ij}}{\sqrt{\sigma^{(i,i)}\sigma^{(j,j)}}} - \frac{1}{2}\frac{\rho^{(i,j)}}{\sigma^{(j,j)}}u_{jj} + O_p^{(i,j)}(n^{-1/2}) \right]
 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
 b_{ij} &= \sqrt{n}(r_{ij} - \rho^{(i,j)}) \\
 &= \left[ -\frac{1}{2}\rho^{(i,j)}\frac{u_{ii}}{\sigma^{(i,i)}} + \frac{u_{ij}}{\sqrt{\sigma^{(i,i)}\sigma^{(j,j)}}} - \frac{1}{2}\rho^{(i,j)}\frac{u_{jj}}{\sigma^{(j,j)}} \right] + O_p^{(i,j)}(n^{-1/2}).
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $i$  et  $j = 1, \dots, m$ , la distribution asymptotique de  $\sqrt{n}(r_{ij} - \rho^{(i,j)})$  est la même que celle de la combinaison linéaire:  $-\frac{1}{2}\rho^{(i,j)}(\sigma^{(i,i)})^{-1}u_{ii} + 1/\sqrt{\sigma^{(i,i)}\sigma^{(j,j)}}u_{ij} - \frac{1}{2}\rho^{(i,j)}(\sigma^{(j,j)})^{-1}u_{jj}$ . Il existe donc une matrice  $A$  de dimension  $m \times m$  telle que la matrice  $B = (b_{ij})$  s'écrit, pour  $i$  et  $j = 1, \dots, m$ ,

$$B = AU_n + O_p(n^{-1/2}) = L + O_p(n^{-1/2}) \quad \text{où } L = (l_{ij}) \text{ et } O_p(n^{-1/2}) = (O_p^{(i,j)}(n^{-1/2})).$$

Par conséquent, la distribution asymptotique de  $\text{vec}B = \sqrt{n}(\text{vec}R_n - \text{vec}\mathcal{P})$  est la même que celle de  $\text{vec}L = \text{vec}(AU_n) = (I \otimes A)\text{vec}U_n$ , laquelle est, d'après le théorème 1.3.2,

<sup>3</sup>La notation (Muirhead (1982), p.158)  $O_p^{(i,j)}(n^{-d})$  signifie que  $n^d O_p^{(i,j)}(n^{-d})$  est borné en probabilité pour  $n$  assez grand et  $d \geq 0$  (voir aussi Bishop & al (1975), p.476).

$\mathcal{N}_{m^2}(O, (I \otimes A)\Omega_C(I \otimes A'))$ . Un élément de  $(I \otimes A)\Omega_C(I \otimes A')$  est par définition

$$\begin{aligned}
& Cov(l_{ij}, l_{kl}) \\
&= Cov\left(-\frac{1}{2}\rho^{(i,j)}(\sigma^{(i,i)})^{-1}u_{ii} + (\sigma^{(i,i)}\sigma^{(j,j)})^{-1/2}u_{ij} - \frac{1}{2}\rho^{(i,j)}(\sigma^{(j,j)})^{-1}u_{jj},\right. \\
&\quad \left.-\frac{1}{2}\rho^{(k,l)}(\sigma^{(k,k)})^{-1}u_{kk} + (\sigma^{(k,k)}\sigma^{(l,l)})^{-1/2}u_{kl} - \frac{1}{2}\rho^{(k,l)}(\sigma^{(l,l)})^{-1}u_{ll}\right) \\
&= \frac{1}{4}\rho^{(i,j)}\rho^{(k,l)}(\sigma^{(k,k)}\sigma^{(l,l)})^{-1}Cov(u_{ii}, u_{kk}) - \frac{1}{2}\rho^{(i,j)}(\sigma^{(i,i)})^{-1}(\sigma^{(k,k)}\sigma^{(l,l)})^{-1/2}Cov(u_{ii}, u_{kl}) \\
&\quad + \frac{1}{4}\rho^{(i,j)}\rho^{(k,l)}(\sigma^{(i,i)}\sigma^{(l,l)})^{-1}Cov(u_{ii}, u_{ll}) - \frac{1}{2}\rho^{(k,l)}(\sigma^{(k,k)})^{-1}(\sigma^{(i,i)}\sigma^{(j,j)})^{-1/2}Cov(u_{ij}, u_{kk}) \\
&\quad + (\sigma^{(i,i)}\sigma^{(j,j)}\sigma^{(k,k)}\sigma^{(l,l)})^{-1/2}Cov(u_{ij}, u_{kl}) - \frac{1}{2}\rho^{(k,l)}(\sigma^{(l,l)})^{-1}(\sigma^{(i,i)}\sigma^{(j,j)})^{-1/2}Cov(u_{ij}, u_{ll}) \\
&\quad + \frac{1}{4}\rho^{(i,j)}\rho^{(k,l)}(\sigma^{(j,j)}\sigma^{(k,k)})^{-1}Cov(u_{jj}, u_{kk}) - \frac{1}{2}\rho^{(i,j)}(\sigma^{(j,j)})^{-1}(\sigma^{(k,k)}\sigma^{(l,l)})^{-1/2}Cov(u_{jj}, u_{kl}) \\
&\quad + \frac{1}{4}\rho^{(i,j)}\rho^{(k,l)}(\sigma^{(l,l)}\sigma^{(j,j)})^{-1}Cov(u_{jj}, u_{ll}).
\end{aligned}$$

Compte tenu du résultat du théorème 1.3.2 qui donne

$$Cov(u_{ij}, u_{kl}) = \sigma^{(ij,kl)} - \sigma^{(i,j)}\sigma^{(k,l)},$$

on a pour  $i, j, k$  et  $l = 1, \dots, m$ ,

$$Cov(u_{ij}, u_{kl}) = \left(\rho^{(ij,kl)} - \rho^{(i,j)}\rho^{(k,l)}\right)\sqrt{\sigma^{(i,i)}\sigma^{(j,j)}\sigma^{(k,k)}\sigma^{(l,l)}}.$$

On obtient alors le résultat

$$\begin{aligned}
Cov(l_{ij}, l_{kl}) &= \rho^{(ij,kl)} + \frac{1}{4}\rho^{(i,j)}\rho^{(k,l)}\left[\rho^{(ii,kk)} + \rho^{(ii,ll)} + \rho^{(jj,kk)} + \rho^{(jj,ll)}\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}\rho^{(i,j)}\left[\rho^{(ii,kl)} + \rho^{(jj,kl)}\right] - \frac{1}{2}\rho^{(k,l)}\left[\rho^{(ij,kk)} + \rho^{(ij,ll)}\right].
\end{aligned}$$

Puisque pour  $i$  et  $j = 1, \dots, m$ ,  $u_{ij} = \sqrt{n}(s_{ij} - \sigma^{(i,j)})$  et  $s_{ij} \xrightarrow{\mathcal{P}} \sigma^{(i,j)}$ , on a

$$\begin{aligned}
r_{ij} - \rho^{(i,j)} &= -\frac{1}{2}\frac{\rho^{(i,j)}}{\sigma^{(i,i)}}(s_{ii} - \sigma^{(i,i)}) + \frac{(s_{ij} - \sigma^{(i,j)})}{\sqrt{\sigma^{(i,i)}\sigma^{(j,j)}}} - \frac{1}{2}\frac{\rho^{(i,j)}}{\sigma^{(j,j)}}(s_{jj} - \sigma^{(j,j)}) \\
&\quad + O_p^{(i,j)}(n^{-1}),
\end{aligned}$$

alors on déduit  $r_{ij} \xrightarrow{\mathcal{P}} \rho^{(i,j)}$  c'est-à-dire que  $R_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathcal{P}$ .

C.Q.F.D.

---

<sup>4</sup>  $\xrightarrow{\mathcal{P}}$  désigne la convergence en probabilité lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

## 1.4. MESURES D'ASSOCIATION VECTORIELLE

Soit  $X$  un vecteur aléatoire de dimension  $m \times 1$  donné par

$$X = \begin{pmatrix} X^{[1]} \\ X^{[2]} \end{pmatrix}$$

où  $X^{[1]}$  et  $X^{[2]}$  sont des sous-vecteurs de dimension  $p$  et  $q$  respectivement avec  $p + q = m$ . Supposons que pour  $i$  et  $j = 1, 2$ ,

$$E(X^{[i]}) = \mu^{[i]} \text{ et } Cov(X^{[i]}, X^{[j]}) = E(X^{[i]} - \mu^{[i]})(X^{[j]} - \mu^{[j]})' = \Sigma_{ij}.$$

Posons

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu^{[1]} \\ \mu^{[2]} \end{pmatrix} \text{ et } \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} = (\sigma^{(k,l)}).$$

où  $\Sigma$  est supposée définie positive. Considérons un échantillon aléatoire  $X_1, \dots, X_n$  prélevé sur  $X$  où

$$X_\alpha = \begin{pmatrix} X_\alpha^{[1]} \\ X_\alpha^{[2]} \end{pmatrix},$$

$\alpha = 1, \dots, n$ . Les estimateurs habituels sans biais pour  $\mu$  et  $\Sigma$  sont

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X}^{[1]} \\ \bar{X}^{[2]} \end{pmatrix} \text{ et } S_n = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = (s_{kl})$$

où pour  $i$  et  $j = 1, 2$ ,

$$\bar{X}^{[i]} = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n X_\alpha^{[i]} \text{ et } S_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=1}^n (X_\alpha^{[i]} - \bar{X}^{[i]})(X_\alpha^{[j]} - \bar{X}^{[j]})'.$$

Escoufier (1973) a introduit une mesure d'association vectorielle basée sur la notion de la distance entre deux matrices de données. Elle est définie <sup>5</sup> par

$$RV^{(C)} = \frac{tr(S_{12}S_{21})}{\sqrt{tr(S_{11}^2)tr(S_{22}^2)}}.$$

Son analogue au niveau de la population est

$$\rho RV^{(C)} = \frac{tr(\Sigma_{12}\Sigma_{21})}{\sqrt{tr(\Sigma_{11}^2)tr(\Sigma_{22}^2)}}.$$

<sup>5</sup>L'exposant (C) indique que les mesures considérées sont basées sur la matrice de covariance.

Elle est symétrique mais pas invariante sous des transformations linéaires. Robert & Escoufier (1976) l'ont utilisé pour unifier différentes méthodes d'analyse multivariée.

Stewart & Love (1968) ont défini la mesure

$$SL^{(C)} = \frac{tr(S_{12}S_{22}^{-1}S_{21})}{tr(S_{11})}.$$

C'est une mesure de liaison vectorielle qualifiée de mesure de redondance car elle est basée sur la prévision de  $X^{[1]}$  par  $X^{[2]}$ . Elle n'est pas symétrique ni invariante sous des transformations linéaires des vecteurs d'observations. La mesure analogue au niveau de la population est définie par

$$\rho SL^{(C)} = \frac{tr(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})}{tr(\Sigma_{11})}.$$

Cramer & Nicewander (1979) ont proposé une mesure de corrélation vectorielle définie par

$$CN^{(C)} = \frac{tr(S_{11}^{-1}S_{12}S_{22}^{-1}S_{21})}{p}.$$

Elle est invariante sous des transformations linéaires de plein rang et symétrique si on suppose  $p \leq q$ . Son numérateur fut introduit par Pillai (1954, 1955) pour tester l'indépendance des vecteurs  $X^{[1]}$  et  $X^{[2]}$  sous l'hypothèse de multinormalité. La mesure analogue au niveau de la population est définie par

$$\rho CN^{(C)} = \frac{tr(\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})}{p}.$$

Citons quelques propriétés importantes des trois mesures présentées ci haut.

- (i)  $\rho M^{(C)} = 0$  si et seulement si  $\Sigma_{12} = 0$ , pour  $M = RV, SL$  et  $CN$ .
- (ii)  $0 \leq \rho M^{(C)} \leq 1$ , pour  $M = RV, SL$  et  $CN$ .
- (iii) Lorsque  $p = q = 1$ , les trois mesures correspondent au carré du coefficient de corrélation simple entre les variables  $X^{(1)}$  et  $X^{(2)}$ .
- (iv) Lorsque  $p = 1$ ,  $SL^{(C)}$  et  $CN^{(C)}$  correspondent au carré du coefficient de corrélation multiple entre la variable  $X^{(1)}$  et le vecteur  $X^{[2]}$ .



(v)  $RV^{(C)}$  et  $SL^{(C)}$  sont invariantes sous des transformations orthogonales entre  $X^{[1]}$  et  $X^{[2]}$ .

D'autres propriétés et résultats concernant ces mesures se trouvent dans Lazraq & Cléroux (1988), Allaire & Lepage (1990) ou Lazraq, Cléroux & Kiers (1992).

## CHAPITRE 2

---

### Mesures d'association vectorielle construites à partir de la matrice de corrélation

Dans ce deuxième chapitre, on veut éprouver l'hypothèse nulle d'absence de liaison entre deux ou plusieurs vecteurs aléatoires. On suppose que les observations proviennent d'une loi appartenant à la famille des distributions elliptiques. En utilisant la matrice de covariance échantillonnale, Muirhead (1982), p.546, a proposé un test asymptotique pour tester l'absence de liaison entre plusieurs vecteurs aléatoires. Dans le même contexte, en utilisant la mesure d'Escoufier (1973) basée sur la matrice de covariance, Cléroux & Ducharme (1989) ont proposé un autre test pour l'absence de liaison entre deux vecteurs aléatoires. À partir des mesures d'Escoufier (1973), de Stewart & Love (1968) et Cramer & Nicewander (1979), Allaire & Lepage (1990) et Lazraq & Cléroux (1992) ont généralisé le travail de Cléroux & Ducharme (1989) en proposant trois autres tests pour tester l'absence de liaison entre plusieurs vecteurs aléatoires.

En pratique, il arrive souvent que l'échelle des variables n'est pas la même et souvent les variances respectives sont très différentes. Pour pallier à ce problème, on centre et réduit chaque variable afin de donner un poids égal à chacune d'elles dans l'analyse. Dans de telles situations, la mesure d'Escoufier (1973) et la mesure de Stewart & Love (1968) ne sont pas appropriées puisqu'elles ne sont pas invariantes sous des transformations linéaires des vecteurs d'observations. Ce problème a été déjà soulevé par Allaire & Lepage (1990) et aussi par Roy & Cléroux (1993). Pour

y remédier, on applique les mesures d'Escoufier (1973), de Stewart & Love (1968) et Cramer & Nicewander (1979) à la matrice de corrélation plutôt qu'à la matrice de covariance.

Désignons par  $\mathcal{P}$  la matrice de corrélation et par  $R_n$  la matrice de corrélation échantillonnale:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} \end{pmatrix} = (\rho^{(k,l)}) \quad \text{et} \quad R_n = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} = (r_{kl})$$

où  $\rho^{(k,l)} = \frac{\sigma^{(k,l)}}{\sqrt{\sigma^{(k,k)}}\sqrt{\sigma^{(l,l)}}}$  et  $r_{kl} = \frac{s_{kl}}{\sqrt{s_{kk}}\sqrt{s_{ll}}}$ , avec  $k$  et  $l = 1, \dots, m$ . Pour ne pas alourdir la notation, on omet l'indice  $n$  des sous-matrice  $R_{ij}$ ,  $i$  et  $j = 1, 2$ .

Les mesures d'Escoufier (1973), de Stewart & Love (1968) et Cramer & Nicewander (1979) appliquées à la matrice de corrélation échantillonnale deviennent

$$RV^{(R)} = \frac{tr(R_{12}R'_{12})}{\sqrt{tr(R_{11}^2)tr(R_{22}^2)}}$$

pour la mesure d'Escoufier (1973),

$$SL^{(R)} = \frac{tr(R_{12}R_{22}^{-1}R'_{12})}{p}$$

pour la mesure de Stewart & Love (1968), car  $tr(R_{11}) = p$ , et

$$CN^{(R)} = \frac{tr(R_{11}^{-1}R_{12}R_{22}^{-1}R'_{12})}{p}$$

pour la mesure de Cramer & Nicewander (1979).

Au niveau de la population, si on applique les mêmes mesures à la matrice de corrélation, on obtient

$$\rho RV^{(R)} = \frac{tr(\mathcal{P}_{12}\mathcal{P}'_{12})}{\sqrt{tr(\mathcal{P}_{11}^2)tr(\mathcal{P}_{22}^2)}}$$

pour la mesure d'Escoufier (1973),

$$\rho SL^{(R)} = \frac{tr(\mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{22}^{-1}\mathcal{P}'_{12})}{p}$$

pour la mesure de Stewart & Love (1968) et

$$\rho CN^{(R)} = \frac{tr(\mathcal{P}_{11}^{-1}\mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{22}^{-1}\mathcal{P}'_{12})}{p}$$

pour la mesure de Cramer & Nicewander (1979).

On note que

$$\rho CN^{(R)} = \rho CN^{(C)}.$$

En effet, en utilisant la relation

$$\mathcal{P} = D^{-1/2} \Sigma D^{-1/2}$$

où D est la matrice diagonale  $D = \text{diag}(\sigma^{(1,1)}, \dots, \sigma^{(m,m)})$ , on obtient alors

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11}^{-1/2} \Sigma_{11} D_{11}^{-1/2} & D_{11}^{-1/2} \Sigma_{12} D_{22}^{-1/2} \\ D_{22}^{-1/2} \Sigma_{21} D_{11}^{-1/2} & D_{22}^{-1/2} \Sigma_{22} D_{22}^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Il découle que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{11}^{-1} \mathcal{P}_{12} \mathcal{P}_{22}^{-1} \mathcal{P}_{21} &= \left( D_{11}^{1/2} \Sigma_{11}^{-1} D_{11}^{1/2} \right) \mathcal{P}_{12} \left( D_{22}^{1/2} \Sigma_{22}^{-1} D_{22}^{1/2} \right) \mathcal{P}_{21} \\ &= D_{11}^{1/2} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} D_{22}^{1/2} \mathcal{P}_{21} \\ &= D_{11}^{1/2} \left( \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \right) D_{11}^{-1/2}, \end{aligned}$$

et par conséquent, on obtient le résultat. Evidemment, on a aussi  $CN^{(R)} = CN^{(C)}$  et la démonstration est similaire.

Les trois nouvelles mesures construites sont invariantes au changement de position et d'échelle et possèdent les propriétés suivantes:

- (i)  $\rho M^{(R)} = 0$  si et seulement si  $\mathcal{P}_{21} = 0$ , pour  $M = RV, SL$  et  $CN$ .
- (ii) Lorsque  $p = q = 1$ , les trois mesures correspondent au carré du coefficient de corrélation simple entre les variables  $X^{(1)}$  et  $X^{(2)}$ .
- (iii)  $0 \leq \rho M^{(R)} \leq 1$ , pour  $M = RV, SL$  et  $CN$ .

Dans le présent chapitre, on suppose que les observations proviennent d'une loi elliptique. Dans la section 2.1, on donne la distribution asymptotique de  $\sqrt{n} \text{vec} R_n$  avec une expression matricielle de la matrice de covariance. Dans la section 2.2, on établit la loi asymptotique de  $\sqrt{n} \text{vec} R_{21}$  sous différentes hypothèses. On applique les résultats de ces deux sections dans la section 2.3 afin d'obtenir les distributions

asymptotiques des trois mesures basées sur la matrice de corrélation sous l'hypothèse nulle d'absence de liaison entre deux vecteurs aléatoires et sous une suite d'alternatives convergeant vers l'hypothèse nulle. Dans la section 2.4, on formalise le mode d'utilisation des tests et on donne un exemple d'application. Une simulation est présentée dans la section 2.5 afin d'évaluer le comportement expérimental du niveau et de la puissance des trois tests et de les comparer à trois tests compétiteurs. On conclut ce chapitre à la section 2.6 par la généralisation des trois tests pour le problème de l'absence de liaison entre plusieurs vecteurs aléatoires et on illustre ces tests par un exemple.

## 2.1. DISTRIBUTION ASYMPTOTIQUE DE $n^{1/2}vecR_n$

La distribution asymptotique de  $\sqrt{n}vecR_n$  qui est présentée dans le cas général dans le théorème 1.3.3 (voir Steiger & Hakstian (1982)), ne permet pas d'obtenir les éléments de la matrice de covariance comme fonction des éléments de la matrice de corrélation de la population  $\mathcal{P}$ . En faisant l'hypothèse d'ellipticité, on peut donner une expression matricielle qui dépend de  $\mathcal{P}$  pour cette matrice de covariance.

**THÉORÈME 2.1.1.** *Soit  $R_n$  la matrice de corrélation d'un échantillon de taille  $n$  issu d'un vecteur aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_m)'$  dont la distribution est elliptique de paramètres  $\mu$  et  $V$ , de matrice corrélation  $\mathcal{P}$  et de coefficient d'aplatissement  $\kappa$ . Alors la distribution asymptotique, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , de  $\sqrt{n}(vecR_n - vec\mathcal{P})$  est une loi multivariée normale  $\mathcal{N}_{m^2}(O, (1 + \kappa)\Lambda)$  où*

$$\begin{aligned} \Lambda = & \frac{1}{2} \left[ (I \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(I \otimes \mathcal{P}) + (\mathcal{P} \otimes I)E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes I) \right. \\ & \left. + (I \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes I) + (\mathcal{P} \otimes I)E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(I \otimes \mathcal{P}) \right] \\ & + (\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}) + (\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})K - (I \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}) \\ & - (\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(I \otimes \mathcal{P}) - (\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes I) - (\mathcal{P} \otimes I)E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}) \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

où la matrice  $I$  désigne la matrice d'identité  $m \times m$ ,  $E = \sum_i^m (H_{ii} \otimes H_{ii})$  avec  $H_{ii}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , étant la matrice  $m \times m$  ayant 1 à la position  $(i, i)$  et 0 ailleurs et  $K$  désigne la matrice de commutation  $m^2 \times m^2$ .

**Démonstration:**

D'après le théorème 1.3.3, on a

$$\sqrt{n}vec(R_n - \mathcal{P}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{m^2}(0, \Omega_R)$$

où les éléments de  $\Omega_R$  sont donnés par

$$\begin{aligned} \omega^{(ij,kl)} &= \rho^{(ij,kl)} + \frac{1}{4}\rho^{(i,j)}\rho^{(k,l)}\left(\rho^{(ii,kk)} + \rho^{(ii,ll)} + \rho^{(jj,kk)} + \rho^{(jj,ll)}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\rho^{(i,j)}\left(\rho^{(ii,kl)} + \rho^{(jj,kl)}\right) - \frac{1}{2}\rho^{(k,l)}\left(\rho^{(ij,kk)} + \rho^{(ij,ll)}\right). \end{aligned}$$

Puisque  $X$  est elliptique, on obtient d'après l'équation 1.3.4

$$\rho^{(ij,kl)} = (1 + \kappa)\left(\rho^{(i,j)}\rho^{(k,l)} + \rho^{(i,k)}\rho^{(j,l)} + \rho^{(i,l)}\rho^{(j,k)}\right). \quad (2.1.2)$$

On en déduit par exemple,

$$\rho^{(ii,kk)} = (1 + \kappa)\left(1 + 2(\rho^{(i,k)})^2\right) \text{ et } \rho^{(ii,kl)} = (1 + \kappa)\left(\rho^{(k,l)} + 2\rho^{(i,k)}\rho^{(i,l)}\right),$$

et ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \omega^{(ij,kl)} &= (1 + \kappa)\left[\frac{1}{2}\rho^{(i,j)}\rho^{(k,l)}\left[(\rho^{(i,k)})^2 + (\rho^{(i,l)})^2 + (\rho^{(j,k)})^2 + (\rho^{(j,l)})^2\right] \right. \\ &\quad - \rho^{(i,j)}\left[\rho^{(i,k)}\rho^{(i,l)} + \rho^{(j,k)}\rho^{(j,l)}\right] - \rho^{(k,l)}\left[\rho^{(i,l)}\rho^{(j,l)} + \rho^{(i,k)}\rho^{(j,k)}\right] \\ &\quad \left. + \left[\rho^{(i,k)}\rho^{(j,l)} + \rho^{(i,l)}\rho^{(j,k)}\right]\right]. \quad (2.1.3) \end{aligned}$$

Il faut maintenant déterminer la matrice à laquelle correspond cette longue expression, c'est-à-dire la matrice de covariance asymptotique de  $\sqrt{n}vecR_n$ .

• Comme on l'a remarqué dans la relation 1.1.2,  $\rho^{(i,k)}\rho^{(j,l)}$  est l'élément générique de la matrice  $\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$ .

•  $\rho^{(i,l)}\rho^{(j,k)}$  est l'élément générique de la matrice  $(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})K$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} \sum_{ijkl}^m (e_i \otimes e_j)[\rho^{(i,l)}\rho^{(j,k)}](e_k \otimes e_l)' &= \sum_{ijkl}^m (e_i \otimes e_j)[(e'_i \mathcal{P} e_l) \otimes (e'_j \mathcal{P} e_k)](e'_k \otimes e'_l) \\ &= \sum_{ijkl}^m (e_i \otimes e_j)(e'_i \otimes e'_j)(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})(e_l \otimes e_k)(e'_k \otimes e'_l) \\ &= \sum_{ijkl}^m (H_{ii} \otimes H_{jj})(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})(H_{lk} \otimes H'_{lk}) \\ &= (I \otimes I)(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})K \\ &= (\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})K. \end{aligned}$$

• $\rho^{(i,j)}\rho^{(k,l)}(\rho^{(j,k)})^2$  est l'élément générique de  $(\mathcal{P} \otimes I)E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes I)K$ . En effet, on a

$$\begin{aligned}
\rho^{(i,j)}\rho^{(k,l)}(\rho^{(j,k)})^2 &= \rho^{(i,j)}\rho^{(j,k)}\rho^{(k,l)}\rho^{(j,k)} = (e'_i \mathcal{P} e_j)(e'_j \mathcal{P} e_k)(e'_k \mathcal{P} e_l)(e'_j \mathcal{P} e_k) \\
&= (e'_i \mathcal{P} H_{jj} \mathcal{P} H_{kk} \mathcal{P} e_l) \otimes (e'_j I H_{jj} \mathcal{P} e_k e'_k I e_k) \\
&= \sum_{ts}^m (e'_i \mathcal{P} H_{tt} \mathcal{P} H_{ss} \mathcal{P} e_l) \otimes (e'_j I H_{tt} \mathcal{P} H_{ss} I e_k) \\
&= \sum_{ts}^m (e'_i \otimes e'_j) [(\mathcal{P} \otimes I)(H_{tt} \otimes H_{tt})(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})(H_{ss} \otimes H_{ss})(\mathcal{P} \otimes I)](e_l \otimes e_k) \\
&= (e_i \otimes e_j)' (\mathcal{P} \otimes I) \sum_t^m (H_{tt} \otimes H_{tt})(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}) \sum_s^m (H_{ss} \otimes H_{ss})(\mathcal{P} \otimes I) K (e_k \otimes e_l) \\
&= (e_i \otimes e_j)' (\mathcal{P} \otimes I) E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}) E(\mathcal{P} \otimes I) K (e_k \otimes e_l)
\end{aligned}$$

où on a tenu compte que  $e_j e'_j = H_{jj}$ ,  $e_j(e_t e'_t) = e_j$  si  $t = j$  et 0 sinon et où on a posé  $E = \sum_s^m (H_{ss} \otimes H_{ss})$ . Ainsi,  $\rho^{(i,j)}\rho^{(k,l)}(\rho^{(j,k)})^2$  est l'élément générique de la matrice  $(\mathcal{P} \otimes I)E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes I)K$ .

• $\rho^{(i,j)}\rho^{(k,l)}(\rho^{(i,l)})^2$  est l'élément générique de la matrice  $(I \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes I)$ . Il suffit de le vérifier en écrivant

$$\begin{aligned}
&(e_i \otimes e_j)' (I \otimes \mathcal{P}) E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}) E(\mathcal{P} \otimes I) (e_k \otimes e_l) \\
&= \sum_{st}^m (e'_i \otimes e'_j) [(I \otimes \mathcal{P})(H_{tt} \otimes H_{tt})(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})(H_{ss} \otimes H_{ss})(\mathcal{P} \otimes I)] (e_k \otimes e_l) \\
&= \sum_{st}^m (e'_i H_{tt} \mathcal{P} H_{ss} \mathcal{P} e_k) \otimes (e'_j \mathcal{P} H_{tt} \mathcal{P} H_{ss} e_l) = (e'_i \mathcal{P} e_l)(e'_j \mathcal{P} e_k)(e'_j \mathcal{P} e_l)(e'_i \mathcal{P} e_l) \\
&= \rho^{(i,l)}\rho^{(l,k)}\rho^{(j,i)}\rho^{(i,l)} \\
&= \rho^{(i,j)}\rho^{(k,l)}(\rho^{(i,l)})^2.
\end{aligned}$$

• $\rho^{(i,j)}\rho^{(j,k)}\rho^{(j,l)}$  est l'élément générique de la matrice  $(\mathcal{P} \otimes I)E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})$ . Il suffit de le vérifier en écrivant

$$\begin{aligned}
(e_i \otimes e_j)' [(\mathcal{P} \otimes I)E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})] (e_k \otimes e_l) &= \sum_t^m (e_i \otimes e_j)' [(\mathcal{P} \otimes I)(H_{tt} \otimes H_{tt})(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})] (e_k \otimes e_l) \\
&= \sum_t^m (e'_i \mathcal{P} H_{tt} \mathcal{P} e_k) \otimes (e'_j H_{tt} \mathcal{P} e_l) \\
&= (e'_i \mathcal{P} e_j)(e'_j \mathcal{P} e_k)(e'_j \mathcal{P} e_l) \\
&= \rho^{(i,j)}\rho^{(j,k)}\rho^{(j,l)}.
\end{aligned}$$

On a montré à trois reprises comment, à partir de l'élément générique, on retrouve la matrice et deux fois, on a vérifié qu'un élément est l'élément générique d'une matrice donnée. De la même manière, on obtient que

- $\rho^{(i,j)} \rho^{(k,l)} (\rho^{(i,k)})^2$  est l'élément générique de  $(I \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(I \otimes \mathcal{P})$ ,
- $\rho^{(i,j)} \rho^{(k,l)} (\rho^{(j,l)})^2$  est l'élément générique de  $(\mathcal{P} \otimes I)E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes I)$ ,
- $\rho^{(i,j)} \rho^{(i,k)} \rho^{(i,l)}$  est l'élément générique de  $(I \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})$ ,
- $\rho^{(i,j)} \rho^{(j,k)} \rho^{(j,l)}$  est l'élément générique de  $(\mathcal{P} \otimes I)E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})$ ,
- $\rho^{(k,l)} \rho^{(i,l)} \rho^{(j,l)}$  est l'élément générique de  $(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes I)$ ,
- $\rho^{(k,l)} \rho^{(i,k)} \rho^{(j,k)}$  est l'élément générique de  $(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(I \otimes \mathcal{P})$ .

Finalement, en tenant compte de l'équation 2.1.3, la matrice cherchée est

$$\begin{aligned} \Lambda = & \frac{1}{2} \left[ (I \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(I \otimes \mathcal{P}) + (\mathcal{P} \otimes I)E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes I) \right. \\ & \left. + (I \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes I) + (\mathcal{P} \otimes I)E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(I \otimes \mathcal{P}) \right] \\ & + (\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}) + (\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})K - (I \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}) \\ & - (\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(I \otimes \mathcal{P}) - (\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes I) - (\mathcal{P} \otimes I)E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}). \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Si  $m = 2$ , on retrouve le résultat bien connu concernant la distribution asymptotique du coefficient de corrélation échantillonnal  $r$ . Ce résultat mène à la statistique  $Z$  (voir Muirhead(1982)) de Fisher

$$Z = \tanh^{-1} r = \frac{1}{2} \log \frac{1+r}{1-r}.$$

**COROLLAIRE 2.1.1.** *Sous les hypothèses du théorème 2.1.1, si  $m = 2$ , la distribution asymptotique de  $\sqrt{n}(r - \rho)$  est  $\mathcal{N}(0, (1 + \kappa)(1 - \rho^2)^2)$ ,  $\rho$  étant le coefficient de corrélation de la population.*



**Démonstration:**

Pour  $m = 2$ , après calcul, on trouve

$$(1 + \kappa)\Lambda = (1 + \kappa)(1 - \rho^2)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{n}vec(R - \mathcal{P}) &= \sqrt{n}vec \begin{pmatrix} r_{11} - \rho_{11} & r_{12} - \rho_{12} \\ r_{21} - \rho_{21} & r_{22} - \rho_{22} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{n}vec \begin{pmatrix} 0 & r - \rho \\ r - \rho & 0 \end{pmatrix} = \sqrt{n} \begin{pmatrix} 0 \\ r - \rho \\ r - \rho \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puisque  $r_{21} = r_{12} = r$  et  $r_{11} = r_{22} = \rho_{11} = \rho_{22} = 1$ , alors la distribution asymptotique de la variable  $\sqrt{n}(r - \rho)$  est  $\mathcal{N}(0, (1 + \kappa)(1 - \rho^2)^2)$ .

C.Q.F.D.

## 2.2. DISTRIBUTIONS ASYMPTOTIQUES DE $n^{1/2}vecR_{21}$

On veut éprouver l'hypothèse nulle  $H_0 : \mathcal{P}_{21} = 0$ . Cette hypothèse n'implique évidemment pas l'indépendance entre  $X^{[1]}$  et  $X^{[2]}$  mais seulement la non corrélation entre  $X^{[1]}$  et  $X^{[2]}$ .

Considérons la suite d'hypothèses alternatives

$$H_{1:n} : \mathcal{P}_{21} = \frac{1}{\sqrt{n}}A = \left( \frac{a_{ij}}{\sqrt{n}} \right) \text{ avec } |a_{ij}| \leq 1/\sqrt{n},$$

où  $A$  est une matrice donnée de dimension  $q \times p$ ,  $i = p+1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, p$ .

Pour obtenir la distribution asymptotique de  $\sqrt{n}vecR_{21}$  sous  $H_0$  et sous la suite  $H_{1:n}$  convergeant vers  $H_0$ , on utilise le théorème 2.1.1. Les résultats s'obtiennent

comme cas particulier de la première partie du théorème suivant qui donne la distribution asymptotique de  $\sqrt{n}vecR_{21}$  avec une expression matricielle pour la matrice de covariance.

**THÉORÈME 2.2.1.** *Sous les conditions du théorème 2.1.1, on a*

(i)  $\sqrt{n}(vecR_{21} - vecP_{21}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{pq}(O, (1 + \kappa)D)$ , où

$$D = \frac{1}{2} \left[ (I_p \otimes P_{21}) E_p(P_{11} \otimes P_{11}) E_p(I_p \otimes P_{12}) + (P_{12} \otimes I_q) E_q(P_{22} \otimes P_{22}) E_q(P_{21} \otimes I_q) \right. \\ \left. + (I_p \otimes P_{21}) E_p(P_{12} \otimes P_{12}) E_q(P_{21} \otimes I_q) + (P_{12} \otimes I_q) E_q(P_{21} \otimes P_{21}) E_p(I_p \otimes P_{12}) \right] \\ + (P_{11} \otimes P_{22}) + (P_{12} \otimes P_{21}) K_{qp} - (I_p \otimes P_{21}) E_p(P_{11} \otimes P_{12}) \\ - (P_{11} \otimes P_{21}) E_p(I_p \otimes P_{12}) - (P_{12} \otimes I_q) E_q(P_{21} \otimes P_{22}) - (P_{12} \otimes P_{22}) E_q(P_{21} \otimes I_q),$$

avec  $E_p = \sum_{t=1}^p H_{tt} \otimes H_{tt}$ ,  $E_q = \sum_{t=p+1}^m H_{tt} \otimes H_{tt}$ ,  $p + q = m$  et  $K_{qp}$  désignant la matrice de commutation  $qp \times qp$ .

(ii) Sous  $H_0$ ,  $\sqrt{n}vecR_{21}$  converge en loi vers une loi multinormale

$$\mathcal{N}_{pq}(O, (1 + \kappa)(P_{11} \otimes P_{22})).$$

(iii) Sous  $H_{1:n}$ ,  $\sqrt{n}vecR_{21}$  converge en loi vers une loi multinormale

$$\mathcal{N}_{pq}(vecA, (1 + \kappa)(P_{11} \otimes P_{22})).$$

**Démonstration:**

(i) Soit la matrice  $B = B_1 \otimes B_2$  avec  $B_1 = [I_p \ 0] : p \times m$  et  $B_2 = [0 \ I_q] : q \times m$ . Alors,  $BvecR_n = (B_1 \otimes B_2)vecR_n = vec(B_2 R_n B_1') = vecR_{21}$  et d'après le théorème 2.1.1, on a  $\sqrt{n}(vecR_{21} - vecP_{21})$  converge en loi vers  $\mathcal{N}_{pq}(0, (1 + \kappa) B \Lambda B')$ .

Il suffit alors d'expliciter la matrice  $B \Lambda B'$ . Pour cela, on reprend terme à terme la somme des matrices constituant  $\Lambda$  donnée dans 2.1.1.

• Considérons la matrice  $(I \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(I \otimes \mathcal{P})$  et calculons la matrice suivante:

$$\begin{aligned} \overset{o}{A} &= B(I \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(I \otimes \mathcal{P})B' \\ &= \sum_{ts}^m \sum_{ts}^m (B_1 \otimes B_2)(I \otimes \mathcal{P})(H_{tt} \otimes H_{tt}) \\ &\quad (\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})(H_{ss} \otimes H_{ss})(I \otimes \mathcal{P})(B'_1 \otimes B'_2) \\ &= \sum_{ts}^m (B_1 H_{tt})\mathcal{P}(B_1 H_{ss})' \otimes (B_2 \mathcal{P} H_{tt})\mathcal{P}(B_2 \mathcal{P} H_{ss})' \end{aligned}$$

puisque

$$B_1 H_{tt} = [D_{tt} \ 0] : p \times m = \begin{cases} 0 : p \times m & \text{si } t > p, \\ [D_{tt} \ 0] : p \times m & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec  $D_{tt} : p \times p$  ayant 1 à la position  $(t, t)$  et 0 ailleurs.

De même, on a

$$H_{ss} B'_1 = (B_1 H_{ss})' = \begin{cases} 0 : m \times p & \text{si } s > p, \\ [D_{ss} \ 0]' : m \times p & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc si  $t > p$  ou  $s > p$ , on obtient  $\overset{o}{A} = 0$ .

Pour  $1 \leq t \leq p$  et  $1 \leq s \leq p$ , on a

$$B_2 \mathcal{P} H_{tt} = [0 \ I_q] \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{tt} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = [\mathcal{P}_{21} D_{tt} \ 0] : q \times m,$$

d'où

$$(B_2 \mathcal{P} H_{tt})\mathcal{P}(B_2 \mathcal{P} H_{ss})' = [\mathcal{P}_{21} D_{tt} \ 0] \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{ss} \mathcal{P}_{12} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{P}_{21} D_{tt} \mathcal{P}_{11} D_{ss} \mathcal{P}_{12}$$

et

$$(B_1 H_{tt})\mathcal{P}(B_1 H_{ss})' = [D_{tt} \ 0] \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{ss} \\ 0 \end{pmatrix} = D_{tt} \mathcal{P}_{11} D_{ss}.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \overset{o}{A} &= \sum_{t=1}^p \sum_{s=1}^p (D_{tt} \mathcal{P}_{11} D_{ss}) \otimes (\mathcal{P}_{21} D_{tt} \mathcal{P}_{11} D_{ss} \mathcal{P}_{12}) \\ &= (I_p \otimes \mathcal{P}_{21}) E_p (\mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{11}) E_p (I_p \otimes \mathcal{P}_{12}). \end{aligned}$$

• Pour  $(\mathcal{P} \otimes I)E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes I)$ , calculons la matrice

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{B} &= B[(\mathcal{P} \otimes I)E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes I)]B' \\ &= \sum_{ts}^m (B_1 \otimes B_2)(\mathcal{P} \otimes I)(H_{tt} \otimes H_{tt})(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}) \\ &\quad (H_{ss} \otimes H_{ss})(\mathcal{P} \otimes I)(B'_1 \otimes B'_2) \\ &= \sum_{ts}^m (B_1 \mathcal{P} H_{tt}) \mathcal{P} (B_1 \mathcal{P} H_{ss})' \otimes (B_2 H_{tt}) \mathcal{P} (B_2 H_{ss})'. \end{aligned}$$

Ici encore, on a

$$B_2 H_{tt} = \begin{cases} 0 : q \times m & \text{si } t \leq p, \\ [0 \ G_{tt}] : q \times m & \text{pour } t > p, \end{cases}$$

où  $G_{tt} : q \times q$  ayant 1 à la position  $(t,t)$  et 0 ailleurs.

Donc, on obtient  $\overset{\circ}{B} = 0$  pour  $1 \leq t \leq p$  ou  $1 \leq s \leq p$ .

Pour  $t > p$  et  $s > p$ , on a

$$B_1 \mathcal{P} H_{tt} = [I_p \ 0] \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_{tt} \end{pmatrix} = [0 \ \mathcal{P}_{12} G_{tt}],$$

d'où

$$B_1 \mathcal{P} H_{tt} \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} \end{pmatrix} [0 \ \mathcal{P}_{12} G_{ss}]' = \mathcal{P}_{12} G_{tt} \mathcal{P}_{22} G_{ss} \mathcal{P}_{21}$$

et

$$(B_2 H_{tt}) \mathcal{P} (B_2 H_{ss})' = [0 \ G_{tt}] \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ G_{ss} \end{pmatrix} = G_{tt} \mathcal{P}_{22} G_{ss}.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{B} &= \sum_{t=p+1}^m \sum_{s=p+1}^m (\mathcal{P}_{12} G_{tt} \mathcal{P}_{22} G_{ss} \mathcal{P}_{21}) \otimes (G_{tt} \mathcal{P}_{22} G_{ss}) \\ &= (\mathcal{P}_{12} \otimes I_q) E_q (\mathcal{P}_{22} \otimes \mathcal{P}_{22}) E_q (\mathcal{P}_{21} \otimes I_q). \end{aligned}$$

• Pour la matrice  $(I \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes I)$ , on calcule une matrice  $\overset{\circ}{C}$  mais remarquons d'abord que

$$B_1 H_{tt} = [D_{tt} \ 0] : p \times m = \begin{cases} 0 : p \times m & \text{si } t > p, \\ [D_{tt} \ 0] : p \times m & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$B_2 H_{ss} = [0 \ G_{ss}] : q \times m = \begin{cases} 0 : p \times m & \text{si } 1 \leq s \leq p, \\ [0 \ G_{ss}] : q \times m & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{C} &= B(I \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes I)B' \\ &= \sum_{ts}^m (B_1 H_{tt} \mathcal{P})(B_1 \mathcal{P} H_{ss})' \otimes (B_2 \mathcal{P} H_{tt})(B_2 \mathcal{P} H_{ss})'.\end{aligned}$$

Donc, on obtient pour  $t > p$  ou  $1 \leq s \leq p$ ,  $\overset{\circ}{C} = 0$ .

Pour  $s > p$  et  $1 \leq t \leq p$ , on a

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{C} &= B(I \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes I)B' \\ &= \sum_{s=1}^p \sum_{t=p+1}^m (B_1 H_{tt} \mathcal{P} H_{ss} \mathcal{P} B_1') \otimes (B_2 \mathcal{P} H_{tt} \mathcal{P} H_{ss} B_2') \\ &= (I_p \otimes \mathcal{P}_{21})E_p(\mathcal{P}_{12} \otimes \mathcal{P}_{12})E_q(\mathcal{P}_{21} \otimes I_q)\end{aligned}$$

où

$$B_1 H_{tt} \mathcal{P} H_{ss} \mathcal{P} B_1' = D_{tt} \mathcal{P}_{12} G_{ss} \mathcal{P}_{21} \quad \text{et} \quad B_2 \mathcal{P} H_{tt} \mathcal{P} H_{ss} B_2' = \mathcal{P}_{21} D_{tt} \mathcal{P}_{21} G_{ss}.$$

• Pour la matrice  $(\mathcal{P} \otimes I)E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(I \otimes \mathcal{P})$ , on a

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{C}' &= B(\mathcal{P} \otimes I)E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(I \otimes \mathcal{P})B' \\ &= (\mathcal{P}_{12} \otimes I_q)E_q(\mathcal{P}_{21} \otimes \mathcal{P}_{21})E_p(I_p \otimes \mathcal{P}_{12}),\end{aligned}$$

puisque  $(\mathcal{P} \otimes I)E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(I \otimes \mathcal{P})$  est la transposée de la  $(\mathcal{P} \otimes I)E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(I \otimes \mathcal{P})$ .

• Par le même calcul, on obtient les matrices

$$\overset{\circ}{D} = B(I \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})B' = (I_p \otimes \mathcal{P}_{21})E_p(\mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{12})$$

et

$$\overset{\circ}{E} = B(\mathcal{P} \otimes I)E(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})B' = (\mathcal{P}_{12} \otimes \mathcal{P}_{22})E_q(\mathcal{P}_{21} \otimes I_q).$$

• Aussi, en utilisant la transposée, on a

$$\overset{\circ}{D}' = B(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(I \otimes \mathcal{P})B' = (\mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{21})E_p(I_p \otimes \mathcal{P}_{12})$$

et

$$\overset{\circ}{E}' = B(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})E(\mathcal{P} \otimes I)B' = (\mathcal{P}_{12} \otimes I_q)E_q(\mathcal{P}_{21} \otimes \mathcal{P}_{22}).$$

• D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{F} &= (B_1 \otimes B_2)(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})(B_1 \otimes B_2)' \\ &= (B_1 \mathcal{P} B_1') \otimes (B_2 \mathcal{P} B_2') = (\mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22}).\end{aligned}$$

• Enfin, en tenant compte de  $K_{mm}(B_1' \otimes B_2') = (B_2' \otimes B_1')K_{qp}$ , la matrice  $\overset{\circ}{G}$  est donnée par

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{G} &= (B_1 \otimes B_2)[(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})K_{mm}](B_1 \otimes B_2)' \\ &= (B_1 \otimes B_2)(\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})(B_2' \otimes B_1')K_{qp} \\ &= (B_1 \mathcal{P} B_2') \otimes (B_2 \mathcal{P} B_1)K_{qp} \\ &= (\mathcal{P}_{12} \otimes \mathcal{P}_{21})K_{qp}\end{aligned}$$

où  $K_{qp}$  est la matrice de commutation définie dans la propriété 1.1.1. Si on additionne maintenant le tout, on a

$$D = \frac{1}{2}[\overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B} + \overset{\circ}{C} + \overset{\circ}{C}'] + \overset{\circ}{F} + \overset{\circ}{G} - \overset{\circ}{D} - \overset{\circ}{D}' - \overset{\circ}{E}' - \overset{\circ}{E},$$

c'est-à-dire le résultat cherché.

(ii) Si  $H_0$  est vraie, c'est-à-dire  $\mathcal{P}_{12} = 0$ , on a alors

$$\sqrt{n}vecR_{21} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{pq}(O, (1 + \kappa)(\mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22})).$$

(iii) D'après la partie (i),  $\sqrt{n}vecR_{21}$  converge en loi vers une loi multinormale dont la matrice de covariance est  $(1 + \kappa)\mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22}$ , puisque tous les termes de la matrice  $D$ , autre que  $\mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22}$ , contiennent  $\mathcal{P}_{12}$  ou sa transposée et que les éléments de cette matrice sont par hypothèse de la forme  $a_{ij}/\sqrt{n}$ , pour  $i = p+1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, p$ .

D'autre part, en substituant la valeur de  $\mathcal{P}_{21}$ , on déduit que  $\sqrt{n}vecR_{21}$  converge en loi vers une loi multinormale de moyenne  $vecA$ . Par conséquent, par Serfling (1980) (voir lemme A, p.20),  $\sqrt{n}vecR_{21}$  converge en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_{pq}(vecA, (1 + \kappa)\mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22})$ .

C.Q.F.D.

On remarque que pour  $m = 2$  et pour  $\rho$  désignant le coefficient de corrélation simple, on a

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}[\rho^2 + \rho^2 + \rho^4 + \rho^4] - \rho^2 - \rho^2 - \rho^2 - \rho^2 + 1 + \rho^2 \\ &= (1 - \rho^2)^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $\sqrt{n}(r - \rho) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (1 + \kappa)(1 - \rho^2)^2)$ . On retrouve à nouveau le résultat du corollaire 2.1.1.

### 2.3. DISTRIBUTIONS ASYMPTOTIQUES DES MESURES

Avec les résultats de la section précédente, on peut établir les distributions asymptotiques des  $nRV^{(R)}$ ,  $nSL^{(R)}$  et  $nCN^{(R)}$  sous  $H_0$  et sous  $H_{1:n}$  convergeant vers  $H_0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  donnée par

$$H_{1:n} : \mathcal{P}_{21} = \frac{1}{\sqrt{n}} A = \left( \frac{a_{ij}}{\sqrt{n}} \right) \text{ avec } |a_{ij}| \leq 1/\sqrt{n},$$

où  $A$  est une matrice donnée de dimension  $q \times p$ ,  $i = p+1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, p$ .

Les démonstrations présentées reposent sur l'approche de Cléroux & Ducharme (1989) et d'Allaire & Lepage (1990).

#### 2.3.1. Sous $H_0$ .

**THÉORÈME 2.3.1.** *Soit  $R_n$  la matrice de corrélation d'un échantillon de taille  $n$  issu d'un vecteur aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_m)'$  dont la distribution est elliptique de paramètres  $\mu$  et  $V$ , de matrice corrélation  $\mathcal{P}$  et de coefficient d'aplatissement  $\kappa$ . Alors, sous l'hypothèse  $H_0$ , on a*

$$(i) \quad nRV^{(R)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1 + \kappa}{\sqrt{\text{tr}(\mathcal{P}_{11}^2) \text{tr}(\mathcal{P}_{22}^2)}} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_k \mu_j U_{kj}^2,$$

où les variables aléatoires  $U_{kj}$  sont indépendantes et de même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,  $k = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ ,

$$(ii) \quad nSL^{(R)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1 + \kappa}{p} \sum_{k=1}^p \lambda_k Z_k^2,$$

où les variables aléatoires  $Z_k^2$ ,  $k = 1, \dots, p$ , sont indépendantes et de même loi  $\chi_q^2$  avec  $q$  degrés de liberté,

$$(iii) \quad nCN^{(R)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1 + \kappa}{p} \chi_{pq}^2,$$

avec  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , et  $\mu_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ , étant les valeurs propres de  $\mathcal{P}_{11}$  et  $\mathcal{P}_{22}$  respectivement.

### Démonstration:

Les matrices  $R_{11}$  et  $R_{22}$  convergent en probabilité respectivement vers  $\mathcal{P}_{11}$  et  $\mathcal{P}_{22}$ . D'autre part, d'après la partie (ii) du théorème 2.2.1,  $\sqrt{n} \text{vec} R_{21}$  converge en loi vers le vecteur aléatoire  $Z$  de loi  $\mathcal{N}_{pq}(O, (1 + \kappa)(\mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22}))$ . Alors, par le théorème 4.4 de Billingsley (1968), on a

$$\begin{pmatrix} \sqrt{n} \text{vec} R_{21} \\ \text{vec} R_{11} \\ \text{vec} R_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} Z \\ \text{vec} \mathcal{P}_{11} \\ \text{vec} \mathcal{P}_{22} \end{pmatrix}.$$

$$(i) \quad \text{On a } RV^{(R)} = \frac{\text{tr}(R_{12}R_{21})}{\sqrt{\text{tr}(R_{11}^2)\text{tr}(R_{22}^2)}}. \text{ Comme}$$

$$n \text{tr}(R_{12}R_{21}) = (\sqrt{n} \text{vec} R_{21})' (\sqrt{n} \text{vec} R_{21}) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z'Z$$

et que la mesure  $RV^{(R)}$  est continue en tous ses arguments, on a alors

$$nRV^{(R)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{Z'Z}{\sqrt{\text{tr}(\mathcal{P}_{11}^2)\text{tr}(\mathcal{P}_{22}^2)}} = Y^{(1)}.$$

La forme quadratique  $Y^{(1)}$  devient ( Appendice A, théorème A.1.1)

$$\frac{(1 + \kappa)}{\sqrt{\text{tr}(\mathcal{P}_{11}^2)\text{tr}(\mathcal{P}_{22}^2)}} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^q l_{kj}^{(1)} U_{kj}^2 = Q^{(1)},$$

où pour  $k = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ , les quantités  $l_{kj}^{(1)}$  sont les valeurs propres de  $(\mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22})$  et par conséquent  $l_{kj}^{(1)} = \lambda_k \mu_j$ , et les  $U_{kj}$  sont des variables aléatoires indépendantes



et de même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . L'expression  $Q^{(1)}$  devient alors

$$Q^{(1)} = \frac{(1 + \kappa)}{\sqrt{\text{tr}(\mathcal{P}_{11}^2)\text{tr}(\mathcal{P}_{22}^2)}} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_k \mu_j U_{kj}^2.$$

(ii) On a  $SL^{(R)} = \frac{\text{tr}(R_{12}R_{22}^{-1}R_{21})}{\text{tr}(R_{11})}$ . Comme

$$n\text{tr}(R_{12}R_{22}^{-1}R_{21}) = (\sqrt{n}\text{vec}R_{21})'(I_p \otimes R_{22}^{-1})(\sqrt{n}\text{vec}R_{21}) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z'(I_p \otimes \mathcal{P}_{22}^{-1})Z,$$

la continuité de  $SL^{(R)}$  nous amène à conclure que

$$nSL^{(R)} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y^{(2)} = Z'(I_p \otimes \mathcal{P}_{22}^{-1})Z/p,$$

car  $\text{tr}R_{11} = p$ . La forme quadratique  $Y^{(2)}$  devient

$$Q^{(2)} = \frac{(1 + \kappa)}{p} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^q l_{kj}^{(2)} U_{kj}^2$$

où pour  $k = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ ,  $U_{kj}$  sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $l_{kj}^{(2)}$  sont les valeurs propres de  $(I_p \otimes \mathcal{P}_{22}^{-1})(\mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22}) = (\mathcal{P}_{11} \otimes I_q)$ .

Puisque les valeurs propres de  $(\mathcal{P}_{11} \otimes I_q)$  sont  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  et 1 avec multiplicité  $q$ , alors  $Q^{(2)}$  devient

$$Q^{(2)} = \frac{(1 + \kappa)}{p} \sum_{k=1}^p \lambda_k \sum_{j=1}^q U_{kj}^2 = \frac{(1 + \kappa)}{p} \sum_{k=1}^p \lambda_k Z_k^2$$

où les variables aléatoires  $Z_k^2 = \sum_{j=1}^q U_{kj}^2$ ,  $k = 1, \dots, p$ , sont indépendantes et de même loi  $\chi_q^2$ .

(iii) On a  $CN^{(R)} = \frac{\text{tr}(R_{11}^{-1}R_{12}R_{22}^{-1}R_{21})}{p}$ . Comme on peut écrire

$$n\text{tr}(R_{11}^{-1}R_{12}R_{22}^{-1}R_{21}) = (\sqrt{n}\text{vec}R_{21})'(R_{11} \otimes R_{22})^{-1}(\sqrt{n}\text{vec}R_{21})$$

et  $CN^{(R)}$  est continue en ses arguments, on obtient la convergence en loi de  $nCN^{(R)}$  vers

$$Q^{(3)} = \frac{Z'(\mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22})^{-1}Z}{p}.$$

Puisque la seule valeur propre de  $(\mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22})^{-1}(\mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22}) = (I_p \otimes I_q) = I_{pq}$  est 1 avec multiplicité  $pq$ , alors

$$Q^{(3)} = \frac{(1 + \kappa)}{p} \chi_{pq}^2$$

puisque la variable aléatoire  $\sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^q U_{kj}^2$  suit une loi  $\chi_{pq}^2$ .

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 2.3.1. *Sous les conditions du théorème 2.3.1 et sous l'hypothèse  $H_0$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(nRV^{(R)}) = (1 + \kappa)pq / \sqrt{\text{tr}(\mathcal{P}_{11}^2)\text{tr}(\mathcal{P}_{22}^2)},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(nSL^{(R)}) = (1 + \kappa)q,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(nCN^{(R)}) = (1 + \kappa)q$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(nRV^{(R)}) = 2(1 + \kappa)^2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(nSL^{(R)}) = 2q(1 + \kappa)^2 \text{tr}(\mathcal{P}_{11}^2) / p^2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(nCN^{(R)}) = 2(1 + \kappa)^2 q / p.$$

### Démonstration:

La démonstration résulte directement de loi asymptotique de chacune des mesures. En effet, comme  $nRV^{(R)}$ ,  $nSL^{(R)}$  et  $nCN^{(R)}$  convergent en loi respectivement vers les formes quadratiques  $Q^{(1)}$ ,  $Q^{(2)}$  et  $Q^{(3)}$  données dans la démonstration précédente, on a

$$\begin{aligned} E(Q^{(1)}) &= \frac{(1 + \kappa)}{\sqrt{\text{tr}(\mathcal{P}_{11}^2)\text{tr}(\mathcal{P}_{22}^2)}} \sum_{k=1}^p \lambda_k \sum_{l=1}^q \mu_l = \frac{(1 + \kappa)\text{tr}(\mathcal{P}_{11})\text{tr}(\mathcal{P}_{22})}{\sqrt{\text{tr}(\mathcal{P}_{11}^2)\text{tr}(\mathcal{P}_{22}^2)}} \\ &= \frac{(1 + \kappa)pq}{\sqrt{\text{tr}(\mathcal{P}_{11}^2)\text{tr}(\mathcal{P}_{22}^2)}}, \end{aligned}$$

$$E(Q^{(2)}) = \frac{(1 + \kappa)}{p} \sum_{k=1}^p \lambda_k q = (1 + \kappa)q,$$

et

$$E(Q^{(3)}) = \frac{(1 + \kappa)}{p} pq = (1 + \kappa)q.$$

De même, on trouve

$$\text{Var}(Q^{(1)}) = \frac{2(1 + \kappa)^2}{\text{tr}(\mathcal{P}_{11}^2)\text{tr}(\mathcal{P}_{22}^2)} \sum_{k=1}^p \lambda_k^2 \sum_{l=1}^q \mu_l^2 = 2(1 + \kappa)^2,$$

$$\text{Var}(Q^{(2)}) = 2 \frac{(1 + \kappa)^2}{(\text{tr} \mathcal{P}_{11})^2} q \text{tr}(\mathcal{P}_{11}^2) = 2q \frac{(1 + \kappa)^2}{p^2} \text{tr}(\mathcal{P}_{11}^2)$$

et

$$\text{Var}(Q^{(3)}) = \frac{2(1 + \kappa)^2}{p^2} pq = \frac{2(1 + \kappa)^2 q}{p}.$$

C.Q.F.D.

### 2.3.2. Sous $H_{1:n}$ .

THÉORÈME 2.3.2. *Sous  $H_{1:n}$  et si les conditions du théorème 2.1.1 sont satisfaites, on a*

$$(i) \quad nRV^{(R)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1 + \kappa}{\sqrt{\text{tr}(\mathcal{P}_{11}^2) \text{tr}(\mathcal{P}_{22}^2)}} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_k \mu_j U_{kj}^2,$$

où les variables aléatoires  $U_{kj}$  sont indépendantes et de loi  $\mathcal{N}(\delta_{kj}, 1)$ ,  $k = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ ,

$$(ii) \quad nSL^{(R)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1 + \kappa}{p} \sum_{k=1}^p \lambda_k \chi_{k(q)}^2(\delta_k^2),$$

où les variables aléatoires  $\chi_{k(q)}^2(\delta_k^2)$ ,  $k = 1, \dots, p$ , sont indépendantes et suivent des lois  $\chi^2$  décentrées avec  $q$  degrés de liberté et paramètre de décentralité  $\delta_k^2$ .

$$(iii) \quad nCN^{(R)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1 + \kappa}{p} \chi_{pq}^2(\delta^2),$$

où la variable aléatoire  $\chi_{pq}^2(\delta^2)$  suit une loi  $\chi^2$  avec  $pq$  degrés de liberté et paramètre de décentralité  $\delta^2$ , avec  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, p$ , et  $\mu_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ , étant les valeurs propres de  $\mathcal{P}_{11}$  et  $\mathcal{P}_{22}$  respectivement,  $a_k$  et  $b_j$  leurs vecteurs propres orthonormés associés et

$$\delta_{kj}^2 = \frac{\text{tr}(A' b_j b_j' \mathcal{P}_{22}^{-1} A \mathcal{P}_{11}^{-1} a_k a_k')}{1 + \kappa}, \quad k = 1, \dots, p \text{ et } j = 1, \dots, q,$$

$$\delta_k^2 = \frac{\text{tr}(A' \mathcal{P}_{22}^{-1} A \mathcal{P}_{11}^{-1} a_k a_k')}{1 + \kappa}, \quad k = 1, \dots, p,$$

$$\delta^2 = \frac{\text{tr}(A' \mathcal{P}_{22}^{-1} A \mathcal{P}_{11}^{-1})}{1 + \kappa}.$$

### Démonstration:

La démonstration est analogue à celle du théorème 2.3.1. Un paramètre de décentralité est introduit puisque le vecteur de la moyenne de la loi asymptotique de  $\sqrt{n}vecR_{21}$  est non nul.

- (i) En utilisant la démonstration du théorème 2.3.1, la distribution asymptotique de  $nRV^{(R)}$  est celle de la forme quadratique

$$Y^{(1)} = \frac{Z'Z}{\sqrt{tr(\mathcal{P}_{11}^2)tr(\mathcal{P}_{22}^2)}}$$

où Z est un vecteur aléatoire de loi  $\mathcal{N}_{pq}\left(vecA, (1 + \kappa)(\mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22})\right)$ . Or la distribution de  $Y^{(1)}$  est donnée (voir Appendice A, théorème A.1.1) par

$$Q^{(1)} = \frac{1 + \kappa}{\sqrt{tr(\mathcal{P}_{11}^2)tr(\mathcal{P}_{22}^2)}} \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^q l_{kj}^{(1)} U_{kj}^2$$

où, pour  $k = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ , les variables aléatoires  $U_{kj}$  sont indépendantes et de loi  $\mathcal{N}(\delta_{kj}, 1)$  avec

$$\delta_{kj}^2 = \frac{tr(A'b_j b_j' \mathcal{P}_{22}^{-1} A \mathcal{P}_{11}^{-1} a_k a_k')}{1 + \kappa}$$

avec  $k=1, \dots, p$  et  $j=1, \dots, q$ .

En effet,  $l_{kj}^{(1)} = \lambda_k \mu_j$  où  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  et  $\mu_1, \dots, \mu_q$  sont les valeurs propres respectivement de  $\mathcal{P}_{11}$  et  $\mathcal{P}_{22}$ . Désignons par  $a_k$  et  $b_j$  les vecteurs propres orthonormés associés respectivement à  $\lambda_k$  et  $\mu_j$ . Le vecteur  $v_{kj} = a_k \otimes b_j$  correspond alors au vecteur propre orthonormé associé à  $l_{kj}^{(1)} = \lambda_k \mu_j$ . D'après le théorème A.1.1 et le rappel sur la décomposition spectrale d'une matrice (voir Appendice A), on a

$$\begin{aligned} \delta_{kj}^2 &= \frac{(vecA)' [v_{kj} v_{kj}' (\mathcal{P}_{11}^{-1} \otimes \mathcal{P}_{22}^{-1})] (vecA)}{1 + \kappa} \\ &= \frac{(vecA)' [(a_k \otimes b_j) (a_k' \otimes b_j') (\mathcal{P}_{11}^{-1} \otimes \mathcal{P}_{22}^{-1})] (vecA)}{1 + \kappa} \\ &= \frac{(vecA)' (a_k a_k' \mathcal{P}_{11}^{-1} \otimes b_j b_j' \mathcal{P}_{22}^{-1}) (vecA)}{1 + \kappa} \\ &= \frac{tr(A'b_j b_j' \mathcal{P}_{22}^{-1} A \mathcal{P}_{11}^{-1} a_k a_k')}{1 + \kappa} \end{aligned}$$

avec  $k=1, \dots, p$  et  $j=1, \dots, q$ .

(ii) La distribution asymptotique  $nSL^{(R)}$  est celle de la forme quadratique

$$Y^{(2)} = \frac{Z(I_p \otimes P_{22}^{-1})Z'}{p}$$

qui devient

$$Q^{(2)} = \frac{1 + \kappa}{p} \sum_{k=1}^p \lambda_k \mathcal{X}_q^2(\delta_k^2),$$

où les  $p$  variables aléatoires  $\mathcal{X}_q^2(\delta_1^2), \dots, \mathcal{X}_q^2(\delta_p^2)$  sont indépendantes, de même degré de liberté  $q$  et de paramètre de décentralité  $\delta_k^2$  donné par

$$\delta_k^2 = \frac{\text{tr}(A' P_{22}^{-1} A P_{11}^{-1} a_k a_k')}{1 + \kappa}$$

avec  $k=1, \dots, p$ .

En effet, comme  $e_l = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)' \in \mathbb{R}^q$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 de multiplicité  $q$ , on a, par l'indépendance des  $\bar{U}_{kj}$ ,

$$\begin{aligned} \delta_k^2 &= \sum_{j=1}^q \delta_{kj}^2 = \sum_{j=1}^q \frac{(\text{vec} A)' [(a_k \otimes e_j)(a_k' \otimes e_j') (P_{11}^{-1} \otimes P_{22}^{-1})] (\text{vec} A)}{1 + \kappa} \\ &= \sum_{j=1}^q \frac{(\text{vec} A)' [(a_k a_k' \otimes e_j e_j' P_{11}^{-1} \otimes P_{22}^{-1})] (\text{vec} A)}{1 + \kappa} \\ &= \sum_{j=1}^q \frac{(\text{vec} A)' [(a_k a_k') \otimes H_{jj} (P_{11}^{-1} \otimes P_{22}^{-1})] (\text{vec} A)}{1 + \kappa} \\ &= \frac{(\text{vec} A)' [(a_k a_k') \otimes I_q (P_{11}^{-1} \otimes P_{22}^{-1})] (\text{vec} A)}{1 + \kappa} \\ &= \frac{\text{tr}(A' P_{22}^{-1} A P_{11}^{-1} a_k a_k')}{1 + \kappa} \end{aligned}$$

avec  $k=1, \dots, p$ .

(iii) La distribution asymptotique  $nCN^{(R)}$  est celle de la forme quadratique

$$Q^{(3)} = \frac{Z(P_{11}^{-1} \otimes P_{22}^{-1})Z'}{p}$$

qui devient  $((1 + \kappa)/p) \mathcal{X}_{pq}^2(\delta^2)$ , où

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q \frac{\text{tr}(A' e_l e_l' P_{22}^{-1} A P_{11}^{-1} e_k e_k')}{1 + \kappa} \\ &= \frac{\text{tr}(A' P_{22}^{-1} A P_{11}^{-1})}{1 + \kappa}. \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

## 2.4. TESTS ET APPLICATIONS

Le théorème 2.3.1 permet de construire trois tests asymptotiques pour tester l'hypothèse nulle  $H_0$ . À l'aide des mesures d'Escoufier (1973), de Stewart & Love (1968) et Cramer & Nicewander (1979), les régions critiques des tests de niveau asymptotique  $\alpha$  sont donnés respectivement par

$$\text{rejeter } H_0 \quad \text{si } nRV_{ij}^{(R)} > C_\alpha^{(1)},$$

$$\text{rejeter } H_0 \quad \text{si } nSL^{(R)} > C_\alpha^{(2)}$$

et

$$\text{rejeter } H_0 \quad \text{si } nCN^{(R)} > C_\alpha^{(3)}$$

où  $C_\alpha^{(h)}$ , pour  $h = 1, 2, 3$ , est le quantile d'ordre  $1 - \alpha$  de la distribution correspondante donnée par le théorème 2.3.1.

On a  $M^{(R)} \xrightarrow{\mathcal{P}} \rho M^{(R)}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , pour  $M = RV, SL$  ou  $CN$ . Lorsque  $H_0$  est fausse,  $\rho M^{(R)} > 0$  et alors pour  $M = RV, SL$  ou  $CN$  et  $h = 1, 2, 3$ , on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(nM^{(R)} > C_\alpha^{(h)}) = 1.$$

Les trois tests proposés sont donc convergents.

Cependant, la fonction de répartition d'une somme pondérée de lois  $\mathcal{X}^2$  indépendantes ne possède pas une forme explicite. On évalue numériquement les quantiles donnés par le théorème 2.3.1 à l'aide de l'algorithme d'Imhof (1961) dont un programme en Fortran est donné dans Koerts & Abrahams (1969), chapitre 9.

Puisqu'en général certains paramètres sont inconnus, on les remplace par des estimateurs convergents, c'est-à-dire  $\mathcal{P}_{11}$ ,  $\mathcal{P}_{22}$ ,  $\mu_l$  et  $\lambda_k$  sont remplacés par  $R_{11}$ ,  $R_{22}$  et leur valeurs propres respectives  $\hat{\mu}_l$  et  $\hat{\lambda}_k$ . Dans une étude faite, dans un cadre général, par Roy & Cléroux (1993) la précision des valeurs critiques obtenues par l'algorithme d'Imhof (1961) en remplaçant les paramètres inconnus par des estimateurs convergents est analysée. Les auteurs montrent que le niveau exact obtenu en utilisant l'algorithme d'Imhof (1961) converge en probabilité, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers le niveau nominal.

### 2.4.1. Algorithme de calcul.

L'algorithme suivant est adapté de Cléroux & Ducharme (1989) et résume la procédure d'utilisation des tests asymptotiques décrits ci-haut.

On considère l'échantillon

$$\begin{pmatrix} X_1^{[1]} \\ X_1^{[2]} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n^{[1]} \\ X_n^{[2]} \end{pmatrix}$$

où  $X_i^{[1]}$ :  $p \times 1$  et  $X_i^{[2]}$ :  $q \times 1$  pour  $i=1, \dots, n$ .

**Étape 1:** Calcul des quatre premiers moments pour chaque composante  $k$ ,  $k=1, \dots, m$ , du vecteur

$$\bar{X}_j^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^{(k)})^j, \quad j=1, \dots, 4,$$

et des quantités

$$d_2^{(k)} = \bar{X}_2^{(k)} - (\bar{X}_1^{(k)})^2,$$

$$d_4^{(k)} = \bar{X}_4^{(k)} - 4\bar{X}_1^{(k)}\bar{X}_3^{(k)} - 3(\bar{X}_2^{(k)})^2 + 12\bar{X}_2^{(k)}(\bar{X}_1^{(k)})^2 - 6(\bar{X}_1^{(k)})^4,$$

$\hat{\kappa}^{(k)} = \frac{d_4^{(k)}}{3(d_2^{(k)})^2} - 1$ , l'estimateur du coefficient d'aplatissement de la  $k$  ième composante,

et enfin  $\hat{\kappa} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \hat{\kappa}^{(k)}$  (voir Muirhead & Waternaux (1980)).

**Étape 2:** Former la matrice de covariance échantillonnale

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \quad \text{où } S_{11} : p \times p, \quad S_{22} : q \times q$$

et en déduire la matrice de corrélation

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \quad \text{où } R_{11} : p \times p \text{ et } R_{22} : q \times q.$$

**Étape 3:** Calculer

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad RV^{(R)} &= \frac{\text{tr}(R_{12}R'_{12})}{\sqrt{\text{tr}(R_{11}^2)\text{tr}(R_{22}^2)}}, \\
 \text{(ii)} \quad SL^{(R)} &= \frac{\text{tr}(R_{12}R_{22}^{-1}R'_{12})}{p}, \\
 \text{(iii)} \quad CN^{(R)} &= \frac{\text{tr}(R_{11}^{-1}R_{12}R_{22}^{-1}R'_{12})}{p}.
 \end{aligned}$$

**Étape 4:** Calculer les valeurs propres  $\hat{\lambda}_k$  et  $\hat{\mu}_j$  de  $R_{11}$  et  $R_{22}$  respectivement.

**Étape 5:** Utiliser l'algorithme d'Imhof (1961) pour obtenir, à l'aide du théorème 2.3.1, le  $1 - \alpha$  quantile et le point critique  $C_\alpha^{(h)}$  pour l'un ou l'autre des tests choisis (pour  $h=1, 2, 3$ ).

**Étape 6:** Selon le test utilisé,

$$\text{rejeter } H_0 \text{ si } nRV^{(R)} > C_\alpha^{(1)},$$

$$\text{rejeter } H_0 \text{ si } nSL^{(R)} > C_\alpha^{(2)}$$

ou

$$\text{rejeter } H_0 \text{ si } nCN^{(R)} > C_\alpha^{(3)}.$$

#### 2.4.2. Un exemple.

L'exemple qu'on considère maintenant a été traité par Cléroux & Ducharme (1989) en utilisant la mesure d'Escoufier (1973) basée sur la matrice de covariance. Toutefois, les données indiquent que les variances des variables sont très différentes et n'ont pas la même échelle de mesure. Même si on centre et réduit chaque variable, on ne peut appliquer la mesure d'Escoufier (1973) ou celle de Stewart & Love (1968), basées sur la matrice de covariance échantillonnale parce que ces mesures ne sont pas invariantes par rapport aux transformations linéaires. Mais, basées sur la matrice de corrélation échantillonnale, les trois mesures étudiées dans ce chapitre sont invariantes aux changements d'échelle et de position et par conséquent, elles s'adaptent parfaitement à cet exemple. Cette propriété constitue un avantage important par rapport aux tests paramétriques d'absence de liaison proposés par Cléroux & Ducharme (1989)



ou par Allaire & Lepage (1990). D'ailleurs, les derniers auteurs soulèvent ce problème de la nature de la matrice utilisée par les trois mesures.

On considère donc l'ensemble de données de Werner, Tolls, Hultin & Mellecker (1970) que l'on peut aussi trouver dans BMDP Software (1983), p.38. Les données sont constituées des résultats d'analyses sanguines de 188 patients. Pour chaque patient, on mesure 8 variables: âge, taille, poids, utilisation de pilule anticonceptionnelle, cholestérol, albumine, calcium et acide urique. La variable pilule anticonceptionnelle, qui est une variable binaire, n'est pas considérée ici. De plus, 7 vecteurs sont omis à cause d'observations manquantes. Ainsi, la taille de l'échantillon est réduite à  $n = 181$ . Les 7 variables considérées se regroupent naturellement en deux sous-ensembles de variables. Le premier est désigné par le sous-vecteur  $X^{[1]}$  constitué des trois premières variables (biologiques). Le deuxième est désigné par le sous-vecteur  $X^{[2]}$  constitué des quatre dernières variables (biochimiques). On a donc deux sous-vecteurs de dimension respective  $p=3$  et  $q=4$  (avec  $p+q = m = 7$ ).

À l'aide de chacun des trois tests proposés, on rejette très fortement la non-association entre les deux sous-vecteurs. Le tableau 2.1 donne les différentes valeurs des statistiques correspondantes, leurs points critiques au niveau nominal 5% et les niveaux critiques.

	Escoufier $nRV^{(R)}$	Stewart & Love $nSL^{(R)}$	Cramer & Nicewander $nCN^{(R)}$
Valeur des statistiques	16,63	22,48	20,12
Point critique $C_{0,05}^{(h)}$	6,83	9,04	8,62
Niveau critique	$4,06 \times 10^{-5}$	$3,57 \times 10^{-6}$	$7,51 \times 10^{-6}$

TABLEAU 2.1. Tests d'absence de liaison basés sur la matrice de corrélation, points critiques et niveaux critiques.

En utilisant les tests proposés par Allaire & Lepage (1990), basés sur la matrice de covariance échantillonnale, on rejette également la non-association entre les deux sous-vecteurs. Le tableau 2.2 donne aussi les différentes valeurs des statistiques correspondantes, leurs points critiques au niveau 5% et les niveaux critiques.

	Escoufier $nRV^{(C)}$	Stewart & Love $nSL^{(C)}$	Cramer & Nicewander $nCN^{(C)}$
Valeur des statistiques	9,31	30,14	20,12
Point critique $C_{0,05}^{(h)}$	5,03	10,53	8,62
Niveau critique	$6,51 \times 10^{-3}$	$8,28 \times 10^{-6}$	$7,51 \times 10^{-6}$

TABLEAU 2.2. Tests d'absence de liaison basés sur la matrice covariance, points critiques et niveaux critiques.

## 2.5. ETUDE EXPÉRIMENTALE

À l'aide d'une simulation, on va évaluer le comportement des trois tests développés précédemment et les comparer aux trois tests compétiteurs étudiés par Allaire & Lepage (1990).

On utilise la méthode de Monte Carlo pour comparer le niveau et la puissance expérimentalement. Cette étude est réalisée à titre indicatif puisqu'on se limite seulement au cas  $p = 2$ ,  $q = 2$  ( $p+q = m$ ) et au niveau 5%. Le nombre d'échantillons générés est 10000 pour trois types de distributions multivariées elliptiques: une loi multinormale, deux lois multinormales  $\epsilon$ -contaminées ( $\epsilon = 0,05$  et  $0,1$ ) et deux lois  $t$  multivariées de degrés de liberté 25 et 5 respectivement. Elles sont utilisées avec la même matrice de covariance  $\Sigma$  telle que

$$\Sigma_{11} = I_p, \Sigma_{22} = I_q \text{ et } \Sigma_{12} = \Sigma'_{21} = C_{00}, C_{10}, C_{15} \text{ et } C_{20}$$

où les matrices  $C_{xy}$  représentent les matrices  $p \times q$  dont tous les éléments sont égaux à  $0,xy$ . Par exemple, tous les éléments de  $C_{15}$  sont égaux à  $0,15$ . Ce type de matrices de covariance a été utilisé par Cléroux, Lazraq & Lepage (1995).

Ainsi, les distributions utilisées sont les suivantes. La distribution multinormale  $\mathcal{N}_4(0, \Sigma)$  avec un coefficient d'aplatissement  $\kappa = 0$ . La distribution multinormale  $\epsilon$ -contaminée peut s'écrire comme (voir Johnson (1987), p.55)

$$(1 - \epsilon)\mathcal{N}_4(O, V) + \epsilon\mathcal{N}_4(O, \sigma^2 V) \text{ avec } \Sigma = (1 - \epsilon + \epsilon\sigma^2)V.$$

En fixant  $\sigma^2 = 0,25$  et en considérant  $\epsilon = 0,05$  et  $\epsilon = 0,1$ , on obtient respectivement  $\kappa = 0,028$  et  $\kappa = 0,059$ . La distribution  $t$  multivariée avec  $\nu$  degrés de liberté et

paramètre  $V$  s'obtient (voir Johnson (1987), p.118) par

$$Y = \left( \sqrt{\frac{S}{\nu}} \right)^{-1} Z \quad (2.5.1)$$

où  $Z$  suit une loi  $\mathcal{N}_4(0, V)$ ,  $S$  suit une loi  $\chi^2_\nu$ ,  $Z$  et  $S$  sont indépendantes,  $\Sigma = \nu V / (\nu - 2)$  et  $\kappa = 2 / (\nu - 4)$ . Par conséquent, pour  $\nu = 25$  et  $\nu = 5$  on trouve respectivement  $\kappa = 0,095$  et  $\kappa = 2$ . On a choisi  $\nu = 5$  afin de considérer une distribution dont les ailes sont plus rabattues que celles d'une distribution multinormale.

Afin de générer des nombres aléatoires, on a utilisé le programme GGNSM provenant de la programmathèque IMSL. Pour chaque taille échantillonnale, on simule d'abord à l'aide GGNSM 10000 germes indépendants. Ensuite, à l'aide de programmes d'IMSL, on a généré 10000 échantillons indépendants selon la loi multinormale et les lois  $\chi^2_{25}$  et  $\chi^2_5$ .

Pour générer une distribution  $t$  multivariée avec  $\nu$  degrés de liberté (notée  $t_\nu$ ), on génère  $n$  observations d'un vecteur aléatoire  $Z$  d'une loi  $\mathcal{N}_4(O, V)$  où  $V = \Sigma(\nu - 2) / \nu$  et  $n$  observations indépendantes de  $Z$  d'une variable aléatoire  $S$  de loi  $\chi^2_\nu$ . En appliquant la relation 2.5.1 à chacune des  $n$  paires observations  $Z$  et  $S$ , on obtient  $n$  observations d'une distribution  $t$  multivariée avec  $\nu$  degrés de liberté.

Pour générer des nombres aléatoires selon une loi multinormale  $\epsilon$ -contaminée, on a suivi la procédure décrite dans Muirhead (1982), p.33, et dans Johnson (1987), p.118. On génère d'abord une variable aléatoire  $U$  de loi uniforme  $(0,1)$ . Si  $U \leq (1 - \epsilon)$ , on génère le vecteur aléatoire  $X$  de loi  $\mathcal{N}_4(O, V)$  avec  $V = \Sigma / (1 - \epsilon + \sigma^2)$ , sinon, on génère le vecteur aléatoire  $X$  de loi  $\mathcal{N}_4(O, \sigma^2 V)$  avec  $\sigma^2 V = \sigma^2 \Sigma / (1 - \epsilon + \sigma^2)$ .

Les tableaux 2.3, 2.4 et 2.5 présentent les résultats de la simulation pour les cinq distributions. Les lois  $y$  sont disposées selon l'ordre croissant de leur coefficient d'aplatissement. De la distribution multinormale à la distribution  $t_5$ , on a  $\kappa = 0, 0,028, 0,059, 0,095$  et  $2$ . Des tailles échantillonnales de 50, 100, 150, 200, 250, 300 et 1000 sont considérées. Afin de pouvoir juger du niveau expérimental des cinq tests asymptotiques et de leur puissance expérimentale, un niveau expérimental sera jugé acceptable si le niveau nominal 5% appartient à l'intervalle de confiance au niveau 95%. Ceci sera réalisé lorsque le niveau expérimental, correspondant à la colonne  $C_{00}$ , varie entre 456 et 544.

Les résultats de cette étude font apparaître que pour des distributions présentant des ailes plus rabattues que celles d'une loi multinormale, les niveaux expérimentaux ne sont acceptables que pour de très grandes tailles échantillonnales. Pour ce type de distributions, les cinq tests asymptotiques convergent lentement, en fonction de la taille  $n$ , vers un niveau acceptable. Cependant, les tests basés sur la matrice de corrélation échantillonnale convergent plus rapidement que ceux basés sur la matrice de covariance échantillonnale. Ceci est mis en évidence par l'étude expérimentale avec la distribution  $t_5$  dont le coefficient d'aplatissement est 2. On peut le constater en examinant les résultats expérimentaux pour la distribution  $t_5$  donnés dans les tableaux 2.3, 2.4 et notamment dans le tableau 2.5 pour la taille 1000. Il ressort donc de cette étude expérimentale qu'on devrait utiliser ces tests avec prudence lorsque la population sous-jacente suit une loi elliptique avec des ailes plus rabattues que celles d'une loi multinormale.

Quant à la puissance expérimentale, mis à part le cas de la distribution  $t_5$  où les comparaisons ne pourraient se faire que pour de très grandes tailles échantillonnales, on peut conclure que globalement les deux groupes de tests  $nM^{(R)}$  et  $nM^{(C)}$ , pour  $M = RV, SL$  et  $CN$ , sont équivalents. Aussi, on note que dans les cinq cas, la puissance expérimentale de chaque test croît au fur et à mesure qu'on s'éloigne de l'hypothèse nulle  $C_{00}$ , c'est-à-dire que la puissance expérimentale croît avec la valeur  $xy$  des matrices  $C_{xy}$ . De plus, plus on s'éloigne de l'hypothèse de multinormalité plus la puissance expérimentale des cinq tests diminue. Elle apparaît comme une fonction décroissante du coefficient d'aplatissement.

De façon générale, on peut dire que le test construit avec la mesure de Cramer & Nicewander (1979) ( c'est-à-dire les tests  $nCN^{(R)} = nCN^{(C)}$  ) se comporte mieux que ceux construits avec les deux autres mesures. Il stabilise le niveau expérimental à un seuil acceptable, et de plus, sa puissance expérimentale augmente plus rapidement que pour ceux avec les deux autres mesures.

n	Tests	Multinormale									0,1-contaminée						0,05-contaminée						0,1-contaminée						t avec $\nu=25$						t avec $\nu=5$														
		C <sub>00</sub>			C <sub>10</sub>			C <sub>15</sub>			C <sub>20</sub>			C <sub>00</sub>			C <sub>10</sub>			C <sub>15</sub>			C <sub>20</sub>			C <sub>00</sub>			C <sub>10</sub>			C <sub>15</sub>			C <sub>20</sub>			C <sub>00</sub>			C <sub>10</sub>			C <sub>15</sub>			C <sub>20</sub>		
		C <sub>00</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>15</sub>	C <sub>20</sub>	C <sub>00</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>15</sub>	C <sub>20</sub>	C <sub>00</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>15</sub>	C <sub>20</sub>	C <sub>00</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>15</sub>	C <sub>20</sub>	C <sub>00</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>15</sub>	C <sub>20</sub>	C <sub>00</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>15</sub>	C <sub>20</sub>	C <sub>00</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>15</sub>	C <sub>20</sub>	C <sub>00</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>15</sub>	C <sub>20</sub>	C <sub>00</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>15</sub>	C <sub>20</sub>	C <sub>00</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>15</sub>	C <sub>20</sub>								
50	nRV <sup>(C)</sup>	587	1854	3749	6207	596	1839	3707	6135	634	1884	3692	6148	625	1828	3644	5935	625	1828	3644	5935	625	1828	3644	5935	625	1828	3644	5935	892	1705	2925	4584	892	1705	2925	4584	892	1705	2925	4584								
	nSL <sup>(C)</sup>	601	1853	3773	6301	608	1826	3689	6179	666	1860	3652	6209	619	1777	3580	6028	619	1777	3580	6028	619	1777	3580	6028	619	1777	3580	6028	691	1479	2648	4504	691	1479	2648	4504	691	1479	2648	4504								
	nCN <sup>(C)</sup>	579	1818	3759	6412	625	1800	3713	6340	672	1823	3677	6275	603	1781	3557	6126	603	1781	3557	6126	603	1781	3557	6126	603	1781	3557	6126	562	1345	2486	4371	562	1345	2486	4371	562	1345	2486	4371								
	nRV <sup>(R)</sup>	581	1837	3701	6178	622	1814	3684	6088	644	1836	3614	6067	619	1791	3605	5881	619	1791	3605	5881	619	1791	3605	5881	619	1791	3605	5881	697	1512	2698	4391	697	1512	2698	4391	697	1512	2698	4391								
	nSL <sup>(R)</sup>	578	1838	3769	6296	625	1805	3705	6164	648	1846	3641	6181	621	1794	3594	6005	621	1794	3594	6005	621	1794	3594	6005	621	1794	3594	6005	638	1427	2562	4380	638	1427	2562	4380	638	1427	2562	4380								
	nCN <sup>(R)</sup>	579	1818	3759	6412	625	1800	3713	6340	672	1823	3677	6275	603	1781	3557	6126	603	1781	3557	6126	603	1781	3557	6126	603	1781	3557	6126	562	1345	2486	4371	562	1345	2486	4371	562	1345	2486	4371								
100	nRV <sup>(C)</sup>	539	3324	6752	9219	532	3171	6541	9109	611	3207	6429	9030	595	3158	6358	8942	595	3158	6358	8942	595	3158	6358	8942	595	3158	6358	8942	794	2361	4503	6941	794	2361	4503	6941	794	2361	4503	6941								
	nSL <sup>(C)</sup>	540	3331	6767	9301	534	3165	6631	9200	599	3216	6483	9131	568	3145	6418	9026	568	3145	6418	9026	568	3145	6418	9026	667	2219	4437	6981	667	2219	4437	6981	667	2219	4437	6981												
	nCN <sup>(C)</sup>	544	3311	6832	9376	532	3188	6683	9099	593	3197	6577	9228	572	3087	6476	9152	572	3087	6476	9152	572	3087	6476	9152	556	2072	4380	7078	556	2072	4380	7078	556	2072	4380	7078												
	nRV <sup>(R)</sup>	551	3299	6689	9205	558	3174	6543	9299	609	3212	6420	9025	575	3092	6333	8951	575	3092	6333	8951	575	3092	6333	8951	682	2202	4385	6879	682	2202	4385	6879	682	2202	4385	6879												
	nSL <sup>(R)</sup>	547	3296	6747	9302	532	3172	6635	9203	596	3207	6486	9130	557	3115	6413	9018	557	3115	6413	9018	557	3115	6413	9018	623	2128	4377	6943	623	2128	4377	6943	623	2128	4377	6943												
	nCN <sup>(R)</sup>	544	3311	6832	9376	532	3188	6683	9299	593	3197	6577	9228	572	3087	6476	9152	572	3087	6476	9152	572	3087	6476	9152	556	2072	4380	7078	556	2072	4380	7078	556	2072	4380	7078												
150	nRV <sup>(C)</sup>	532	4756	8583	9881	535	4667	8448	9868	552	4493	8327	9842	557	4426	8263	9812	557	4426	8263	9812	557	4426	8263	9812	770	3047	5866	8371	770	3047	5866	8371	770	3047	5866	8371												
	nSL <sup>(C)</sup>	538	4786	8637	9898	541	4654	8502	9894	569	4541	8363	9875	543	4440	8327	9836	543	4440	8327	9836	543	4440	8327	9836	637	2948	5861	8429	637	2948	5861	8429	637	2948	5861	8429												
	nCN <sup>(C)</sup>	535	4814	8722	9907	542	4658	8583	9912	558	4524	8425	9897	535	4465	8390	9868	535	4465	8390	9868	535	4465	8390	9868	578	2832	5851	8515	578	2832	5851	8515	578	2832	5851	8515												
	nRV <sup>(R)</sup>	527	4767	8595	9878	532	4599	8433	9866	566	4486	8301	9848	549	4387	8274	9810	549	4387	8274	9810	549	4387	8274	9810	652	2942	5773	8371	652	2942	5773	8371	652	2942	5773	8371												
	nSL <sup>(R)</sup>	538	4776	8632	9893	543	4634	8503	9893	579	4503	8375	9872	541	4422	8345	9838	541	4422	8345	9838	541	4422	8345	9838	609	2895	5821	8426	609	2895	5821	8426	609	2895	5821	8426												
	nCN <sup>(R)</sup>	535	4814	8722	9907	542	4658	8583	9912	558	4524	8425	9897	535	4465	8390	9868	535	4465	8390	9868	535	4465	8390	9868	578	2832	5851	8515	578	2832	5851	8515	578	2832	5851	8515												

Tableau 2.3. Puissance expérimentale (x10000) des tests au niveau 5%

pour des distributions multivariées de structure de covariance donnée avec  $p = 2$  et  $q = 2$ .

n	Tests	Multinormale						0,05-contaminée						0,1-contaminée						t avec $\nu=25$						t avec $\nu=5$							
		C <sub>00</sub>		C <sub>10</sub>		C <sub>15</sub>		C <sub>20</sub>		C <sub>00</sub>		C <sub>10</sub>		C <sub>15</sub>		C <sub>20</sub>		C <sub>00</sub>		C <sub>10</sub>		C <sub>15</sub>		C <sub>20</sub>		C <sub>00</sub>		C <sub>10</sub>		C <sub>15</sub>		C <sub>20</sub>	
		C <sub>00</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>15</sub>	C <sub>20</sub>	C <sub>00</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>15</sub>	C <sub>20</sub>	C <sub>00</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>15</sub>	C <sub>20</sub>	C <sub>00</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>15</sub>	C <sub>20</sub>	C <sub>00</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>15</sub>	C <sub>20</sub>	C <sub>00</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>15</sub>	C <sub>20</sub>	C <sub>00</sub>	C <sub>10</sub>	C <sub>15</sub>	C <sub>20</sub>				
200	nRV <sup>(C)</sup>	522	6138	9480	9985	517	6043	9423	9979	516	5808	9345	9979	537	5685	9264	9974	692	3707	7053	9165	537	5685	9264	9974	692	3707	7053	9165				
	nSL <sup>(C)</sup>	512	6167	9515	9988	528	6068	9458	9984	518	5876	9377	9987	533	5700	9301	9981	628	3658	7061	9228	533	5700	9301	9981	628	3658	7061	9228				
	nCN <sup>(C)</sup>	522	6194	9533	9992	536	6107	9482	9993	523	5852	9414	9989	521	5731	9339	9984	544	3602	7060	9299	521	5731	9339	9984	544	3602	7060	9299				
	nRV <sup>(R)</sup>	514	6120	9479	9988	535	6048	9421	9979	510	5824	9328	9980	523	5661	9261	9975	626	3619	6992	9170	523	5661	9261	9975	626	3619	6992	9170				
	nSL <sup>(R)</sup>	512	6173	9515	9988	533	6089	9447	9985	520	5862	9378	9988	516	5697	9299	9981	591	3599	7048	9230	516	5697	9299	9981	591	3599	7048	9230				
	nCN <sup>(R)</sup>	522	6194	9533	9992	536	6107	9482	9993	523	5852	9414	9989	521	5731	9339	9984	544	3602	7060	9299	521	5731	9339	9984	544	3602	7060	9299				
250	nRV <sup>(C)</sup>	527	7182	9799	9999	517	7042	9779	9999	533	6913	9758	9999	526	6787	9711	9998	656	4346	7827	9541	526	6787	9711	9998	656	4346	7827	9541				
	nSL <sup>(C)</sup>	511	7231	9815	9999	512	7068	9793	9998	536	6940	9776	1000	512	6800	9730	9997	575	4325	7890	9547	512	6800	9730	9997	575	4325	7890	9547				
	nCN <sup>(C)</sup>	506	7255	9829	10000	526	7054	9812	9999	536	6975	9800	1000	499	6818	9742	9999	537	4308	7926	9602	499	6818	9742	9999	537	4308	7926	9602				
	nRV <sup>(R)</sup>	517	7202	9802	9999	521	7024	9775	9999	537	6913	9757	9999	510	6765	9701	9997	584	4310	7842	9533	510	6765	9701	9997	584	4310	7842	9533				
	nSL <sup>(R)</sup>	511	7229	9815	9999	527	7050	9794	9998	537	6941	9778	1000	500	6795	9724	9997	554	4277	7893	9547	500	6795	9724	9997	554	4277	7893	9547				
	nCN <sup>(R)</sup>	506	7255	9829	10000	526	7054	9812	9999	536	6975	9800	1000	499	6818	9742	9999	537	4308	7926	9602	499	6818	9742	9999	537	4308	7926	9602				
300	nRV <sup>(C)</sup>	517	8093	9945	10000	493	7935	9935	10000	489	7773	9916	10000	496	7691	9914	10000	626	4945	8422	9715	496	7691	9914	10000	626	4945	8422	9715				
	nSL <sup>(C)</sup>	516	8122	9946	10000	488	7955	9939	10000	481	7818	9929	10000	496	7714	9920	10000	566	4904	8488	9738	496	7714	9920	10000	566	4904	8488	9738				
	nCN <sup>(C)</sup>	510	8151	9957	10000	508	7999	9948	10000	475	7871	9937	10000	508	7744	9928	10000	508	4845	8520	9757	508	7744	9928	10000	508	4845	8520	9757				
	nRV <sup>(R)</sup>	517	8095	9946	10000	486	7909	9937	10000	484	7769	9920	10000	505	7680	9911	10000	569	4888	8413	9717	505	7680	9911	10000	569	4888	8413	9717				
	nSL <sup>(R)</sup>	512	8119	9950	10000	491	7946	9939	10000	481	7825	9931	10000	504	7729	9918	10000	541	4857	8483	9729	504	7729	9918	10000	541	4857	8483	9729				
	nCN <sup>(R)</sup>	510	8151	9957	10000	508	7999	9948	10000	475	7871	9937	10000	508	7744	9928	10000	508	4845	8520	9757	508	7744	9928	10000	508	4845	8520	9757				

n	Tests	Multinormale	0,05-contaminée	0,1-contaminée	t avec $\nu=25$	t avec $\nu=5$
		$C_{00}$	$C_{00}$	$C_{00}$	$C_{00}$	$C_{00}$
1000	nRV <sup>(C)</sup>	480	478	500	511	587
	nSL <sup>(C)</sup>	474	478	490	512	543
	nCN <sup>(C)</sup>	470	480	493	510	516
	nRV <sup>(R)</sup>	479	477	501	520	544
	nSL <sup>(R)</sup>	482	488	498	509	529
	nCN <sup>(R)</sup>	470	480	493	510	516

TABLEAU 2.5. Niveau expérimental (x10000) des tests au niveau nominal 5% pour n=1000 et différentes distributions.

## 2.6. TESTS D'ABSENCE DE LIAISON ENTRE PLUSIEURS VECTEURS

Dans cette dernière section, on généralise les résultats précédents pour construire des tests d'absence de liaison entre plusieurs vecteurs. L'approche utilisée s'apparente à celle d'Allaire & Lepage (1990). On suppose que le vecteur aléatoire  $X$ , de dimension  $m \times 1$ , appartient à la classe des distributions elliptiques. On subdivise le vecteur aléatoire  $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(m)})'$  en  $G$  sous-vecteurs

$$X^{[h]} = (X^{(1+\sum_{l=1}^{h-1} m_l)}, \dots, X^{(\sum_{l=1}^h m_l)})' \text{ avec } h = 1, \dots, G, \sum_{h=1}^G m_h = m \text{ et } m_0 = 0$$

où pour  $h = 1, \dots, G$ ,  $X^{[h]}$  est un sous-vecteur de  $X$  de dimension  $m_h \times 1$ . On pose  $I_1 = \{1, \dots, m_1\}, \dots, I_h = \{1 + \sum_{l=1}^{h-1} m_l, \dots, \sum_{l=1}^h m_l\}, \dots, I_G = \{1 + \sum_{l=1}^{G-1} m_l, \dots, \sum_{l=1}^G m_l\}$ , les ensembles disjoints d'indices des composantes des sous-vecteurs de

$$X = \underbrace{(X^{(1)}, \dots, X^{(m_1)})}_{|I_1| \text{ éléments}}, \dots, \underbrace{(X^{(1+\sum_{l=1}^{h-1} m_l)}, \dots, X^{(\sum_{l=1}^h m_l)})}_{|I_h| \text{ éléments}}, \dots, \underbrace{(X^{(1+\sum_{l=1}^{G-1} m_l)}, \dots, X^{(\sum_{l=1}^G m_l)})}_{|I_G| \text{ éléments}}'.$$

On partitionne également les matrices de la population  $\Sigma$  et  $\mathcal{P}$  et les matrices échantillonnales  $S_n$  et  $R_n$  comme suit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \dots & \Sigma_{1G} \\ \Sigma_{21} & \dots & \Sigma_{2G} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{G1} & \dots & \Sigma_{GG} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & \dots & \mathcal{P}_{1G} \\ \mathcal{P}_{21} & \dots & \mathcal{P}_{2G} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{P}_{G1} & \dots & \mathcal{P}_{GG} \end{pmatrix},$$

$$S_n = \begin{pmatrix} S_{11} & \dots & S_{1G} \\ S_{21} & \dots & S_{2G} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{G1} & \dots & S_{GG} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_n = \begin{pmatrix} R_{11} & \dots & R_{1G} \\ R_{21} & \dots & R_{2G} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{G1} & \dots & R_{GG} \end{pmatrix}.$$

### 2.6.1. Distributions asymptotiques des mesures.

Définissons les mesures  $RV_{hh'}^{(R)}$ ,  $SL_{hh'}^{(R)}$  et  $CN_{hh'}^{(R)}$  pour  $1 \leq h' < h \leq G$ , comme suit:

$$(i) \quad RV_{hh'}^{(R)} = \frac{\text{tr}(R_{h'h}R'_{h'h})}{\sqrt{\text{tr}(R_{h'h}^2)\text{tr}(R_{hh}^2)}} \quad \text{pour la mesure d'Escoufier (1973),}$$

$$(ii) \quad SL_{hh'}^{(R)} = \frac{\text{tr}(R_{h'h}R_{hh}^{-1}R'_{h'h})}{m'_h} \quad \text{pour la mesure de Stewart & Love (1968)}$$

et

$$(iii) \quad CN_{hh'}^{(R)} = \frac{\text{tr}(R_{h'h}^{-1}R_{h'h}R_{hh}^{-1}R'_{h'h})}{m_{h'}} \quad \text{pour la mesure de Cramer & Nicewander (1979).}$$

L'hypothèse nulle est

$$H_0^{(G)} : \mathcal{P}_{hh'} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq h' < h \leq G. \quad (2.6.1)$$

La suite d'hypothèses alternatives convergeant vers  $H_0^{(G)}$  est

$$H_{1:n}^{(G)} : \mathcal{P}_{hh'} = \frac{A_{hh'}}{\sqrt{n}} \quad \text{pour } 1 \leq h' < h \leq G,$$

où  $A_{hh'} = (a_{ij}^{(hh')})$  est une matrice donnée de dimension  $m_{h'} \times m_h$  telle que pour  $h$  et  $h'$  fixes,  $|a_{ij}^{(hh')}| \leq 1/\sqrt{n}$ ,  $i = 1, \dots, m_{h'}$  et  $j = 1, \dots, m_h$ .



Le théorème suivant montre entre autre que les vecteurs aléatoires

$$\sqrt{n} \text{vec} R_{21}, \dots, \sqrt{n} \text{vec} R_{G,G-1}$$

sont asymptotiquement indépendants sous  $H_0^{(G)}$  ou sous  $H_{1:n}^{(G)}$  convergeant vers  $H_0^{(G)}$ .

THÉORÈME 2.6.1. Soit  $R_n$  la matrice de corrélation échantillonnale formée à partir d'un échantillon de taille  $n$  d'une loi elliptique de paramètres  $\mu$  et  $V$  avec matrice de corrélation  $\mathcal{P}$  et coefficient d'aplatissement  $\kappa$ . Alors

$$\begin{aligned} \text{(i) sous } H_0^{(G)}, \quad & \sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec} R_{21} \\ \vdots \\ \text{vec} R_{G,G-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \text{ où } Z \text{ est de loi } \mathcal{N}_f(0, (1+\kappa)\Omega^{(0)}), \\ \text{(ii) sous } H_{1:n}^{(G)}, \quad & \sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec} R_{21} \\ \vdots \\ \text{vec} R_{G,G-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \text{ où } Z \text{ est de loi } \mathcal{N}_f(\mu^{(R)}, (1+\kappa)\Omega^{(0)}), \end{aligned}$$

$$\text{où } f = \frac{1}{2} \left( m^2 - \sum_{h=1}^G m_h^2 \right),$$

$$\Omega^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22} & O & \dots & O \\ O & \mathcal{P}_{22} \otimes \mathcal{P}_{33} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & \mathcal{P}_{G-1,G-1} \otimes \mathcal{P}_{GG} \end{pmatrix} \text{ et } \mu^{(R)} = \begin{pmatrix} \text{vec} A_{21} \\ \vdots \\ \text{vec} A_{G,G-1} \end{pmatrix}.$$

Les  $G(G-1)/2$  vecteurs aléatoires

$$\text{vec} R_{21}, \dots, \text{vec} R_{G,G-1}$$

sont ainsi asymptotiquement indépendants sous  $H_0^{(G)}$  et sous  $H_{1:n}^{(G)}$ .

**Démonstration:**

(i) D'après le théorème 2.1.1, le vecteur aléatoire

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec} R_{21} \\ \vdots \\ \text{vec} R_{hh'} \\ \vdots \\ \text{vec} R_{G,G-1} \end{pmatrix},$$

$h' < h$ , converge en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_f(0, \Omega_R^{(0)})$  où  $f = \frac{1}{2}(m^2 - \sum_{h=1}^G m_h^2)$ .  
Déterminons  $\Omega_R^{(0)}$ , c'est-à-dire la corrélation asymptotique entre les vecteurs

$$\sqrt{n} \text{vec} R_{hh'} \text{ et } \sqrt{n} \text{vec} R_{dd'} \quad (2.6.2)$$

où  $h, h', d$  et  $d'$  sont des entiers quelconques de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, G\}$  avec  $h' < h$  et  $d' < d$ . Puisque la matrice  $R_{hh'}$ , de dimension  $m_h \times m_{h'}$ , traduit une relation entre seulement les deux sous-vecteurs  $X^{[h]}$  et  $X^{[h']}$ , alors pour  $r_{ij} \in R_{hh'}$  et  $r_{kl} \in R_{dd'}$ , on a

$$\begin{cases} i \in I_h & \text{et } j \in I_{h'} & \text{avec } h' < h, \\ k \in I_d & \text{et } l \in I_{d'} & \text{avec } d' < d. \end{cases}$$

Si  $h = d$  et  $h' = d'$ , on a  $(i, k) \in I_h \times I_h$  et  $(j, l) \in I_{h'} \times I_{h'}$ . Les deux ensembles  $I_h$  et  $I_{h'}$  étant disjoints, alors d'après l'équation 2.1.3 on a, sous  $H_0^{(G)}$ ,  $\rho^{(i,j)} = \rho^{(k,l)} = \rho^{(i,l)} = \rho^{(j,k)} = 0$ . Ainsi, on obtient

$$\omega^{(ij,kl)} = (1 + \kappa) \rho^{(i,k)} \rho^{(j,l)},$$

qui est l'élément générique de la matrice  $(1 + \kappa) P_{h'h'} \otimes P_{hh}$ . Ainsi, les sous-matrices de  $\Omega_R^{(0)}$  situées sur la diagonale correspondent à  $(1 + \kappa) P_{h'h'} \otimes P_{hh}$ . Si au contraire par exemple  $h \neq d$ , alors pour  $i \in I_h, k \in I_d$  on a

$$j \in I_{h'} \text{ et } l \in I_{d'} \text{ avec } h' < h \text{ et } d' < d.$$

Sous  $H_0^{(G)}$ , on trouve par conséquent

$$\rho^{(i,j)} = \rho^{(k,l)} = \rho^{(i,k)} = \rho^{(j,k)} = 0,$$

c'est-à-dire que pour  $h \neq d$  ou  $h' \neq d'$ ,  $\omega^{(ij,kl)} = 0$ . Autrement dit, les sous-matrices de  $\Omega_R^{(0)}$  non situées sur la diagonale sont nulles. Par conséquent,  $\Omega_R^{(0)} = \Omega^{(0)}$ .

(ii) Considérons le cas où la suite  $H_{1:n}^{(G)}$  converge vers  $H^{(0)}$ . D'après le théorème 2.1.1, le vecteur

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec} R_{21} \\ \vdots \\ \text{vec} R_{G,G-1} \end{pmatrix}$$

converge en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_f$  dont on doit déterminer la moyenne et la matrice de covariance  $\Omega_R^{(H)}$ .

Si  $h = d$  et  $h' = d'$ , on a  $(i, k) \in I_h \times I_h$  et  $(j, l) \in I_{h'} \times I_{h'}$ . Alors, comme

$$\rho^{(i,j)} = \rho^{(k,l)} = \rho^{(i,l)} = \rho^{(j,k)} = a_{ij}^{(hh')} / \sqrt{n}$$

converge vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ , d'après l'équation 2.1.3, on obtient  $\omega^{(ij,kl)} = (1 + \kappa) \rho^{(i,k)} \rho^{(j,l)}$  qui est l'élément générique de la matrice  $(1 + \kappa) P_{h'h'} \otimes P_{hh}$ . Ainsi, les sous-matrices de  $\Omega_R^{(H)}$  situées sur la diagonale correspondent à  $(1 + \kappa) P_{h'h'} \otimes P_{hh}$ . Si au contraire par exemple  $h \neq d$ , alors pour  $i \in I_h$ ,  $k \in I_d$  on a

$$j \in I_{h'} \text{ et } l \in I_{d'} \text{ avec } h' < h \text{ et } d' < d.$$

Comme

$$\rho^{(i,j)} = a_{ij}^{(hh')} / \sqrt{n}, \quad \rho^{(k,l)} = a_{kl}^{(dd')} / \sqrt{n}, \quad \rho^{(i,k)} = a_{ik}^{(hd)} / \sqrt{n} \text{ et } \rho^{(j,k)} = a_{jk}^{(h'd)} / \sqrt{n}$$

convergent tous vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ , alors d'après l'équation 2.1.3, on obtient  $\omega^{(ij,kl)} = 0$ . Autrement dit, les sous-matrices de  $\Omega_R^{(H)}$  non situées sur la diagonale sont nulles. On a donc  $\Omega_R^{(H)} = \Omega^{(0)}$ .

D'autre part, en substituant les valeurs de  $P_{hh'}$ ,  $1 \leq h' < h \leq G$ , on déduit par Serfling (1980) (voir lemme A, p.20) que sous  $H_{1:n}^{(G)}$

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec} R_{21} \\ \vdots \\ \text{vec} R_{G,G-1} \end{pmatrix}$$

converge en loi vers une loi multinormale de moyenne

$$\mu^{(R)} = \begin{pmatrix} \text{vec} A_{21} \\ \vdots \\ \text{vec} A_{G,G-1} \end{pmatrix}.$$

Enfin, étant donné la structure de la matrice de covariance asymptotique, l'indépendance asymptotique des vecteurs aléatoires

$$\text{vec}R_{21}, \dots, \text{vec}R_{G,G-1}$$

sous  $H_0^{(G)}$  et sous  $H_{1:n}^{(G)}$  découle.

C.Q.F.D.

La loi asymptotique conjointe des mesures est donnée par le théorème suivant.

THÉORÈME 2.6.2. *Sous les conditions du théorème 2.6.1 et*

**A:** *sous  $H_0^{(G)}$ , on a*

$$n \begin{pmatrix} M_{21}^{(R)} \\ \vdots \\ M_{ij}^{(R)} \\ \vdots \\ M_{G,G-1}^{(R)} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} Y_{21}^{(h)} \\ \vdots \\ Y_{ij}^{(h)} \\ \vdots \\ Y_{G,G-1}^{(h)} \end{pmatrix} \quad \text{avec } h = 1, 2 \text{ et } 3 \text{ pour respectivement} \\ M = RV, SL \text{ et } NC$$

où, pour chaque  $h$  fixe et  $1 \leq j < i \leq G$ , les  $G(G-1)/2$  variables aléatoires  $Y_{ij}^{(h)}$  sont indépendantes et distribuées comme

$$(i) \quad Y_{ij}^{(1)} = \frac{1 + \kappa}{\sqrt{\text{tr}(\mathcal{P}_{jj}^2) \text{tr}(\mathcal{P}_{ii}^2)}} \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{m_j} \lambda_k^{(i)} \mu_l^{(j)} U_{kl,(ij)}^2,$$

où, pour  $i$  et  $j$  fixes, les variables aléatoires  $U_{kl,(ij)}$  sont indépendantes et de même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,  $k = 1, \dots, m_i$ ,  $l = 1, \dots, m_j$ ,

$$(ii) \quad Y_{ij}^{(2)} = \frac{1 + \kappa}{m_j} \sum_{l=1}^{m_j} \mu_l^{(j)} Z_{m_i(l)}^2,$$

où, pour  $i$  et  $j$  fixes, les variables aléatoires  $Z_{m_i(l)}^2$ ,  $l = 1, \dots, m_j$ , sont indépendantes et suivent la loi  $\chi^2$  avec  $m_i$  degrés de liberté,

$$(iii) Y_{ij}^{(3)} = \frac{1 + \kappa}{m_j} \chi_{m_j m_i}^2$$

où, pour  $i$  et  $j$  fixes, la variable aléatoire  $\chi_{m_j m_i}^2$  suit la loi  $\chi^2$  avec  $m_j m_i$  degrés de liberté,

les  $\lambda_k^{(i)}$  et  $\mu_l^{(j)}$ ,  $k = 1, \dots, m_i$ ,  $l = 1, \dots, m_j$  sont respectivement les valeurs propres de  $\mathcal{P}_{ii}$  et de  $\mathcal{P}_{jj}$ .

**B:** sous  $H_{1:n}^{(G)}$ , alors le résultat en **A** tient sauf que

(i) pour  $Y_{ij}^{(1)}$ ,  $i$  et  $j$  fixes, les variables aléatoires  $U_{kl,(ij)}$  sont indépendantes et de loi  $\mathcal{N}(\delta_{kl,(ij)}, 1)$  avec

$$\delta_{kl,(ij)}^2 = \text{tr} \left( A'_{ij} b_{l,jj} b'_{l,jj} \mathcal{P}_{jj}^{-1} A_{ij} \mathcal{P}_{ii}^{-1} a_{k,ii} a'_{k,ii} \right),$$

pour  $k = 1, \dots, m_i$  et  $l = 1, \dots, m_j$ ,

(ii) pour  $Y_{ij}^{(2)}$ ,  $i$  et  $j$  fixes, les variables aléatoires  $Z_{m_i(l)}^2$ ,  $l = 1, \dots, m_j$ , sont indépendantes et suivent une loi  $\chi^2$  avec  $m_i$  degrés de liberté et paramètre de décentralité

$$\delta_{l,(ij)}^2 = \text{tr} \left( A'_{ij} \mathcal{P}_{jj}^{-1} A_{ij} \mathcal{P}_{ii}^{-1} a_{k,ii} a'_{k,ii} \right),$$

pour  $l = 1, \dots, m_j$ ,

(iii) pour  $Y_{ij}^{(3)}$ ,  $i$  et  $j$  fixes, la variable aléatoire  $\chi_{m_j m_i}^2$  suit une loi  $\chi^2$  avec  $m_j m_i$  degrés de liberté et paramètre de décentralité

$$\delta_{(ij)}^2 = \text{tr} \left( A'_{ij} \mathcal{P}_{jj}^{-1} A_{ij} \mathcal{P}_{ii}^{-1} \right),$$

où, pour  $i$  et  $j$  fixes, les vecteurs  $a_{k,ii}$  et  $b_{l,jj}$ ,  $k = 1, \dots, m_i$ ,  $l = 1, \dots, m_j$ , sont respectivement vecteurs propres de  $\mathcal{P}_{ii}$  et  $\mathcal{P}_{jj}$  associés aux valeurs propres  $\lambda_k^{(i)}$  et  $\mu_l^{(j)}$ .

**C:** si  $G=m$  et  $f = m(m-1)/2$ , pour  $M = RV, SL$  ou  $CN$ , alors on a sous  $H_0^{(m)}$

$$nR^2 = \frac{n}{1 + \kappa} \sum_{1 \leq j < i \leq m} M_{ij}^{(R)} = \frac{n}{1 + \kappa} \sum_{1 \leq j < i \leq m} r_{ij}^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \text{ où } Z \text{ suit une loi } \chi_f^2,$$

et sous  $H_{1:n}^{(m)}$

$$nR^2 = \frac{n}{1 + \kappa} \sum_{1 \leq j < i \leq m} r_{ij}^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \text{ où } Z \text{ suit une loi } \chi_f^2(\delta^2)$$

où le paramètre de décentralité est

$$\delta^2 = \sum_{1 \leq j < i \leq m} a_{ij}^2,$$

et  $r_{ij}$  est le coefficient de corrélation échantillonnal entre les composantes  $X_i$  et  $X_j$  du vecteur aléatoire  $X$ .

**Démonstration:**

**A:** Soit  $h = 1$ . Pour  $1 \leq j < i \leq G$ , le vecteur  $\sqrt{n} \text{vec} R_{ij}$  converge en loi vers le vecteur aléatoire  $Z_{ij}$  de loi  $\mathcal{N}_{m_j m_i}(O, (1 + \kappa)(P_{jj} \otimes P_{ii}))$ . D'autre part, comme les mesures  $RV_{ij}^{(R)}$ ,  $1 \leq j < i \leq G$ , sont continues en tous leurs arguments, on a, lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$n \begin{pmatrix} RV_{21}^{(R)} \\ \vdots \\ RV_{ij}^{(R)} \\ \vdots \\ RV_{G,G-1}^{(R)} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} Z'_{21} Z_{21} / \sqrt{\text{tr}(\mathcal{P}_{11}^2) \text{tr}(\mathcal{P}_{22}^2)} \\ \vdots \\ Z'_{ij} Z_{ij} / \sqrt{\text{tr}(\mathcal{P}_{jj}^2) \text{tr}(\mathcal{P}_{ii}^2)} \\ \vdots \\ Z'_{G,G-1} Z_{G,G-1} / \sqrt{\text{tr}(\mathcal{P}_{G-1,G-1}^2) \text{tr}(\mathcal{P}_{G,G}^2)} \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs aléatoires  $Z_{ij}$ , pour  $1 \leq j < i \leq G$ , étant asymptotiquement indépendants d'après le théorème 2.6.1, alors les formes quadratiques  $Y_{ij}^{(1)}$  sont indépendantes et distribuées comme

$$Y_{ij}^{(1)} = \frac{1 + \kappa}{\sqrt{\text{tr}(\mathcal{P}_{ii}^2) \text{tr}(\mathcal{P}_{jj}^2)}} \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{m_j} \lambda_k^{(i)} \mu_l^{(j)} U_{kl,(ij)}^2.$$

Le reste de la démonstration est une simple réécriture de celle du théorème 2.3.1.

Les cas  $h = 2$  et  $3$  se démontrent de la même façon.

**B:** Cette partie se démontre aussi de la même façon que le théorème 2.3.2.

**C:** Puisque, sous  $H_0^{(m)}$  et pour  $i = 1, \dots, m$ ,  $\mathcal{P}_{ii} = 1$  et donc les valeurs propres  $\lambda_k^{(i)}$  sont égales à 1 pour tout couple  $(i, k)$  et puisque les  $f$  variables aléatoires

$Z_{ij}$  pour  $1 \leq j < i \leq m$  sont asymptotiquement indépendantes, alors on a pour  $h = 1, 2, 3$ ,

$$Y_{ij}^{(h)} = (1 + \kappa)U_{(ij)}^2$$

où les  $f$  variables aléatoires  $U_{(ij)}$  sont indépendantes et suivent une même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Ainsi, sous  $H_0^{(m)}$  on a

$$nR^2 = \frac{n}{1 + \kappa} \sum_{1 \leq j < i \leq m} M_{ij}^{(R)} = \frac{n}{1 + \kappa} \sum_{1 \leq j < i \leq m} r_{ij}^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \text{ où } Z \text{ suit une loi } \chi_f^2.$$

Sous  $H_{1,m}$  la démonstration est similaire à la précédente avec la seule différence que les variables  $U_{(ij)}$  suivent une loi  $\mathcal{N}(a_{ij}, 1)$ .

C.Q.F.D.

### 2.6.2. Tests asymptotiques pour $H_0^{(G)}$ .

Le théorème 2.6.2 permet de construire, en utilisant l'approche d'Allaire & Lepage (1990), trois tests asymptotiques pour tester l'hypothèse nulle  $H_0^{(G)}$ . À l'aide des mesures d'Escoufier (1973), de Stewart & Love (1968) et Cramer & Nicewander (1979), les régions critiques des tests de niveau asymptotique  $\alpha$  sont donnés respectivement par

$$\begin{aligned} \text{rejeter } H_0^{(G)} & \text{ si } n \sum_{1 \leq j < i \leq G} RV_{ij}^{(R)} > c_\alpha^{(1)}, \\ \text{rejeter } H_0^{(G)} & \text{ si } n \sum_{1 \leq j < i \leq G} SL_{ij}^{(R)} > c_\alpha^{(2)} \end{aligned}$$

et

$$\text{rejeter } H_0^{(G)} \text{ si } n \sum_{1 \leq j < i \leq G} CN_{ij}^{(R)} > c_\alpha^{(3)}$$

où  $c_\alpha^{(h)}$ , pour  $h = 1, 2, 3$ , est le quantile d'ordre  $1 - \alpha$  de la distribution de

$$(1 + \kappa) \sum_{1 \leq j < i \leq G} \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{m_j} \left( \frac{\lambda_k^{(i)} \mu_l^{(j)}}{\sqrt{\text{tr}(\mathcal{P}_{jj}^2) \text{tr}(\mathcal{P}_{ii}^2)}} \right) U_{kl,(ij)}^2 \quad \text{pour } h = 1 ,$$

$$(1 + \kappa) \sum_{1 \leq j < i \leq G} \sum_{l=1}^{m_j} \left( \frac{\mu_l^{(j)}}{m_j} \right) \chi_{m_i(l)}^2 \quad \text{pour } h = 2$$

et

$$(1 + \kappa) \sum_{1 \leq j < i \leq G} \left( \frac{1}{m_j} \right) \chi_{m_j m_i}^2 \quad \text{pour } h = 3 .$$

Puisque pour chaque  $M$  fixe,  $M = RV, SL, CN$  et pour tout  $(i, j)$ ,  $1 \leq j < i \leq G$ , les  $G(G-1)$  variables  $M_{ij}^{(R)}$  sont asymptotiquement indépendants sous  $H_0^{(G)}$ . Il en découle que pour  $h = 3$ , par exemple, les variables  $\chi_{m_j m_i}^2$  pour  $1 \leq j < i \leq G$  sont indépendantes et suivent une loi  $\chi^2$  avec  $m_j m_i$  degrés de liberté pondérées par  $1/m_j$ . Il en de même des autres quantités  $U_{kl,(ij)}^2$  et  $\chi_{m_i(l)}^2$  définies dans le théorème 2.6.2. On calcule numériquement les quantités  $c_\alpha^{(h)}$ , pour  $h = 1, 2, 3$ , à l'aide de l'algorithme d'Imhof (1961).

On a  $M_{ij}^{(R)} \xrightarrow{\mathcal{P}} \rho M^{(R)ij}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , pour  $M = RV, SL$  et  $CN$ ,  $1 \leq j < i \leq G$ . Lorsque l'hypothèse  $H_0^{(G)}$  est fautive,  $\rho M_{ij}^{(R)} > 0$  pour au moins un couple  $(i, j)$  où  $1 \leq j < i \leq G$ , alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(n \sum_{1 \leq j < i \leq G} M_{ij}^{(R)} > c_\alpha^{(1)}\right) = 1 \text{ pour } M = RV, SL \text{ et } CN.$$

Les trois tests proposés sont donc convergents.

### 2.6.3. Tests de non corrélation totale.

Dans cette sous-section, on construit des tests d'absence de liaison totale entre toutes les composantes du vecteur aléatoire  $X$ . On ne peut pas avoir ce genre de tests à partir des résultats d'Allaire & Lepage (1990) qui utilisent des mesures basées sur la matrice de covariance puisque les coefficients de pondération qui apparaissent dans la loi asymptotique ne sont pas généralement constants.



COROLLAIRE 2.6.1. Si  $G = m$ , alors sous  $H_0^{(m)}$  on a

$$\sqrt{n} \left( \sum_{1 \leq j < i \leq m} r_{ij} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (1 + \kappa)f)$$

et sous  $H_{1:n}^{(m)}$ ,

$$\sqrt{n} \left( \sum_{1 \leq j < i \leq m} r_{ij} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N} \left( \sum_{1 \leq j < i \leq m} a_{ij}, (1 + \kappa)f \right).$$

**Démonstration:**

Le théorème 2.6.1 appliqué pour  $G = m$  montre que les variables aléatoires  $\sqrt{n}r_{ij}$  sont asymptotiquement indépendantes et normalement distribuées. Sous  $H_0^{(m)}$ , pour tout couple  $(i, j)$ ,  $\sqrt{n}r_{ij} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1 + \kappa)$  car  $\mathcal{P}_{ii} = \mathcal{P}_{jj} = 1$  et ainsi, la somme des  $f$  variables aléatoires asymptotiquement indépendantes converge en loi vers  $\mathcal{N}(0, (1 + \kappa)f)$ . Sous  $H_{1:n}^{(m)}$ , pour tout couple  $(i, j)$ ,  $\sqrt{n}r_{ij} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(a_{ij}, 1 + \kappa)$ , et ainsi, la somme des  $f$  variables aléatoires indépendantes converge vers

$$\mathcal{N} \left( \sum_{1 \leq j < i \leq m} a_{ij}, (1 + \kappa)f \right). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Le corollaire 2.6.1 permet de construire trois tests asymptotiques d'absence de liaison totale. Le premier test au niveau asymptotique  $\alpha$  est donné par

$$\text{rejeter } H_0^{(m)} \text{ si } \sqrt{n} \left( \sum_{1 \leq j < i \leq m} r_{ij} \right) > c_\alpha^{(m)}$$

où  $c_\alpha^{(m)}$  est le quantile d'ordre  $1 - c_\alpha^{(m)}$  donné par

$$\Phi \left( \frac{1}{\sqrt{f(1 + \kappa)}} c_\alpha^{(m)} \right) = 1 - \alpha,$$

$\Phi(x)$  étant la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite.

Le deuxième test au niveau asymptotique  $\alpha$  est donné par

$$\text{rejeter } H_0^{(m)} \text{ si } \sqrt{n} \left( \text{Max}_{\{1 \leq j < i \leq m\}} r_{ij} \right) > d_\alpha^{(m)}$$

avec  $\Phi \left( \frac{1}{\sqrt{f(1 + \kappa)}} d_\alpha^{(m)} \right) = (1 - \alpha)^{1/f}$ .

On peut aussi utiliser le test  $\chi^2_f$  donné par la partie C du théorème 2.6.2.

Signalons que Cameron & Eagleson (1985) ont proposé un test de non corrélation totale lorsque les observations  $X_\alpha = (X_\alpha^{(1)}, \dots, X_\alpha^{(m)})'$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$  sont indépendantes sans être nécessairement identiquement distribuées, mais chaque composante  $i$ , les variables  $X_\alpha^{(i)}$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$  sont indépendantes et de même loi normale. Le test proposé est basé sur le comportement asymptotique du plus grand des coefficients de corrélation de la matrice de corrélation échantillonnale.

#### 2.6.4. Un exemple.

On considère l'ensemble de données du tableau 5 de Dawkins (1989) constitué des records nationaux masculins de 55 pays pour 8 courses en athlétisme: le 100 m, le 200 m, le 400 m, le 800 m, le 1500 m, le 5000 m, le 10 000 m et le marathon. Il s'agit, comme le mentionne l'auteur, d'une partie des données recueillies par Belcham & Hymans (1984) pour les Jeux Olympiques de 1984 à Los Angeles. Ces huit variables se regroupent naturellement en trois sous-ensembles de variables. Il y a d'abord trois sprints: les 100 m, 200 m et 400 m, deux courses de demi-fond: les 800 m et 1500 m et finalement trois courses de fond ou épreuve d'endurance: les 5 km, 10 km et le marathon. On a donc trois sous-vecteurs de dimension respectives  $m_1 = 3$ ,  $m_2 = 2$ , et  $m_3 = 3$ .

Il est à remarquer que l'échelle de ces variables n'est pas la même puisque les sprints sont chronométrés en secondes alors que les temps des autres courses est en minutes. De plus, comme les variances des variables correspondant aux longues épreuves sont plus grandes que celles des épreuves plus courtes, on centre et réduit chaque variable afin d'accorder un poids égal à chacune d'elles dans l'analyse. Les nouvelles variables représentent ainsi des mesures de la performance relative de différentes nations dans chacune des épreuves. En utilisant ces données transformées, les mesures de liaison vectorielles restent invariantes. Ceci constitue donc un avantage de premier ordre par rapport aux tests d'absence de liaison paramétriques d'Allaire & Lepage (1990) ou Lazraq & Cléroux (1992). D'ailleurs, ces données ont été traitées par Allaire & Lepage (1990) tout en signalant le problème d'invariance. Pour cet ensemble de

données où les performances des nations sont sensiblement les mêmes d'une épreuve à l'autre, on peut s'attendre à rejeter l'hypothèse d'absence de liaison.

On trouve, en effet, pour les trois tests de la section 2.6 des niveaux fortement significatifs. Le tableau 2.6 récapitule les différentes valeurs des statistiques correspondantes ainsi que le niveau critique observé.

	$M_{12}^{(R)}$	$M_{13}^{(R)}$	$M_{23}^{(R)}$	$n \sum_{1 \leq j < i < 3} M_{ij}^{(R)}$	Niveau critique
Escoufier ( $RV^{(R)}$ )	0,714	0,514	0,832	113,29	$0,33 \times 10^{-9}$
Stewart & Love ( $SL^{(R)}$ )	0,665	0,541	0,824	111,65	$0,78 \times 10^{-8}$
Cramer & Nicewander ( $CN^{(R)}$ )	0,410	0,247	0,442	60,48	$0,55 \times 10^{-5}$

TABLEAU 2.6. Tests d'absence de liaison pour l'ensemble des records nationaux masculins de 55 pays pour 3 sous-ensembles de courses et leur niveau critique.

## CHAPITRE 3

---

### Lois asymptotiques de différentes matrices de corrélation

Dans le dernier chapitre on a étudié différentes mesures d'association vectorielle construites à partir de la matrice des coefficients de corrélation simple. Maintenant, on va étendre l'étude à d'autres matrices de corrélation. Plus précisément, on va définir dans la section 3.2 les matrices de corrélation de Kendall et de Spearman et donner leurs distributions asymptotiques. Ceci sera fait après avoir rappelé brièvement dans la section 3.1 la définition du coefficient de corrélation  $\tau$  de Kendall et le coefficient de corrélation  $\rho$  de Spearman et donné quelques-unes de leurs propriétés. Pour plus de détails, on peut se référer à Hoeffding (1948) ou à Kruskal (1958). Ce dernier discute des relations entre les deux coefficients de corrélation et présente aussi un bref historique sur ces mesures d'association. Dans la section 3.3 on donne la distribution asymptotique de quatre sous-matrices de corrélation échantillonnales sous différentes hypothèses. La section 3.4 est une généralisation des résultats de la section 3.3 au cas de plusieurs sous-vecteurs.

#### 3.1. RAPPEL

Soit un échantillon aléatoire  $X_1, \dots, X_n$  issu du vecteur aléatoire de dimension 2,  $X = (X^{(1)}, X^{(2)})'$  dont la fonction de distribution  $F(x) = F(x^{(1)}, x^{(2)})$  est continue et

admet  $F^{(i)}(x^{(i)})$  comme distribution marginale de  $X^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ .

Posons

$$s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

### 3.1.1. Le coefficient $\tau$ de Kendall.

Deux paires d'observations  $X_1 = (X_1^{(1)}, X_1^{(2)})'$  et  $X_2 = (X_2^{(1)}, X_2^{(2)})'$  sont dites concordantes si

$$\{ X_1^{(1)} < X_2^{(1)} \text{ et } X_1^{(2)} < X_2^{(2)} \} \text{ ou } \{ X_1^{(1)} > X_2^{(1)} \text{ et } X_1^{(2)} > X_2^{(2)} \}$$

et elles sont dites discordantes si

$$\{ X_1^{(1)} < X_2^{(1)} \text{ et } X_1^{(2)} > X_2^{(2)} \} \text{ ou } \{ X_1^{(1)} > X_2^{(1)} \text{ et } X_1^{(2)} < X_2^{(2)} \}.$$

Le coefficient  $\tau$  de Kendall (voir Kendall (1962)) est défini en fonction de la concordance et la discordance entre l'observation  $(X_1^{(1)}, X_1^{(2)})'$  et l'observation  $(X_2^{(1)}, X_2^{(2)})'$  :

$$\begin{aligned} \tau &= P[(X_1^{(1)} - X_2^{(1)})(X_1^{(2)} - X_2^{(2)}) > 0] - P[(X_1^{(1)} - X_2^{(1)})(X_1^{(2)} - X_2^{(2)}) < 0] \\ &= 2P[(X_1^{(1)} - X_2^{(1)})(X_1^{(2)} - X_2^{(2)}) > 0] - 1 \\ &= 4 \iint F(x^{(1)}, x^{(2)}) dF(x^{(1)}, x^{(2)}) - 1. \end{aligned}$$

Dans le cas binormal, on a  $\tau = (2/\pi) \arcsin(\rho)$ ,  $\rho$  étant le coefficient de corrélation simple (voir Kendall (1962)).

Le coefficient  $\tau$  est défini comme une mesure d'association entre les variables  $X^{(1)}$  et  $X^{(2)}$ . Par sa définition même, le coefficient  $\tau$  préserve l'ordre. Il correspond au coefficient de corrélation entre les signes de  $(X_1^{(1)} - X_2^{(1)})$  et  $(X_1^{(2)} - X_2^{(2)})$  et de ce fait, on a  $-1 \leq \tau \leq 1$ . Il est aussi interprété comme la covariance des différences des signes (voir Hoeffding (1948)) puisque  $Var(s(X_1^{(1)} - X_2^{(1)})) = Var(s(X_1^{(2)} - X_2^{(2)})) = 1$ .

Edwardes (1993) a montré que pour une distribution  $F(x^{(1)}, x^{(2)})$  bi-exponentielle

de paramètres  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12})$  c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \bar{F}(x^{(1)}, x^{(2)}) &= P\left(X^{(1)} > x^{(1)}, X^{(2)} > x^{(2)}\right) \\ &= \begin{cases} \exp[-\lambda_1 x^{(1)} - \lambda_2 x^{(2)} - \lambda_{12} \max(x^{(1)}, x^{(2)})] & \text{si } x^{(1)} \text{ et } x^{(2)} > 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

où  $\bar{F}(x^{(1)}, x^{(2)})$  est la fonction de survie

$$\bar{F}(x^{(1)}, x^{(2)}) = 1 - F^{(1)}(x^{(1)}) - F^{(2)}(x^{(2)}) + F(x^{(1)}, x^{(2)}),$$

on a

$$\tau = \rho = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}}.$$

Posons

$$\Phi(X_\alpha, X_\beta) = \Phi\left[(X_\alpha^{(1)}, X_\alpha^{(2)}), (X_\beta^{(1)}, X_\beta^{(2)})\right] = s\left(X_\beta^{(1)} - X_\alpha^{(1)}\right) s\left(X_\beta^{(2)} - X_\alpha^{(2)}\right)$$

où la fonction  $s$  est définie par 3.1.1. Le coefficient  $\tau$  est un paramètre estimable de degré  $r = 2$ , pour la famille des distributions continues  $F(x^{(1)}, x^{(2)})$ , dont le noyau est  $\Phi$  (voir Hoeffding (1948), p.316-17). La U-statistique de degré 2 pour le paramètre  $\tau$  est

$$K_n = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq n} \Phi\left[(X_\alpha^{(1)}, X_\alpha^{(2)}), (X_\beta^{(1)}, X_\beta^{(2)})\right].$$

D'après la proposition 1.3.1 (voir aussi Hoeffding (1948), p.317), on a, pourvu que  $\zeta_1 > 0$ ,

$$\sqrt{n}(K_n - \tau) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 4\zeta_1)$$

avec  $\zeta_1 = E[\Phi(X_1, X_2)\Phi(X_1, X_3)] - \tau^2 = E[\Phi_1^2(X_1)] - \tau^2$  où

$$\begin{aligned} \Phi_1(X_1) &= 1 - 2F^{(1)}(X_1^{(1)}) - 2F^{(2)}(X_1^{(2)}) + 4F(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}) \\ &= [1 - 2F^{(1)}(X_1^{(1)})][1 - 2F^{(2)}(X_1^{(2)})] \\ &\quad + 4[F(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}) - F^{(1)}(X_1^{(1)})F^{(2)}(X_1^{(2)})], \end{aligned}$$

$\Phi_1(X_1)$  étant définie, d'après la proposition 1.3.1, par  $\Phi_1(x) = E[\Phi(x, X_2)]$ .

On remarque que si  $X^{(1)}$  et  $X^{(2)}$  sont indépendants, alors

$$\Phi_1(X_1) = [1 - 2F^{(1)}(X_1^{(1)})][1 - 2F^{(2)}(X_1^{(2)})]$$

et  $E[\Phi_1(X_1)] = \tau = 0$ . D'autre part, si  $X^{(1)} = X^{(2)}$  alors  $\tau = 1$  et pour l'échantillon si  $X_\alpha^{(1)} = X_\alpha^{(2)}$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , on a alors  $K_n = 1$ .

### 3.1.2. Le coefficient $\rho$ de Spearman.

Comme pour le coefficient  $\tau$  de Kendall, le coefficient  $\rho$  de Spearman s'interprète aussi en termes d'observations concordantes et discordantes. Considérons trois observations indépendantes:  $X_i = (X_i^{(1)}, X_i^{(2)})$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Alors, le coefficient  $\rho$  de Spearman est défini en fonction des probabilités de concordance et discordance entre l'observation  $(X_1^{(1)}, X_1^{(2)})'$  et  $(X_2^{(1)}, X_3^{(2)})'$  (voir Kruskal (1958)):

$$\begin{aligned} \rho &= 3[P[(X_1^{(1)} - X_2^{(1)})(X_1^{(2)} - X_3^{(2)}) > 0] - P[(X_1^{(1)} - X_2^{(1)})(X_1^{(2)} - X_3^{(2)}) < 0]] \\ &= 3 - 6P[(X_1^{(1)} - X_2^{(1)})(X_1^{(2)} - X_3^{(2)}) < 0] \\ &= 3 \iint [2F^{(1)}(x^{(1)}) - 1] [2F^{(2)}(x^{(2)}) - 1] dF(x^{(1)}, x^{(2)}). \end{aligned}$$

Dans le cas binormal, on a  $\rho = 6/\pi \arcsin(\rho/2)$ , où  $\rho$  est le coefficient de corrélation (voir Joag-Dev (1984)).

Posons

$$\Psi(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \neq k \leq 3} s(X_i^{(1)} - X_j^{(1)}) s(X_i^{(2)} - X_k^{(2)}).$$

Alors  $\Psi$  est symétrique en ses 3 arguments et il est le noyau pour le paramètre  $\rho$  et on a  $E[\Psi(X_1, X_2, X_3)] = \rho$ . La U-statistique de degré 3 pour le paramètre  $\rho$  (voir Carrière (1994)) est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n &= \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{1 \leq \alpha < \beta < \nu \leq n} \Psi(X_\alpha, X_\beta, X_\nu) \\ &= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \sum_{1 \leq \alpha < \beta < \nu \leq n} \Psi(X_\alpha, X_\beta, X_\nu). \end{aligned}$$

D'après la proposition 1.3.1 (voir aussi Hoeffding (1948), p.320) on a, pourvu que  $\zeta_1 > 0$ ,

$$\sqrt{n}(\mathcal{S}_n - \rho) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 9\zeta_1)$$

avec  $\zeta_1 = E[\Psi_1^2(X_1)] - \varrho^2$  où

$$\begin{aligned} \Psi_1(X_1) &= \Psi_1(X_1^{(1)}, X_1^{(2)}) \\ &= [1 - 2F^{(1)}(X_1^{(1)})][1 - 2F^{(2)}(X_1^{(2)})] - 2F^{(1)}(X_1^{(1)}) - 2F^{(2)}(X_1^{(2)}) \\ &\quad + 4 \int F(X_1^{(1)}, x^{(2)}) dF^{(2)}(x^{(2)}) + 4 \int F(x^{(1)}, X_1^{(2)}) dF^{(1)}(x^{(1)}) \\ &= [1 - 2F^{(1)}(X_1^{(1)})][1 - 2F^{(2)}(X_1^{(2)})] \\ &\quad + 4 \int [F(X_1^{(1)}, x^{(2)}) - F^{(1)}(X_1^{(1)})F^{(2)}(x^{(2)})] dF^{(2)}(x^{(2)}) \\ &\quad + 4 \int [F(x^{(1)}, X_1^{(2)}) - F^{(1)}(x^{(1)})F^{(2)}(X_1^{(2)})] dF^{(1)}(x^{(1)}) \end{aligned}$$

en tenant compte de la relation  $1/2 = \int F^{(i)}(x^{(i)}) dF^{(i)}(x^{(i)})$ ,  $i=1, 2$ ,  $\Psi_1(X_1)$  étant définie, d'après la proposition 1.3.1, par  $\Psi_1(x) = E[\Psi(x, X_1, X_2)]$ .

On remarque que si  $X^{(1)}$  et  $X^{(2)}$  sont indépendants, alors

$$\Psi_1(X_1) = [1 - 2F^{(1)}(X_1^{(1)})][1 - 2F^{(2)}(X_1^{(2)})]$$

et  $E\Psi_1(X_1) = \varrho = 0$ . D'autre part, si  $X^{(1)} = X^{(2)}$  alors  $\varrho = 1$  et pour l'échantillon, si  $X_\alpha^{(1)} = X_\alpha^{(2)}$  pour  $\alpha = 1, \dots, n$ , on a alors  $\mathcal{S}_n = 1$ .

L'estimateur de  $\varrho$ , habituellement utilisé, est le coefficient de corrélation des rangs des observations. Il s'agit de l'estimateur

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{12}{n^3 - n} \sum_{\alpha=1}^n \left[ R_\alpha^{(1)} - \frac{n+1}{2} \right] \left[ R_\alpha^{(2)} - \frac{n+1}{2} \right] \\ &= \frac{3}{n^3 - n} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \sum_{\nu=1}^n s(X_\alpha^{(1)} - X_\beta^{(1)}) s(X_\alpha^{(2)} - X_\nu^{(2)}) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

où  $R_\alpha^{(i)}$  est le rang de  $X_\alpha^{(i)}$ ,  $i=1, 2$ , défini par

$$R_\alpha^{(i)} = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^n s(X_\alpha^{(i)} - X_\beta^{(i)}), \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Hoeffding (1948) note la relation suivante:

$$D_n = \frac{n-2}{n+1} \mathcal{S}_n + \frac{3}{n+1} K_n. \quad (3.1.3)$$

Or,  $E(D_n) = (n-2)\varrho/(n+1) + 3\tau/(n+1)$ .  $D_n$  n'est évidemment pas une U-statistique mais comme  $E(K_n) = \tau$  et  $E(K_n^2) < \infty$ , indépendamment de  $n$ , alors  $\sqrt{n}(\mathcal{S}_n - \varrho)$  et  $\sqrt{n}(D_n - \varrho)$  ont asymptotiquement la même la distribution d'après le théorème de Slutsky (voir Manoukian (1986)).



### 3.2. LE CAS MULTIVARIÉ

Le rappel précédent nous servira à définir les matrices de  $\bar{U}$ -statistiques de Kendall et de Spearman. Pour ceci, considérons un échantillon aléatoire  $X_1, \dots, X_n$ , issu du vecteur aléatoire  $X$ , de dimension  $m \times 1$ , dont la fonction de distribution  $F(x) = F(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$  est continue. Désignons par  $F^{(i,j)}$  et  $F^{(i)}$  les distributions marginales respectivement du sous-vecteur  $(X^{(i)}, X^{(j)})$  et de la variable marginale  $X^{(i)}$ .

#### 3.2.1. Matrice de Kendall.

Comme dans le cas bivarié, on pose pour  $i$  et  $j = 1, \dots, m$ ,

$$\begin{aligned}\tau^{(i,j)} &= 2P[(X_1^{(i)} - X_2^{(i)})(X_1^{(j)} - X_2^{(j)}) > 0] - 1 \\ &= 4 \iint F^{(i,j)}(x^{(i)}, x^{(j)}) dF^{(i,j)}(x^{(i)}, x^{(j)}) - 1.\end{aligned}$$

Le noyau symétrique pour  $\tau^{(i,j)}$  est

$$\Phi^{(i,j)}(X_1, X_2) = s\left(X_2^{(i)} - X_1^{(i)}\right) s\left(X_2^{(j)} - X_1^{(j)}\right)$$

et

$$K_n^{(i,j)} = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq n} \Phi^{(i,j)}(X_\alpha, X_\beta)$$

est la  $\bar{U}$ -statistique d'ordre 2 pour  $\tau^{(i,j)}$ . D'autre part, on a pour  $\alpha = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(i,j)}(X_\alpha) &= 1 - 2F^{(i)}(X_\alpha^{(i)}) - 2F^{(j)}(X_\alpha^{(j)}) + 4F^{(i,j)}(X_\alpha^{(i)}, X_\alpha^{(j)}) \\ &= [1 - 2F^{(i)}(X_\alpha^{(i)})][1 - 2F^{(j)}(X_\alpha^{(j)})] \\ &\quad + 4[F^{(i,j)}(X_\alpha^{(i)}, X_\alpha^{(j)}) - F^{(i)}(X_\alpha^{(i)})F^{(j)}(X_\alpha^{(j)})]\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

et on a  $E[\Phi_1^{(i,j)}(X_\alpha)] = \tau^{(i,j)}$  où  $\Phi_1^{(i,j)}(x) = E[\Phi^{(i,j)}(x, X_2)]$ .

Si  $i = j$  alors on a  $\tau^{(i,i)} = 1$  et  $K_n^{(i,i)} = 1$ .

**DÉFINITION 3.2.1.** On appelle *matrice de Kendall*, la matrice  $K_n$  des  $\bar{U}$ -statistiques pour la matrice de paramètres  $\Lambda$  où

$$K_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & K_n^{(1,m)} \\ K_n^{(2,1)} & \dots & K_n^{(2,m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_n^{(m,1)} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \tau^{(1,m)} \\ \tau^{(2,1)} & \dots & \tau^{(2,m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau^{(m,1)} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Du théorème 1.3.1 on déduit la multinormalité asymptotique de  $K_n$  pour une distribution arbitraire  $F(x)$ , en tenant compte de l'expression  $\Phi_1^{(i,j)}(X_1)$  de l'équation 3.2.1 et de l'ordre 2 de toutes les U-statistiques de la matrice  $K_n$  sauf sur la diagonale dont l'ordre est 0.

**THÉORÈME 3.2.1.** *Soit l'échantillon aléatoire  $X_1, \dots, X_n$ , issu du vecteur aléatoire  $X$ , de dimension  $m \times 1$ , dont la distribution  $F(x) = F(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$  est continue et  $K_n$  la matrice de Kendall pour la matrice des paramètres  $\Lambda$ . Alors, la distribution asymptotique, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , de  $\sqrt{n}(\text{vec}K_n - \text{vec}\Lambda)$  est une loi multinormale  $\mathcal{N}_{m^2}(O, \Sigma_K)$  où  $\Sigma_K = \sigma_K^{(ij,kl)}$  avec pour  $i, j, k$  et  $l = 1, \dots, m$*

$$\sigma_K^{(ij,kl)} = 4 \sum_{h=1}^2 \sum_{h'=1}^2 \text{Cov}(U_1^{(i,j),h}, U_1^{(k,l),h'})$$

où

$$U_1^{(i,j),1} = [1 - 2F^{(i)}(X_1^{(i)})][1 - 2F^{(j)}(X_1^{(j)})]$$

et

$$U_1^{(i,j),2} = 4[F^{(i,j)}(X_1^{(i)}, X_1^{(j)}) - F^{(i)}(X_1^{(i)})F^{(j)}(X_1^{(j)})].$$

Évidemment, la loi multinormale  $\mathcal{N}_{m^2}(O, \Sigma_K)$  est dégénérée puisque la matrice  $K_n$  est symétrique. D'autre part,  $\sigma_K^{(ii,kl)} = \sigma_K^{(ij,kk)} = 0$ , pour  $i, j, k$  et  $l = 1, \dots, m$ .

### 3.2.2. Matrice de Spearman.

Comme dans le cas bivarié, on pose pour  $i$  et  $j = 1, \dots, m$ ,

$$\varrho^{(i,j)} = 3 \iint [2F^{(i)}(x^{(i)}) - 1][2F^{(j)}(x^{(j)}) - 1] dF^{(i,j)}(x^{(i)}, x^{(j)})$$

et le noyau symétrique pour le paramètre  $\varrho^{(i,j)}$  est défini par

$$\Psi^{(i,j)}(X_\alpha, X_\beta, X_\nu) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq \alpha \neq \beta \neq \nu \leq 3} s(X_\alpha^{(i)} - X_\beta^{(i)}) s(X_\alpha^{(j)} - X_\nu^{(j)}).$$

Alors, la statistique

$$\begin{aligned} S_n^{(i,j)} &= \frac{1}{\binom{n}{3}} \sum_{1 \leq \alpha < \beta < \nu \leq n} \Psi^{(i,j)}(X_\alpha, X_\beta, X_\nu) \\ &= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \sum_{1 \leq \alpha < \beta < \nu \leq n} \Psi^{(i,j)}(X_\alpha, X_\beta, X_\nu) \end{aligned}$$

est la U-statistique d'ordre 3 pour  $\varrho^{(i,j)}$ . D'autre part on a, pour  $\alpha = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \Psi_1^{(i,j)}(X_\alpha) &= \left[ 1 - 2F^{(i)}(X_\alpha^{(i)}) \right] \left[ 1 - 2F^{(j)}(X_\alpha^{(j)}) \right] - 2F^{(i)}(X_\alpha^{(i)}) - 2F^{(j)}(X_\alpha^{(j)}) \\ &+ 4 \int F^{(i,j)}(X_\alpha^{(i)}, x^{(j)}) dF^{(j)}(x^{(j)}) + 4 \int F^{(i,j)}(x^{(i)}, X_\alpha^{(j)}) dF^{(i)}(x^{(i)}) \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \Psi_1^{(i,j)}(X_\alpha) &= \left[ 1 - 2F^{(i)}(X_\alpha^{(i)}) \right] \left[ 1 - 2F^{(j)}(X_\alpha^{(j)}) \right] \quad (3.2.2) \\ &+ 4 \int \left[ F^{(i,j)}(x^{(i)}, X_\alpha^{(j)}) - F^{(j)}(X_\alpha^{(j)}) F^{(i)}(x^{(i)}) \right] dF^{(i)}(x^{(i)}) \\ &+ 4 \int \left[ F^{(i,j)}(X_\alpha^{(i)}, x^{(j)}) - F^{(i)}(X_\alpha^{(i)}) F^{(j)}(x^{(j)}) \right] dF^{(j)}(x^{(j)}) \end{aligned}$$

et on a  $E \left[ \Psi_1^{(i,j)}(X_\alpha) \right] = \varrho^{(i,j)}$ . Si  $i = j$ , alors  $\varrho^{(i,i)} = 1$  et  $S_n^{(i,i)} = 1$ .

**DÉFINITION 3.2.2.** On appelle *matrice de Spearman*, la matrice  $S_n$  des U-statistiques pour la matrice de paramètres  $P$  où

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & S_n^{(1,m)} \\ S_n^{(2,1)} & \dots & S_n^{(2,m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_n^{(m,1)} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \varrho^{(1,m)} \\ \varrho^{(2,1)} & \dots & \varrho^{(2,m)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varrho^{(m,1)} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Avec l'application du théorème 1.3.1 on déduit la multinormalité asymptotique de  $S_n$  pour une distribution arbitraire  $F(x)$ , en tenant compte de l'expression  $\Psi_1^{(i,j)}(X_1)$  de l'équation 3.2.2 et de l'ordre 3 de toutes les U-statistiques de la matrice  $S_n$  sauf sur la diagonale dont l'ordre est 0.

**THÉORÈME 3.2.2.** Soit l'échantillon aléatoire  $X_1, \dots, X_n$ , issu du vecteur aléatoire  $X$ , de dimension  $m \times 1$ , dont la distribution  $F(x) = F(x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$  est continue et  $S_n$  la matrice de Spearman pour la matrice des paramètres  $P$ . Alors, la distribution asymptotique, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , de  $\sqrt{n}(\text{vec} S_n - \text{vec} P)$  est une loi multinormale  $\mathcal{N}_{m^2}(O, \Sigma_S)$  où  $\Sigma_S = \sigma_S^{(ij,kl)}$  avec pour  $i, j, k$  et  $l = 1, \dots, m$

$$\sigma_S^{(ij,kl)} = 9 \sum_{h=1}^3 \sum_{h'=1}^3 \text{Cov}(V_1^{(i,j),h}, V_1^{(k,l),h'})$$

où

$$V_1^{(i,j),1} = [1 - 2F^{(i)}(X_1^{(i)})][1 - 2F^{(j)}(X_1^{(j)})],$$

$$V_1^{(i,j),2} = 4 \int [F^{(i,j)}(x^{(i)}, X_1^{(j)}) - F^{(j)}(X_1^{(j)})F^{(i)}(x^{(i)})] dF^{(i)}$$

et

$$V_1^{(i,j),3} = 4 \int [F^{(i,j)}(X_1^{(i)}, x^{(j)}) - F^{(i)}(X_1^{(i)})F^{(j)}(x^{(j)})] dF^{(j)}.$$

Évidemment, la loi multinormale  $\mathcal{N}_{m^2}(O, \Sigma_S)$  est dégénérée, puisque la matrice  $S_n$  est symétrique. D'autre part,  $\sigma_S^{(ii,kl)} = \sigma_S^{(ij,kk)} = 0$ , pour  $i, j, k$  et  $l = 1, \dots, m$ . Aussi, note-t-on que

$$V_1^{(i,j),1} = U_1^{(i,j),1} \text{ et } V_1^{(i,j),2} = V_1^{(j,i),3}$$

On remarque qu'on peut aussi écrire la matrice de covariance des rangs des vecteurs d'observations en fonction de la matrice  $K_n$  de Kendall et de la matrice  $S_n$  de Spearman à l'aide de la relation 3.1.3

$$D_n = \frac{n-2}{n+1} S_n + \frac{3}{n+1} K_n \quad (3.2.3)$$

où les éléments de la matrice  $D_n$  sont définis, comme dans 3.1.2, par

$$D_n^{(i,j)} = \frac{12}{n^3 - n} \sum_{\alpha=1}^n \left[ R_\alpha^{(i)} - \frac{n+1}{2} \right] \left[ R_\alpha^{(j)} - \frac{n+1}{2} \right]$$

avec  $R_\alpha^{(i)}$  le rang de  $X_\alpha^{(i)}$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ ,  $i$  et  $j = 1, \dots, m$ , donné par

$$R_\alpha^{(i)} = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^n s(X_\alpha^{(i)} - X_\beta^{(i)}),$$

$s$  est la fonction signe définie par 3.1.1.

Ainsi, on a

$$E(\text{vec} D_n) = \frac{n-2}{n+1} \text{vec} P + \frac{3}{n+1} \text{vec} \Lambda.$$

Par conséquent,  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\text{vec} D_n) = \text{vec} P$ . La distribution asymptotique de

$$\sqrt{n}(\text{vec} D_n - \text{vec} P)$$

est donnée sous les mêmes conditions par Cléroux, Lazraq & Lepage (1995) en utilisant un résultat de Puri & al (1970). Or, cette distribution asymptotique est exactement la même que celle de

$$\sqrt{n}(\text{vec}\mathcal{S}_n - \text{vec}\mathcal{P})$$

qu'on a obtenue dans le théorème 3.2.2.

En effet, puisque  $E[K_n^{2(i,j)}] < \infty$  pour tout  $n$ ,  $i$  et  $j = 1, \dots, m$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left[3K_n^{(i,j)}/(n+1)\right]^2 = 0.$$

Par conséquent,  $\left[3K_n^{(i,j)}/(n+1)\right]$  converge en probabilité vers zéro. Le résultat recherché découle alors du théorème de Slutsky (voir aussi Hoeffding (1948)).

Terminons cette section en remarquant que le coefficient  $\varrho^{(i,j)}$  de Spearman peut aussi s'exprimer comme

$$\varrho^{(i,j)} = \iint J_{(i)}\left(F^{(i)}(x^{(i)})\right) J_{(j)}\left(F^{(j)}(x^{(j)})\right) dF^{(i,j)}(x^{(i)}, x^{(j)}), \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (3.2.4)$$

où la fonction  $J_{(i)}$  est telle que  $J_{(i)}(u) = \sqrt{3}(2u - 1)$ , pour  $0 \leq u \leq 1$ .

L'équation 3.2.4 du coefficient  $\varrho^{(i,j)}$  de Spearman avec  $J_{(i)}(u) = \sqrt{3}(2u - 1)$  est un cas particulier d'un cadre plus général développé par Puri, Sen & Gokhale (1970). Ce cadre général suppose que les fonctions  $J_{(i)}$ , pour  $i = 1, \dots, m$ , satisfont un certain ensemble de conditions et que les éléments de la matrice d'association s'expriment comme le produit des fonctions  $J_{(i)}$  et  $J_{(j)}$  évaluées respectivement aux distributions marginales  $F^{(i)}$  et  $F^{(j)}$ . Malheureusement, ce cadre a ses limites. C'est ainsi, par exemple, que le coefficient de Kendall ne peut s'exprimer sous la forme 3.2.4 puisque

$$\tau^{(i,j)} = 4 \iint F^{(i,j)}(x^{(i)}, x^{(j)}) dF^{(i,j)}(x^{(i)}, x^{(j)}) - 1.$$

Un autre exemple est celui du coefficient  $\sigma^{(i,j)}$  de la matrice de covariance où d'après le lemme de Hoeffding (voir Lehmann (1966)), on a

$$\sigma^{(i,j)} = \iint \left[ F^{(i,j)}(x^{(i)}, x^{(j)}) - F^{(i)}(x^{(i)})F^{(j)}(x^{(j)}) \right] dx^{(i)} dx^{(j)}.$$

L'approche avec des matrices de U-statistiques qu'on propose dans cette thèse a certainement ses propres limites mais elle s'applique à plusieurs situations et permet d'unifier les résultats pour différentes matrices d'association.

### 3.3. DISTRIBUTIONS ASYMPTOTIQUES

Dans le chapitre 2 on supposait que l'échantillon d'observations provenait de la famille de distributions elliptiques. L'ellipticité nous permettait de scinder le coefficient  $\rho^{(ij,kl)}$ , obtenu dans le théorème 1.3.3, en une somme de produits de coefficients de corrélation (voir l'équation 2.1.2). On obtenait ainsi la matrice de covariance de la distribution asymptotique  $\sqrt{n}vecR_{21}$  comme fonction des sous-matrices de corrélation  $\mathcal{P}_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ . Lorsque l'hypothèse de l'ellipticité n'est plus observée, on ne peut pas en général scinder les moments d'ordre quatre en une somme des moments d'ordre deux. Mais sous des hypothèses d'indépendance ou voisines de l'indépendance, on y arrive.

On considère l'hypothèse nulle

$$H_0^* : F(x) = F^{[1]}(x^{[1]})F^{[2]}(x^{[2]}) \quad (3.3.1)$$

où  $F(\cdot)$  est une fonction de distribution continue,  $x = (x^{[1]}, x^{[2]}) \in \mathbb{R}^m$  avec  $x^{[1]} = (x^{(1)}, \dots, x^{(p)})$  et  $x^{[2]} = (x^{(p+1)}, \dots, x^{(m)})$ ,  $p + q = m$ . Ceci implique en particulier que

$$F^{(i,j)}(x^{(i)}, x^{(j)}) = F^{(i)}(x^{(i)})F^{(j)}(x^{(j)}) \quad (3.3.2)$$

si  $i = 1, \dots, p$  et  $j = p+1, \dots, m$  et

$$F^{(ij,kl)}(x^{(i)}, x^{(j)}, x^{(k)}, x^{(l)}) = F^{(i,k)}(x^{(i)}, x^{(k)})F^{(j,l)}(x^{(j)}, x^{(l)}) \quad (3.3.3)$$

si  $i, k = 1, \dots, p$  et  $j, l = p+1, \dots, m$ .  $F^{(ij,kl)}$  désigne la fonction de distribution du vecteur  $(X^{(i)}, X^{(j)}, X^{(k)}, X^{(l)})$

De même, on partitionne toutes les matrices de la population et les matrices échantillonales correspondantes comme suit

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} \end{pmatrix},$$

$$K_n = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}, \mathcal{S}_n = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{S}_{22} \end{pmatrix}, S_n = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \text{ et } R_n = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$$

où chaque matrice  $M_{21} = (m_{ij})$ , ( $i = p+1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, p$  et  $M = K, \mathcal{S}, S$  ou  $R$ ) est de dimension  $q \times p$ . En fait, les matrices  $K_n$ ,  $\mathcal{S}_n$  et  $S_n$  sont des matrices de U-statistiques pour respectivement les matrices de paramètres  $\Lambda$ ,  $P$  et  $\Sigma$ .

Dans cette section on établit les distributions asymptotiques des vecteurs aléatoires  $\sqrt{n} \text{vec} M_{21}$ , pour  $M = K_{21}, \mathcal{S}_{21}, S_{21}, R_{21}$ , sous  $H_0^*$  et une suite d'hypothèses alternatives convergeant vers  $H_0^*$ . Outre leurs propres intérêts, ces résultats nous servira dans le chapitre 4 à construire un ensemble de tests asymptotiques pour  $H_0^*$ .

### 3.3.1. Sous $H_0^*$ .

Il évident que si  $X^{[1]}$  et  $X^{[2]}$  sont indépendants, alors  $\Lambda_{12} = 0$ ,  $P_{12} = 0$ ,  $\Sigma_{12} = 0$  et  $\mathcal{P}_{12} = 0$ .

**THÉORÈME 3.3.1.** *Sous  $H_0^*$ , on a*

(i)  $\sqrt{n} \text{vec} K_{21} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(\tau)}$  où  $Z^{(\tau)}$  suit une loi  $\mathcal{N}_{pq}(O, \frac{4}{9} P_{11} \otimes P_{22})$ ,

(ii)  $\sqrt{n} \text{vec} \mathcal{S}_{21} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(e)}$  où  $Z^{(e)}$  suit une loi  $\mathcal{N}_{pq}(O, P_{11} \otimes P_{22})$ .

*Sous  $H_0^*$  et si  $X$  admet tous les moments d'ordre 4, on a*

(iii)  $\sqrt{n} \text{vec} S_{21} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(C)}$  où  $Z^{(C)}$  suit une loi  $\mathcal{N}_{pq}(O, \Sigma_{11} \otimes \Sigma_{22})$ ,

(iv)  $\sqrt{n} \text{vec} R_{21} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(R)}$  où  $Z^{(R)}$  suit une loi  $\mathcal{N}_{pq}(O, \mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22})$ .

**Démonstration:**

(i) La matrice  $K_{21}$  de dimension  $q \times p$  est la matrice des  $pq$  U-statistiques  $K_n^{(i,j)}$  d'ordre 2 ( $1 \leq j \leq p$  et  $p+1 \leq i \leq m$ ). D'après le théorème 3.2.1 ou directement par le théorème 1.3.1, sous  $H_0^*$ ,  $\sqrt{n}vec K_{21}$  converge en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_{pq}(O, A)$  où les éléments de A sont donnés, en tenant compte de la définition  $\varrho^{(i,k)}$ , par

$$\begin{aligned} \sigma_K^{(ij,kl)} &= 4E\left(U_1^{(i,j),1} U_1^{(k,l),1}\right) = 4E\left[1 - 2F^{(i)}(X_1^{(i)})\right] \left[1 - 2F^{(k)}(X_1^{(k)})\right] \\ &\quad E\left[1 - 2F^{(j)}(X_1^{(j)})\right] \left[1 - 2F^{(l)}(X_1^{(l)})\right] \\ &= \frac{4}{9} \varrho^{(i,k)} \varrho^{(j,l)} \end{aligned}$$

pour  $1 \leq j, l \leq p$  et  $p+1 \leq i, k \leq m$ , puisque sous  $H_0^*$  on a

$$F^{(i,j)}(x^{(i)}, x^{(j)}) - F^{(i)}(x^{(i)})F^{(j)}(x^{(j)}) = 0.$$

Ainsi, on obtient  $A = \frac{4}{9} P_{11} \otimes P_{22}$ .

(ii) Le cas de la matrice de Spearman se traite de la même manière que le cas précédent. Le théorème 3.2.2 fournit les éléments de la matrice de covariance B d'une loi multinormale  $\mathcal{N}_{pq}(O, B)$  qui est la loi asymptotique, sous  $H_0^*$ , du vecteur aléatoire  $\sqrt{n}vec S_{21}$  :

$$\begin{aligned} \sigma_S^{(ij,kl)} &= 9E\left(V_1^{(i,j),1} V_1^{(k,l),1}\right) = 9E\left[\left(1 - 2F^{(i)}(X_1^{(i)})\right)\left(1 - 2F^{(k)}(X_1^{(k)})\right)\right] \\ &\quad E\left[\left(1 - 2F^{(j)}(X_1^{(j)})\right)\left(1 - 2F^{(l)}(X_1^{(l)})\right)\right] \\ &= \varrho^{(i,k)} \varrho^{(j,l)} \end{aligned}$$

pour  $1 \leq j, l \leq p$  et  $p+1 \leq i, k \leq m$ . Ainsi, on obtient  $B = P_{11} \otimes P_{22}$ .

(iii) Pour le cas de la matrice de covariance, le résultat découle du théorème 1.3.2. En effet, sous  $H_0^*$ ,  $\sqrt{n}vec S_{21}$  converge en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_{pq}(O, C)$  où les éléments de C sont donnés pour  $1 \leq j, l \leq p$  et  $p+1 \leq i, k \leq m$ , par

$$\begin{aligned} \sigma^{(ij,kl)} &= E\left[\left(X_1^{(i)} - \mu^{(i)}\right)\left(X_1^{(j)} - \mu^{(j)}\right)\left(X_1^{(k)} - \mu^{(k)}\right)\left(X_1^{(l)} - \mu^{(l)}\right)\right] \\ &= E\left[\left(X_1^{(i)} - \mu^{(i)}\right)\left(X_1^{(k)} - \mu^{(k)}\right)\right] E\left[\left(X_1^{(j)} - \mu^{(j)}\right)\left(X_1^{(l)} - \mu^{(l)}\right)\right] \\ &= \sigma^{(i,k)} \sigma^{(j,l)}. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient  $C = \Sigma_{11} \otimes \Sigma_{22}$ .

(iv) Le cas de la matrice de corrélation résulte du théorème 1.3.3. En effet, sous



$H_0^*$ ,  $\sqrt{n}vecR_{21}$  converge en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_{pq}(O, D)$  où les éléments de  $D$  sont donnés pour  $1 \leq j, l \leq p$  et  $p+1 \leq i, k \leq m$ , par

$$\begin{aligned}\rho^{(ij,kl)} &= \sigma^{(ij,kl)} (\sigma^{(i,i)} \sigma^{(j,j)} \sigma^{(k,k)} \sigma^{(l,l)})^{-1/2} \\ &= \sigma^{(i,k)} \sigma^{(j,l)} (\sigma^{(i,i)} \sigma^{(j,j)} \sigma^{(k,k)} \sigma^{(l,l)})^{-1/2} \\ &= \rho^{(i,k)} \rho^{(j,l)}\end{aligned}$$

puisque  $\rho^{(i,j)} = \rho^{(k,l)} = 0$  sous  $H_0^*$ . Ainsi,  $\rho^{(i,k)} \rho^{(j,l)}$  est l'élément générique de la matrice  $D = \mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22}$ .

C.Q.F.D.

Le théorème précédent montre que sous  $H_0^*$  les vecteurs aléatoires  $\sqrt{n}vecS_{21}$  et  $\sqrt{n}vecK_{21}$  convergent en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_{pq}$  dont la matrice de covariance est la même à un coefficient  $4/9$  près. On verra plus loin qu'il en est de même sous une suite d'hypothèses alternatives. C'est ainsi qu'il est pertinent d'étudier simultanément les distributions asymptotiques des deux vecteurs  $\sqrt{n}vecS_{21}$  et  $\sqrt{n}vecK_{21}$ , puisque la matrice de covariance de la distribution asymptotique de ce dernier s'obtient de celle de  $\sqrt{n}vecS_{21}$  et non l'inverse.

Notons aussi que même si  $X$  suit une loi elliptique de coefficient d'aplatissement  $\kappa$ , le vecteur aléatoire  $\sqrt{n}vecS_{21}$  converge en loi vers  $\mathcal{N}_{pq}(O, \Sigma_{11} \otimes \Sigma_{22})$  sous  $H_0^*$ . De ce résultat, on déduit que  $\kappa = 0$ . En effet, en égalisant l'équation 1.2.2

$$Cov(u_{ij}, u_{kl}) = (1 + \kappa) (\sigma^{(i,j)} \sigma^{(k,l)} + \sigma^{(i,k)} \sigma^{(j,l)} + \sigma^{(i,l)} \sigma^{(j,k)}) - \sigma^{(i,j)} \sigma^{(k,l)}$$

et celle du théorème 1.3.2

$$Cov(u_{ij}, u_{kl}) = \sigma^{(ij,kl)} - \sigma^{(i,j)} \sigma^{(k,l)}$$

et en tenant compte du fait que sous  $H_0^*$  on a  $\sigma^{(ij,kl)} = \sigma^{(i,k)} \sigma^{(j,l)}$  et  $\sigma^{(i,j)} = \sigma^{(k,l)} = \sigma^{(i,l)} = \sigma^{(j,k)} = 0$ , on tire  $\kappa = 0$ . Par contre, si l'on suppose que  $X^{[1]}$  et  $X^{[2]}$  sont non corrélés, c'est-à-dire  $H_0: \Sigma_{21} = 0$ , alors, selon Cléroux & Ducharme (1989) ou Allaire & Lepage (1990),  $\sqrt{n}vecS_{21}$  converge vers un vecteur de loi  $\mathcal{N}_{pq}(O, (1 + \kappa)\Sigma_{11} \otimes \Sigma_{22})$ .

Ainsi, le choix de l'hypothèse ( $H_0$  ou  $H_0^*$ ) sur la classe des distributions elliptiques modifie la matrice de covariance de la distribution asymptotique de  $\sqrt{n}vecS_{21}$ . Dans ce sens, ce résultat s'apparente au théorème 1.2.1.

Il est à noter que dans le cas d'une distribution quelconque, même avec l'hypothèse que tous les moments d'ordre 4 existent, toutes les composantes  $X^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , du vecteur aléatoire  $X$  n'admettent pas forcément le même coefficient d'aplatissement  $\kappa^{(i)}$  et on ne peut conclure que l'hypothèse d'indépendance  $H_0^*$  implique que  $\kappa^{(i)} = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

### 3.3.2. Sous $H_{1;n}^*$ .

Dans le cas multinormal, l'association entre deux sous-vecteurs est reflétée par la matrice de corrélation. Mais ceci ne peut se faire dans le cas d'une distribution quelconque. Ainsi (voir Puri & al (1970), p.274), on formule certaines fonctions de dépendance notées par

$$G^{(i,j)}(x^{(i)}, x^{(j)}) = \frac{F^{(i,j)}(x^{(i)}, x^{(j)})}{F^{(i)}(x^{(i)})F^{(j)}(x^{(j)})}, \quad i \neq j, i \text{ et } j = 1, \dots, m.$$

Donc, si  $X^{(i)}$  et  $X^{(j)}$  sont indépendants,  $G^{(i,j)}(x^{(i)}, x^{(j)}) = 1$ . Ainsi, la déviation de l'unité sur un ensemble de points de mesure non nulle reflète la dépendance. Ce genre de fonctions de dépendance est moins contraignant qu'un certain type particulier d'alternatives de dépendance linéaire comme celle considérée par Konijn (1956) ou Bhuchongkul (1964). Cette forme de fonction de dépendance semble avoir été introduite par Sibuya (1959). De façon générale, on note par

$$G(F^{[1]}, F^{[2]}) = \frac{F(x^{[1]}, x^{[2]})}{F^{[1]}(x^{[1]})F^{[2]}(x^{[2]})} = \frac{F(x)}{F^{[1]}(x^{[1]})F^{[2]}(x^{[2]})}.$$

Considérons maintenant une suite d'hypothèses alternatives convergeant vers l'hypothèse nulle spécifiée par

$$G(F^{[1]}, F^{[2]}) = 1 + \frac{\Omega^{([1],[2])}(F^{[1]}(x^{[1]}), F^{[2]}(x^{[2]}))}{\sqrt{n}},$$

autrement dit on pose

$$H_{1:n}^* : F(x) = F^{[1]}(x^{[1]})F^{[2]}(x^{[2]}) \left( 1 + \frac{\Omega^{([1],[2])}(F^{[1]}(x^{[1]}), F^{[2]}(x^{[2]}))}{\sqrt{n}} \right)$$

pour  $x = (x^{[1]}, x^{[2]}) \in \mathbb{R}^m$  avec  $x^{[1]} = (x^{(1)}, \dots, x^{(p)})$  et  $x^{[2]} = (x^{(p+1)}, \dots, x^{(m)})$  où  $\Omega^{([1],[2])} \neq 0$  est une certaine fonction des deux distributions marginales  $F^{[1]}$  et  $F^{[2]}$ .

L'hypothèse  $H_{1:n}^*$  implique en particulier que

$$F^{(i,j)}(x^{(i)}, x^{(j)}) = F^{(i)}(x^{(i)})F^{(j)}(x^{(j)}) \left( 1 + \frac{\Omega^{(i,j)}(F^{(i)}(x^{(i)}), F^{(j)}(x^{(j)}))}{\sqrt{n}} \right) \quad (3.3.4)$$

pour  $i = p+1, \dots, m, j = 1, \dots, p$  où  $\Omega^{(i,j)}$  est une certaine fonction non nulle pour tout couple  $(i,j)$ ,  $i = p+1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, p$ . La notation  $F^{(i,j)}$  désigne la distribution marginale conjointe du sous-vecteur  $(X^{(i)}, X^{(j)})'$ .

De même, l'hypothèse  $H_{1:n}^*$  implique aussi que

$$F^{(ij,kl)}(x^{(i)}, x^{(j)}, x^{(k)}, x^{(l)}) = F^{(i,k)}(x^{(i)}, x^{(k)})F^{(j,l)}(x^{(j)}, x^{(l)}) \left( 1 + \frac{\Omega^{(ij,kl)}(F^{(i,k)}, F^{(j,l)})}{\sqrt{n}} \right) \quad (3.3.5)$$

pour  $j, l = 1, \dots, p$  et  $i, k = p+1, \dots, m$  où  $\Omega^{(ij,kl)}$  est une certaine fonction non nulle.

Dans ce qui suit, la condition suivante sera implicitement satisfaite lorsque la suite d'hypothèses est discutée.

*Condition H:*

Les fonctions de densité marginales

$$f^{(ij,kl)}(x^{(i)}, x^{(j)}, x^{(k)}, x^{(l)}) = \frac{\partial^4 F^{(ij,kl)}(x^{(i)}, x^{(j)}, x^{(k)}, x^{(l)})}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)} \partial x^{(k)} \partial x^{(l)}}$$

existent pour  $j, l = 1, \dots, p$  et  $i, k = p+1, \dots, m$ , et par conséquent,  $\Omega^{(ij,kl)}$  admet des dérivées partielles d'ordre 4 pour tout  $(i,j,k,l)$  tel que  $j, l = 1, \dots, p$  et  $i, k = p+1, \dots, m$ .

À l'aide de la suite d'hypothèses  $H_{1:n}^*$ , on peut exprimer les sous-matrices de la population  $M_{21} = (m_{ij})$ , pour  $i = p+1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, p$ ,  $M = \Lambda, P, \Sigma$  ou  $\mathcal{P}$ , sous la forme  $hA/\sqrt{n}$ ,  $h = \tau, g, C$  ou  $R$  selon la forme de la matrice  $M$  avec  $hA$  une matrice

donnée de dimension  $q \times p$ .

Pour alléger le texte on convient de poser comme il est d'usage,

$$\begin{aligned} dF^{(i,j)} &= f^{(i,j)}(x^{(i)}, x^{(j)}) dx^{(i)} dx^{(j)} = \frac{\partial^2 F^{(i,j)}(x^{(i)}, x^{(j)})}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} dx^{(i)} dx^{(j)} \\ &= dF^{(i)} dF^{(j)} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \omega_{ij}(F^{(i)}(x^{(i)}), F^{(j)}(x^{(j)})) \right) \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

pour  $i = p+1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, p$ , où  $\omega_{ij}$  est une certaine fonction obtenue en dérivant l'équation 3.3.4. Il est évident que  $\omega_{ij}$  est centrée par rapport à la mesure de Lebesgue  $dx^{(i)} dx^{(j)}$ . Il suffit d'intégrer l'équation 3.3.6 pour s'en apercevoir.

On pose  $B = (\beta_{ij})$ , la matrice de dimension  $q \times p$ , où pour  $i = p+1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, p$ ,

$$\beta_{ij} = \iint F^{(i)}(x^{(i)}) F^{(j)}(x^{(j)}) \Omega^{(i,j)}(F^{(i)}(x^{(i)}), F^{(j)}(x^{(j)})) dF^{(i,j)}.$$

En tenant compte du noyau  $\Psi_1^{(i,j)}$  défini par l'équation 3.2.2 où on a

$$E[\Psi_1^{(i,j)}(X_1)] = \varrho^{(i,j)} = 3 \iint [2F^{(i)}(x^{(i)}) - 1][2F^{(j)}(x^{(j)}) - 1] dF^{(i,j)},$$

on obtient sous  $H_{1:n}^*$ ,

$$\begin{aligned} \varrho^{(i,j)} &= \frac{1}{3} \varrho^{(i,j)} + 8 \iint [F^{(i,j)}(x^{(i)}, x^{(j)}) - F^{(i)}(x^{(i)}) F^{(j)}(x^{(j)})] dF^{(i,j)} \\ &= \frac{1}{3} \varrho^{(i,j)} + \frac{8}{\sqrt{n}} \beta_{ij} \end{aligned}$$

ou encore

$$\varrho^{(i,j)} = \frac{12}{\sqrt{n}} \beta_{ij}.$$

Ainsi, sous  $H_{1:n}^*$ , la matrice  $P_{21}$  est de la forme

$$P_{21} = \frac{1}{\sqrt{n}} eA = \frac{12}{\sqrt{n}} B.$$

De même, en tenant compte du noyau  $\Phi_1^{(i,j)}$  défini par l'équation 3.2.1 où on a  $E[\Phi_1^{(i,j)}(X_1)] = \tau^{(i,j)}$ , on obtient sous  $H_{1:n}^*$ ,

$$\begin{aligned} \tau^{(i,j)} &= \frac{1}{3} \varrho^{(i,j)} + \frac{4}{\sqrt{n}} \beta_{ij} \\ &= \frac{1}{3} \frac{12}{\sqrt{n}} \beta_{ij} + \frac{4}{\sqrt{n}} \beta_{ij} \\ &= \frac{8}{\sqrt{n}} \beta_{ij} \end{aligned}$$

Ainsi, sous  $H_{1;n}^*$ , la matrice  $\Lambda_{21}$  est de la forme

$$\Lambda_{21} = \frac{1}{\sqrt{n}} \tau A = \frac{8}{\sqrt{n}} B.$$

D'autre part, d'après le lemme de Hoeffding (voir Lehmann (1966)) qui dit que

$$\begin{aligned} \sigma^{(i,j)} &= \iint [F^{(i,j)}(x^{(i)}, x^{(j)}) - F^{(i)}(x^{(i)})F^{(j)}(x^{(j)})] dx^{(i)} dx^{(j)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \iint F^{(i)}(x^{(i)})F^{(j)}(x^{(j)})\Omega^{(i,j)}(F^{(i)}(x^{(i)}), F^{(j)}(x^{(j)})) dx^{(i)} dx^{(j)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} c_{a_{ij}} \end{aligned}$$

où

$$c_{a_{ij}} = \iint F^{(i)}(x^{(i)})F^{(j)}(x^{(j)})\Omega^{(i,j)}(F^{(i)}(x^{(i)}), F^{(j)}(x^{(j)})) dx^{(i)} dx^{(j)},$$

on obtient sous  $H_{1;n}^*$ , que la matrice  $\Sigma_{21}$  est de la forme

$$\Sigma_{21} = \frac{1}{\sqrt{n}} c_A$$

en désignant par  $c_A$  la matrice de dimension  $q \times p$  dont les éléments sont  $c_{a_{ij}}$ ,  $i = p+1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, p$ .

Le coefficient de corrélation étant  $\rho^{(i,j)} = (\sigma^{(i,i)})^{-1/2} \sigma^{(i,j)} (\sigma^{(j,j)})^{-1/2}$ , alors pour  $i = p+1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, p$ ,  $\rho^{(i,j)} = (\sigma^{(i,i)})^{-1/2} c_{a_{ij}} (\sigma^{(j,j)})^{-1/2} / \sqrt{n}$  est l'élément générique de la matrice  $D_{22}^{-1/2} c_A D_{11}^{-1/2}$  où

$$D_{11}^{-1/2} = \text{diag}((\sigma^{(1,1)})^{-1/2}, \dots, (\sigma^{(p,p)})^{-1/2})_{p \times p}$$

et

$$D_{22}^{-1/2} = \text{diag}((\sigma^{(p+1,p+1)})^{-1/2}, \dots, (\sigma^{(m,m)})^{-1/2})_{q \times q}.$$

Ainsi, sous  $H_{1;n}^*$ , la matrice  $\mathcal{P}_{21}$  est de la forme

$$\mathcal{P}_{21} = \frac{1}{\sqrt{n}} R A = \left( \frac{R_{ij}}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} D_{22}^{-1/2} c_A D_{11}^{-1/2}.$$

On résume ces résultats dans le lemme suivant.

LEMME 3.3.1. *La suite d'hypothèses  $H_{1;n}^*$  implique que*

$$\begin{aligned} \Lambda_{21} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \tau A = 8 \left( \frac{\beta_{ij}}{\sqrt{n}} \right) = \frac{8}{\sqrt{n}} B, \\ \mathcal{P}_{21} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \varrho A = 12 \left( \frac{\beta_{ij}}{\sqrt{n}} \right) = \frac{12}{\sqrt{n}} B, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{21} &= \frac{1}{\sqrt{n}} C_A = \left( \frac{C_{a_{ij}}}{\sqrt{n}} \right), \\ \mathcal{P}_{21} &= \frac{1}{\sqrt{n}} R_A = \left( \frac{R_{a_{ij}}}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} D_{22}^{-1/2} C_A D_{11}^{-1/2}.\end{aligned}$$

où pour  $i = p+1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, p$ ,  $B = (\beta_{ij})$  et  $C_A = (C_{a_{ij}})$  avec

$$\begin{aligned}\beta_{ij} &= \iint F^{(i)}(x^{(i)}) F^{(j)}(x^{(j)}) \Omega^{(i,j)}(F^{(i)}(x^{(i)}), F^{(j)}(x^{(j)})) dF^{(i,j)}, \\ C_{a_{ij}} &= \iint F^{(i)}(x^{(i)}) F^{(j)}(x^{(j)}) \Omega^{(i,j)}(F^{(i)}(x^{(i)}), F^{(j)}(x^{(j)})) dx^{(i)} dx^{(j)}, \\ D_{11}^{-1/2} &= \text{diag}((\sigma^{(1,1)})^{-1/2}, \dots, (\sigma^{(p,p)})^{-1/2})_{p \times p}\end{aligned}$$

et

$$D_{22}^{-1/2} = \text{diag}((\sigma^{(p+1,p+1)})^{-1/2}, \dots, (\sigma^{(m,m)})^{-1/2})_{q \times q}.$$

En dérivant l'équation 3.3.5 et à cause de la condition H, on peut également exprimer la suite d'hypothèse  $H_{1:n}^*$  sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}f^{(ij,kl)}(x^{(i)}, x^{(j)}, x^{(k)}, x^{(l)}) &= \frac{\partial^4 F^{(ij,kl)}(x^{(i)}, x^{(j)}, x^{(k)}, x^{(l)})}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)} \partial x^{(k)} \partial x^{(l)}} \quad (3.3.7) \\ &= \frac{\partial^2 F^{(i,k)}(x^{(i)}, x^{(k)})}{\partial x^{(i)} \partial x^{(k)}} \frac{\partial^2 F^{(j,l)}(x^{(j)}, x^{(l)})}{\partial x^{(j)} \partial x^{(l)}} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} \omega_{ij,kl}\end{aligned}$$

où  $\omega_{ij,kl}$  est une fonction des dérivées partielles de  $\Omega^{(ij,kl)}$ ,  $F^{(i,k)}$ ,  $F^{(j,l)}$ ,  $\partial^2 F^{(i,k)} / \partial x^{(i)} \partial x^{(k)}$ ,  $\partial^2 F^{(j,l)} / \partial x^{(j)} \partial x^{(l)}$  et  $\partial F^{(i)} / \partial x^{(i)}$  pour  $i, k = p+1, \dots, m$  et  $j, l = 1, \dots, p$ . Le calcul de  $\omega_{ij,kl}$  est relativement long et ne présente pas d'intérêt.

On pose encore ici

$$\begin{aligned}dF^{(ij,kl)} &= f^{(ij,kl)}(x^{(i)}, x^{(j)}, x^{(k)}, x^{(l)}) dx^{(i)} dx^{(j)} dx^{(k)} dx^{(l)} \\ &= \frac{\partial^4 F^{(ij,kl)}(x^{(i)}, x^{(j)}, x^{(k)}, x^{(l)})}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)} \partial x^{(k)} \partial x^{(l)}} dx^{(i)} dx^{(j)} dx^{(k)} dx^{(l)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dF^{(i,k)} &= f^{(i,k)}(x^{(i)}, x^{(k)}) dx^{(i)} dx^{(k)} \\ &= \frac{\partial^2 F^{(i,k)}(x^{(i)}, x^{(k)})}{\partial x^{(i)} \partial x^{(k)}} dx^{(i)} dx^{(k)} \end{aligned}$$

et

$$dF^{(j,l)} = \frac{\partial^2 F^{(j,l)}(x^{(j)}, x^{(l)})}{\partial x^{(j)} \partial x^{(l)}} dx^{(j)} dx^{(l)}.$$

Ainsi,  $\omega_{ij,kl}$  est centrée, car en intégrant l'équation 3.3.7, on a

$$1 = \iiint dF^{(ij,kl)} = \iint dF^{(i,k)} \iint dF^{(j,l)} + \frac{1}{\sqrt{n}} \iiint \omega_{ij,kl} dx^{(i)} dx^{(j)} dx^{(k)} dx^{(l)}$$

ce qui implique que  $\iiint \omega_{ij,kl} dx^{(i)} dx^{(j)} dx^{(k)} dx^{(l)} = 0$ .

**THÉORÈME 3.3.2.** *Sous  $H_{1;n}^*$ , on a*

(i)  $\sqrt{n} \text{vec} K_{21} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(\tau)}$  où  $Z^{(\tau)}$  suit une loi  $\mathcal{N}_{pq}(\text{vec } {}^{\tau}A, \frac{4}{9} P_{11} \otimes P_{22})$ ,

(ii)  $\sqrt{n} \text{vec} S_{21} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(e)}$  où suit une loi  $\mathcal{N}_{pq}(\text{vec } {}^eA, P_{11} \otimes P_{22})$ .

*Sous  $H_{1;n}^*$  si  $X$  admet tous les moments d'ordre 4, on a*

(iii)  $\sqrt{n} \text{vec} S_{21} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(C)}$  où suit une loi  $\mathcal{N}_{pq}(\text{vec } {}^CA, \Sigma_{11} \otimes \Sigma_{22})$ ,

(iv)  $\sqrt{n} \text{vec} R_{21} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(R)}$  où suit une loi  $\mathcal{N}_{pq}(\text{vec } {}^RA, \mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22})$ .

### Démonstration:

Toutes les matrices considérées ici sont de dimension  $q \times p$  et les indices  $i, j, k$ , et  $l$  sont tels que  $i, k = p + 1, \dots, m$  et  $j, l = 1, \dots, p$ .

D'après le lemme 3.3.1 on a  $\Lambda_{21} = \frac{1}{\sqrt{n}} {}^{\tau}A$  et puisque  $\tau^{(i,j)} = E[\Phi_1^{(i,j)}(X_1)] = \bar{a}_{ij}/\sqrt{n}$ , on obtient alors  $E(\sqrt{n} \text{vec} K_{21}) = \text{vec } {}^{\tau}A$ .

De même, on obtient

$$E(\sqrt{n} \text{vec} S_{21}) = \text{vec } {}^eA, \quad E(\sqrt{n} \text{vec} S_{21}) = \text{vec } {}^CA \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E(\sqrt{n} \text{vec} R_{21}) = \text{vec } {}^RA$$

(i) *Cas de la matrice de Kendall.* D'après le théorème 3.2.1 et par Serfling (1980) ( voir lemme A, p.20), le vecteur aléatoire  $\sqrt{n}vecK_{21}$  converge en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_{pq}(vec \tau A, B_K)$  où les éléments de la matrice de covariance  $B_K$  sont donnés par

$$\sigma_K^{(ij,kl)} = 4Cov \left( U_1^{(i,j),1}, U_1^{(k,l),1} \right) = \frac{4}{9} \varrho^{(i,k)} \varrho^{(j,l)}$$

En effet, en scindant l'intégration par rapport à  $dF^{(ij,kl)}$  à l'aide de la décomposition donnée par l'équation 3.3.7, on obtient

$$\begin{aligned} Cov \left( U_1^{(i,j),1}, U_1^{(k,l),1} \right) &= E \left[ U_1^{(i,j),1} U_1^{(k,l),1} \right] - E \left[ U_1^{(i,j),1} \right] E \left[ U_1^{(k,l),1} \right] \\ &= \left( \iint [1 - 2F^{(i)}(x^{(i)})] [1 - 2F^{(k)}(x^{(k)})] dF^{(i,k)} \right) \\ &\quad \times \left( \iint [1 - 2F^{(j)}(x^{(j)})] [1 - 2F^{(l)}(x^{(l)})] dF^{(j,l)} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} \iiint [1 - 2F^{(i)}(x^{(i)})] [1 - 2F^{(j)}(x^{(j)})] \\ &\quad \times [1 - 2F^{(k)}(x^{(k)})] [1 - 2F^{(l)}(x^{(l)})] \omega_{ij,kl} dx^{(i)} dx^{(j)} dx^{(k)} dx^{(l)} - \frac{1}{n} \tau_{a_{ij}} \tau_{a_{kl}} \\ &= \frac{1}{9} \varrho^{(i,k)} \varrho^{(j,l)} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} \iiint [1 - 2F^{(i)}(x^{(i)})] [1 - 2F^{(j)}(x^{(j)})] \\ &\quad \times [1 - 2F^{(k)}(x^{(k)})] [1 - 2F^{(l)}(x^{(l)})] \omega_{ij,kl} dx^{(i)} dx^{(j)} dx^{(k)} dx^{(l)} - \frac{1}{n} \tau_{a_{ij}} \tau_{a_{kl}} \\ &= \frac{1}{9} \varrho^{(i,k)} \varrho^{(j,l)} + O(n^{-1/2}) \end{aligned}$$

qui converge, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers  $\frac{1}{9} \varrho^{(i,k)} \varrho^{(j,l)}$ . Les autres termes de la somme du théorème 3.2.1 sont tels que

$$Cov \left( U_1^{(i,j),s}, U_1^{(k,l),s'} \right) = O(n^{-1/2}), \text{ pour } s \neq s', s = 1, 2 \text{ et } s' = 1, 2.$$

Ainsi, on obtient  $B_K = \frac{4}{9} P_{11} \otimes P_{22}$ .

(ii) *Cas de la matrice de Spearman.* D'après le théorème 3.2.2, le vecteur aléatoire  $\sqrt{n}vecS_{21}$  converge en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_{pq}(vec \tau A, P_{11} \otimes P_{22})$  où les éléments de la matrice de covariance  $B^{(e)}$  sont donnés par

$$\sigma_S^{(ij,kl)} = 9Cov \left( V_1^{(i,j),1}, V_1^{(k,l),1} \right) = \varrho^{(i,k)} \varrho^{(j,l)}$$



en faisant un calcul similaire au précédent. Ainsi, on obtient  $B^{(e)} = P_{11} \otimes P_{22}$ .

(iii) *Cas de la matrice de covariance.* En tenant compte du noyau

$$h_1^{(i,j)}(X_1) = \frac{1}{2} \left( (X_1^{(i)} - \mu^{(i)})(X_1^{(j)} - \mu^{(j)}) \right) + \frac{1}{2} \sigma^{(i,j)}$$

pour  $\sigma^{(i,j)}$ , défini dans l'équation 1.3.2, et du théorème 1.3.2 ou directement du théorème 1.3.1 pour les pq U-statistiques d'ordre 2, on a que le vecteur aléatoire  $\sqrt{n} \text{vec} S_{21}$  converge en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_{pq}(\text{vec } C_A, 4B_C)$  où les éléments de  $B_C$  sont définis par

$$\begin{aligned} d_{ji}^{(i,k)} &= \text{Cov} \left( h_1^{(i,j)}(X_1), h_1^{(k,l)}(X_1) \right) = \frac{1}{4} \left[ \sigma^{(ij,kl)} - \sigma^{(i,j)} \sigma^{(k,l)} \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \sigma^{(ij,kl)} - \frac{a_{ij}^{(C)} a_{kl}^{(C)}}{n} \right] \\ &= \frac{1}{4} \iiint \iiint (x^{(i)} - \mu^{(i)})(x^{(j)} - \mu^{(j)}) \\ &\quad \times (x^{(k)} - \mu^{(k)})(x^{(l)} - \mu^{(l)}) dF^{(i,k)} dF^{(j,l)} \\ &\quad + \frac{1}{4\sqrt{n}} \iiint \iiint \omega_{ijkl} (x^{(i)} - \mu^{(i)})(x^{(j)} - \mu^{(j)}) \\ &\quad \times (x^{(k)} - \mu^{(k)})(x^{(l)} - \mu^{(l)}) dx^{(i)} dx^{(j)} dx^{(k)} dx^{(l)} - \frac{1}{4} \frac{c_{ij} c_{kl}}{n} \\ &= \frac{1}{4} \sigma^{(i,k)} \sigma^{(j,l)} - \frac{1}{4} \frac{c_{ij} c_{kl}}{n} \\ &\quad + \frac{1}{4\sqrt{n}} \iiint \iiint \omega_{ijkl} (x^{(i)} - \mu^{(i)})(x^{(j)} - \mu^{(j)}) \\ &\quad \times (x^{(k)} - \mu^{(k)})(x^{(l)} - \mu^{(l)}) dx^{(i)} dx^{(j)} dx^{(k)} dx^{(l)} \\ &= \frac{1}{4} \sigma^{(i,k)} \sigma^{(j,l)} + O(n^{-1/2}) \end{aligned}$$

qui converge vers l'élément  $1/4 \sigma^{(i,k)} \sigma^{(j,l)}$  de la matrice  $\frac{1}{4} \Sigma_{11} \otimes \Sigma_{22}$ . Ainsi, on déduit que  $4B_C = \Sigma_{11} \otimes \Sigma_{22}$ .

(iv) *Cas de la matrice de corrélation.* D'après le théorème 1.3.3  $\sqrt{n} \text{vec} R_{21}$  converge en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_{pq}(\text{vec } R_A, \Omega_R)$ . Mais on vient de montrer ci-haut que sous  $H_{1:n}^*$ ,  $\sigma^{(ij,kl)}$  converge vers  $\sigma^{(i,k)} \sigma^{(j,l)}$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Par conséquent,  $\rho^{(ij,kl)} = \sigma^{(ij,kl)} \left( \sigma^{(i,i)} \sigma^{(j,j)} \sigma^{(k,k)} \sigma^{(l,l)} \right)^{-1/2}$  converge vers  $\rho^{(i,k)} \rho^{(j,l)}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Ainsi, d'après le théorème 1.3.3 et en remplaçant  $\rho^{(i,j)}$  par  $R_{ij}/\sqrt{n}$  et  $\rho^{(k,l)}$  par  $R_{kl}/\sqrt{n}$ , l'élément de la matrice de  $\Omega_R$ ,  $\omega^{(ij,kl)}$ , converge vers  $\rho^{(i,k)} \rho^{(j,l)}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Par conséquent,  $\Omega_R = \mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22}$ .

C.Q.F.D.

### 3.4. CAS DE G SOUS-VECTEURS

Dans cette section, on généralise les résultats de la section précédente au cas de plusieurs sous-vecteurs. Plus précisément, soit  $X$  un vecteur aléatoire de dimension  $m \times 1$  partitionné comme dans la section 2.6 en  $G$  sous-vecteurs.

L'hypothèse nulle est l'indépendance des  $G$  sous-vecteurs  $X^{[h]}$ , c'est-à-dire  $H_0^{*(G)} : F(x) = \prod_{h=1}^G F^{[h]}(x^{[h]})$ , pour tout  $x^{[h]} = (x^{(1+\sum_{t=1}^{h-1} m_t)}, \dots, x^{(\sum_{t=1}^h m_t)})' \in \mathbb{R}^m$  où  $F(x)$  est la fonction de distribution du vecteur aléatoire  $X$  continue.

Partitionnons également les matrices de la population  $\Lambda$  de Kendall et  $P$  de Spearman comme dans la section 2.6

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \dots & \Lambda_{1G} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{G1} & \dots & \Lambda_{GG} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} P_{11} & \dots & P_{1G} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{G1} & \dots & P_{GG} \end{pmatrix}.$$

On fait de même pour les matrices échantillonnales correspondantes  $K_n$  et  $S_n$

$$K_n = \begin{pmatrix} K_{11} & \dots & K_{1G} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{G1} & \dots & K_{GG} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_n = \begin{pmatrix} S_{11} & \dots & S_{1G} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{G1} & \dots & S_{GG} \end{pmatrix}.$$

Evidemment,  $H_0^{*(G)}$  implique que

$$\Lambda_{hh'} = P_{hh'} = \Sigma_{hh'} = \mathcal{P}_{hh'} = O, \quad \text{pour } 1 \leq h' < h \leq G.$$

THÉORÈME 3.4.1. *Sous  $H_0^{*(G)}$ , on a*

$$(i) \quad \sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec} K_{21} \\ \vdots \\ \text{vec} K_{G,G-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(\tau)} \quad \text{où } Z^{(\tau)} \text{ suit une loi } \mathcal{N}_f(O, \frac{4}{9}\Omega^{(\tau)}),$$

$$(ii) \quad \sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec} S_{21} \\ \vdots \\ \text{vec} S_{G,G-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(\theta)} \quad \text{où } Z^{(\theta)} \text{ suit une loi } \mathcal{N}_f(O, \Omega^{(\theta)}).$$

Sous  $H_0^{*(G)}$  si  $X$  admet tous les moments d'ordre 4, on a

$$(iii) \sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec} S_{21} \\ \vdots \\ \text{vec} S_{G,G-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(C)} \quad \text{où } Z^{(C)} \text{ suit une loi } \mathcal{N}_f(O, \Omega^{(C)}),$$

$$(iv) \sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec} R_{21} \\ \vdots \\ \text{vec} R_{G,G-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(R)} \quad \text{où } Z^{(R)} \text{ suit une loi } \mathcal{N}_f(O, \Omega^{(R)}),$$

$$\text{où } f = \frac{1}{2} \left( m^2 - \sum_{h=1}^G m_h^2 \right).$$

Les matrices de covariance asymptotique sont données par

$$\Omega^{(e)} = \begin{pmatrix} P_{11} \otimes P_{22} & O & \dots & O \\ O & P_{22} \otimes P_{33} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & P_{G-1,G-1} \otimes P_{GG} \end{pmatrix},$$

$$\Omega^{(C)} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} \otimes \Sigma_{22} & O & \dots & O \\ O & \Sigma_{22} \otimes \Sigma_{33} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & \Sigma_{G-1,G-1} \otimes \Sigma_{GG} \end{pmatrix}$$

et

$$\Omega^{(R)} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22} & O & \dots & O \\ O & \mathcal{P}_{22} \otimes \mathcal{P}_{33} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & \mathcal{P}_{G-1,G-1} \otimes \mathcal{P}_{GG} \end{pmatrix}.$$

**Démonstration:**

(i) *Cas de la matrice de Kendall.* D'après le théorème 3.2.1, le vecteur aléatoire

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec} K_{21} \\ \vdots \\ \text{vec} K_{hh'} \\ \vdots \\ \text{vec} R_{G,G-1} \end{pmatrix},$$

$h' < h$ , converge en loi vers une loi multivariée  $\mathcal{N}_f(O, \Omega_K)$  où  $f = \frac{1}{2}(m^2 - \sum_{h=1}^G m_h^2)$ .

Déterminons  $\Omega_K$ , c'est-à-dire la covariance asymptotique entre les vecteurs

$$\sqrt{n} \text{vec} K_{hh'} \text{ et } \sqrt{n} \text{vec} K_{dd'} \quad (3.4.1)$$

où  $h, h', d$  et  $d'$  sont des entiers quelconques de l'ensemble  $\{1, \dots, G\}$  avec  $h' < h$  et  $d' < d$ .

Puisque la matrice  $K_{hh'}$ , de dimension  $m_h \times m_{h'}$ , traduit une relation entre seulement les deux sous-vecteurs  $X^{[h]}$  et  $X^{[h']}$ , alors pour  $K_n^{(i,j)} \in K_{hh'}$  et  $K_n^{(k,l)} \in K_{dd'}$ , on a

$$\begin{cases} i \in I_h & \text{et } j \in I_{h'} & \text{avec } h' < h, \\ k \in I_d & \text{et } l \in I_{d'} & \text{avec } d' < d. \end{cases}$$

Si  $h = d$  et  $h' = d'$ , on a  $(i, k) \in I_h \times I_h$  et  $(j, l) \in I_{h'} \times I_{h'}$ . Les deux ensembles  $I_h$  et  $I_{h'}$  étant disjoints, alors on a, sous  $H_0^{*(G)}$ ,

$$\sigma_K^{(ij,kl)} = 4 \text{Cov}(U_1^{(i,j),1}, U_1^{(k,l),1}),$$

car  $U_1^{(i,j),2} = U_1^{(k,l),2} = 0$ . On obtient donc

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U_1^{(i,j),1}, U_1^{(k,l),1}) &= \iiint \iiint [1 - 2F^{(i)}(x^{(i)})] [1 - 2F^{(j)}(x^{(j)})] \\ &\quad [1 - 2F^{(k)}(x^{(k)})] [1 - 2F^{(l)}(x^{(l)})] dF^{(i,k)} dF^{(j,l)} \\ &= \frac{1}{9} \rho^{(i,k)} \rho^{(j,l)}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\sigma_K^{(ij,kl)}$  est l'élément générique de la matrice  $\frac{1}{9} \mathcal{P}_{h'h'} \otimes \mathcal{P}_{hh}$ . Les matrices de  $\Omega_K$  situées sur la diagonale correspondent alors à  $\mathcal{P}_{h'h'} \otimes \mathcal{P}_{hh}$ . Si au contraire par exemple  $h \neq d$ , alors pour  $i \in I_h, k \in I_d$  on a

$$j \in I_{h'} \text{ et } l \in I_{d'} \text{ avec } h' < h \text{ et } d' < d.$$

Puisque  $U_1^{(i,j),2} = U_1^{(k,l),2} = 0$ , on trouve alors

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U_1^{(i,j),1}, U_1^{(k,l),1}) &= \iiint \left[1 - 2F^{(i)}(x^{(i)})\right] \left[1 - 2F^{(j)}(x^{(j)})\right] \\ &\quad \times \left[1 - 2F^{(k)}(x^{(k)})\right] \left[1 - 2F^{(l)}(x^{(l)})\right] dF^{(i)} dF^{(k)} dF^{(j,l)} \\ &= 0 \times \iint \left[1 - 2F^{(j)}(x^{(j)})\right] \left[1 - 2F^{(l)}(x^{(l)})\right] dF^{(j,l)} = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, les matrices de  $\Omega_K$  non situées sur la diagonale sont nulles. Par conséquent,  $\Omega_K = \Omega^{(\varrho)}$ .

(ii) *Cas de la matrice de Spearman.* D'après le théorème 3.2.2, le vecteur aléatoire

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec} S_{21} \\ \vdots \\ \text{vec} S_{hh'} \\ \vdots \\ \text{vec} S_{G,G-1} \end{pmatrix},$$

$h' < h$ , converge en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_f(0, \Omega^{(\varrho)})$  où  $f = \frac{1}{2}(m^2 - \sum_{h=1}^G m_h^2)$  et les éléments de  $\Omega^{(\varrho)}$  sont donnés par

$$\sigma_S^{(ij,kl)} = 9 \text{Cov}(V_1^{(i,j),1}, V_1^{(k,l),1}) = \varrho^{(i,k)} \varrho^{(j,l)}$$

par le même raisonnement et des calculs similaires que pour le cas de la matrice de Kendall.

(iii) *Cas de la matrice de covariance.* Ce cas découle du théorème 1.3.2. En effet, le vecteur aléatoire

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec} S_{21} \\ \vdots \\ \text{vec} S_{hh'} \\ \vdots \\ \text{vec} S_{G,G-1} \end{pmatrix},$$

$h' < h$ , converge en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_f(0, \Omega_S)$  où  $f = \frac{1}{2}(m^2 - \sum_{h=1}^G m_h^2)$ . En tenant compte du noyau  $h_1^{(i,j)}$  pour le paramètre  $\sigma^{(i,j)}$  donné (voir l'équation 1.3.2) par

$$h_1^{(i,j)}(X_1) = \frac{1}{2} (X_1^{(i)} - \mu^{(i)}) (X_1^{(j)} - \mu^{(j)}),$$

les éléments de  $\Omega_S$  sous  $H_0^{*(G)}$  s'obtiennent par

$$d_{jl}^{(i,k)} = \sigma^{(ij,kl)} = \sigma^{(i,k)}\sigma^{(j,l)}$$

en écrivant

$$\begin{aligned} d_{ji}^{(i,k)} &= 4Cov(h_1^{(i,j)}(X_1), h_1^{(k,l)}(X_1)) \\ &= \iiint (x^{(i)} - \mu^{(i)})(x^{(j)} - \mu^{(j)})(x^{(k)} - \mu^{(k)})(x^{(l)} - \mu^{(l)}) dF^{(i,k)} dF^{(j,l)} \\ &= \sigma^{(i,k)}\sigma^{(j,l)} \end{aligned}$$

si  $h = d$  et  $h' = d'$ . Ainsi, les matrices de  $\Omega_S$  situées sur la diagonale correspondent alors à  $\Sigma_{h'h'} \otimes \Sigma_{hh}$ . Si au contraire par exemple  $h \neq d$ , alors pour  $i \in I_h$ ,  $k \in I_d$  on a

$$j \in I_{h'} \text{ et } l \in I_{d'} \text{ avec } h' < h \text{ et } d' < d.$$

Alors, on trouve

$$\begin{aligned} d_{ji}^{(i,k)} &= 4Cov(h_1^{(i,j)}(X_1), h_1^{(k,l)}(X_1)) \\ &= \iiint (x^{(i)} - \mu^{(i)})(x^{(j)} - \mu^{(j)}) \\ &\quad (x^{(k)} - \mu^{(k)})(x^{(l)} - \mu^{(l)}) dF^{(i)} dF^{(k)} dF^{(j,l)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire les matrices de  $\Omega_S$  non situées sur la diagonale sont nulles. Ainsi,  $\Omega_S = \Omega^{(C)}$ .

(iv) *Cas de la matrice de corrélation.* D'après le théorème 1.3.3, le vecteur aléatoire

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec} R_{21} \\ \vdots \\ \text{vec} R_{hh'} \\ \vdots \\ \text{vec} R_{G,G-1} \end{pmatrix},$$

$h' < h$ , converge en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_f(O, \Omega_R)$ . Selon le cas précédent, les matrices de  $\Omega^{(C)}$  non situées sur la diagonale sont nulles. Donc les matrices de  $\Omega_R$  non situées sur la diagonale sont nulles. Comme  $\sqrt{n} \text{vec} R_{hh'}$  converge en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_{hh'}(O, \mathcal{P}_{h'h'} \otimes \mathcal{P}_{hh})$ , les matrices de  $\Omega_R$  situées sur la diagonale sont  $\mathcal{P}_{h'h'} \otimes \mathcal{P}_{hh}$  pour  $h' < h$ . Par conséquent,  $\Omega_R = \Omega^{(R)}$ .

C.Q.F.D.

### 3.4.1. Sous $H_{1:n}^{*(G)}$ .

On considère la suite d'hypothèses alternatives spécifiée comme suit

$$H_{1:n}^{*(G)} : F(x) = \prod_{h=1}^G F^{[h]}(x^{[h]}) \left( 1 + \frac{\Omega^{([1], \dots, [G])}(F^{[1]}(x^{[1]}), \dots, F^{[G]}(x^{[G]}))}{\sqrt{n}} \right) \quad (3.4.2)$$

où  $\Omega^{([1], \dots, [G])}$  est une certaine fonction non nulle.

Comme dans la section précédente, la suite d'hypothèses alternatives ci-dessus, implique en particulier que

$$F^{(i,j)}(x^{(i)}, x^{(j)}) = F^{(i)}(x^{(i)})F^{(j)}(x^{(j)}) \left( 1 + \frac{\Omega^{(i,j)}(F^{(i)}(x^{(i)}), F^{(j)}(x^{(j)}))}{\sqrt{n}} \right) \quad (3.4.3)$$

pour si  $i \in I_h$  et  $j \in I_{h'}$  avec  $h \neq h'$ , où  $\Omega^{(i,j)}$  est une fonction non nulle. De même, l'hypothèse  $H_{1:n}^{*(G)}$  implique aussi que

$$F^{(ij,kl)}(x^{(i)}, x^{(j)}, x^{(k)}, x^{(l)}) = F^{(i,k)}(x^{(i)}, x^{(k)})F^{(j,l)}(x^{(j)}, x^{(l)}) \left( 1 + \frac{\Omega_H^{(ij,kl)}(F^{(i,k)}, F^{(j,l)})}{\sqrt{n}} \right) \quad (3.4.4)$$

pour  $(i, j) \in I_h \times I_{h'}$  et  $(k, l) \in I_d \times I_{d'}$  avec  $h \neq h'$  et  $d \neq d'$ .

De la même manière que pour l'équation 3.3.7 et par dérivation de l'équation 3.4.4, on peut également obtenir une fonction  $\omega_{ij,kl}^H$ ,  $1 \leq h < h' \leq G$ , telle que sous  $H_{1:n}^{*(G)}$  les fonctions marginales de densité s'écrivent

$$\frac{\partial^4 F^{(ij,kl)}}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)} \partial x^{(k)} \partial x^{(l)}} = \frac{\partial^2 F^{(i,k)}}{\partial x^{(i)} \partial x^{(k)}} \frac{\partial^2 F^{(j,l)}}{\partial x^{(j)} \partial x^{(l)}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \omega_{ij,kl}^H \quad (3.4.5)$$

pour  $(i, j) \in I_h \times I_{h'}$  et  $(k, l) \in I_d \times I_{d'}$  avec  $h \neq h'$  et  $d \neq d'$ , étant donné que la condition H est satisfaite.

Ici encore on remarque que  $\omega_{ij,kl}^H$  est centrée et on a, comme dans 3.3.1, le lemme suivant.

LEMME 3.4.1.

La suite d'hypothèses alternatives  $H_{1:n}^{*(G)}$  implique que

$$(i) \quad \Lambda_{hh'} = \frac{1}{\sqrt{n}} \tau A_{hh'} = \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \tau a_{ij} \right),$$

$$(ii) \quad P_{hh'} = \frac{1}{\sqrt{n}} {}^e A_{hh'} = \left( \frac{1}{\sqrt{n}} {}^e a_{ij} \right),$$

$$(iii) \quad \Sigma_{hh'} = \frac{1}{\sqrt{n}} {}^C A_{hh'} = \left( \frac{1}{\sqrt{n}} {}^C a_{ij} \right),$$

$$(iv) \quad \mathcal{P}_{hh'} = \frac{1}{\sqrt{n}} {}^R A_{hh'} = \left( \frac{1}{\sqrt{n}} {}^R a_{ij} \right),$$

pour  $(i, j) \in I_h \times I_{h'}$  et  $1 \leq h' < h \leq G$ .

On pose

$$D^{(w)} = \begin{pmatrix} \text{vec } {}^w A_{21} \\ \vdots \\ \text{vec } {}^w A_{G, G-1} \end{pmatrix} \text{ pour } w = \tau, \varrho, C \text{ ou } R.$$

Le théorème suivant généralise le théorème 3.3.2 et sa démonstration est tout à fait similaire.

THÉORÈME 3.4.2. Sous  $H_{1:n}^{*(G)}$ , on a

$$(i) \quad \sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec } K_{21} \\ \vdots \\ \text{vec } K_{G, G-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(\tau)} \text{ où } Z^{(\tau)} \text{ suit une loi } \mathcal{N}_f(D^{(\tau)}, \frac{4}{9} \Omega^{(\tau)}),$$

$$(ii) \quad \sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec } S_{21} \\ \vdots \\ \text{vec } S_{G, G-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(\varrho)} \text{ où } Z^{(\varrho)} \text{ suit une loi } \mathcal{N}_f(D^{(\varrho)}, \Omega^{(\varrho)}).$$

Sous  $H_{1:n}^{*(G)}$  et si  $X$  admet tous les moments d'ordre 4, on a

$$(iii) \quad \sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec } S_{21} \\ \vdots \\ \text{vec } S_{G, G-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(C)} \text{ où } Z^{(C)} \text{ suit une loi } \mathcal{N}_f(D^{(C)}, \Omega^{(C)}),$$



$$(iv) \sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec} R_{21} \\ \vdots \\ \text{vec} R_{G,G-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(R)} \quad \text{où } Z^{(R)} \text{ suit une loi } \mathcal{N}_f(D^{(R)}, \Omega^{(R)}),$$

où  $f$ ,  $\Omega^{(e)}$ ,  $\Omega^{(C)}$  et  $\Omega^{(R)}$  sont définis dans le théorème 3.4.1.

### Démonstration:

En tenant compte du lemme 3.4.1, tout comme dans la démonstration du théorème 3.3.2, on obtient lorsque  $n \rightarrow \infty$  que

$$\begin{aligned} E(\sqrt{n} \text{vec} K_{hh'}) &= \text{vec } {}^T A_{hh'} \quad , \quad E(\sqrt{n} \text{vec} S_{hh'}) = \text{vec } {}^e A_{hh'} \\ E(\sqrt{n} \text{vec} S_{hh'}) &= \text{vec } {}^C A_{hh'} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E(\sqrt{n} \text{vec} R_{hh'}) = \text{vec } {}^R A_{hh'}. \end{aligned}$$

pour  $h' < h$  et  $d' < d$ .

(i) *Cas de la matrice de Kendall.* D'après le théorème 3.2.1, le vecteur aléatoire

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec} K_{21} \\ \vdots \\ \text{vec} K_{hh'} \\ \vdots \\ \text{vec} K_{G,G-1} \end{pmatrix},$$

$h' < h$ , converge en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_f(D^{(\tau)}, \Omega_K)$ ,  $f = \frac{1}{2}(m^2 - \sum_{h=1}^G m_h^2)$ .

Déterminons  $\Omega_K$ , c'est-à-dire la covariance asymptotique entre les vecteurs aléatoires

$$\sqrt{n} \text{vec} K_{hh'} \quad \text{et} \quad \sqrt{n} \text{vec} K_{dd'}$$

où  $h$ ,  $h'$ ,  $d$  et  $d'$  sont des entiers quelconques de l'ensemble  $\{1, \dots, G\}$  avec  $h' < h$  et  $d' < d$ .

Puisque la matrice  $K_{hh'}$ , de dimension  $m_h \times m_{h'}$ , traduit une relation entre seulement les deux sous-vecteurs  $X^{[h]}$  et  $X^{[h']}$ , alors pour  $K_n^{(i,j)} \in K_{hh'}$  et  $K_n^{(k,l)} \in K_{dd'}$ , on a

$$\begin{cases} i \in I_h & \text{et } j \in I_{h'} & \text{avec } h' < h, \\ k \in I_d & \text{et } l \in I_{d'} & \text{avec } d' < d. \end{cases}$$

Si  $h = d$  et  $h' = d'$ , on a  $(i, k) \in I_h \times I_h$  et  $(j, l) \in I_{h'} \times I_{h'}$ . Les deux ensembles  $I_h$  et  $I_{h'}$  étant disjoints, alors on a, sous  $H_{1:n}^{*(G)}$

$$\sigma_K^{(ij,kl)} = 4Cov(U_1^{(i,j),1}, U_1^{(k,l),1}).$$

En effet, tout comme dans la démonstration du théorème 3.3.2, on obtient

$$9Cov(U_1^{(i,j),1}, U_1^{(k,l),1}) = \varrho^{(i,k)} \varrho^{(j,l)} + O(n^{-1/2})$$

qui converge, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , vers l'élément  $\varrho^{(i,k)} \varrho^{(j,l)}$  de matrice  $P_{hh} \otimes P_{h'h'}$ . Les matrices de  $\Omega_K$  situées sur la diagonale correspondent alors à  $P_{hh} \otimes P_{h'h'}$ .

Si au contraire par exemple  $h \neq d$ , alors pour  $i \in I_h$ ,  $k \in I_d$  on a

$$j \in I_{h'} \text{ et } l \in I_{d'} \text{ avec } h' < h \text{ et } d' < d.$$

Mais, d'après l'équation 3.4.3, il existe une fonction  $\omega_{ik}^H$  non nulle telle que

$$dF^{(i,k)} = dF^{(i)} dF^{(k)} + \frac{1}{\sqrt{n}} \omega_{ik}^H dF^{(i)} dF^{(k)} \quad \text{pour } i \in I_h \text{ et } k \in I_d. \quad (3.4.6)$$

Il en résulte alors

$$\begin{aligned} Cov(U_1^{(i,j),1}, U_1^{(k,l),1}) &= \iiint [1 - 2F^{(i)}(x^{(i)})] [1 - 2F^{(j)}(x^{(j)})] [1 - 2F^{(k)}(x^{(k)})] \\ &\quad \times [1 - 2F^{(l)}(x^{(l)})] dF^{(i)} dF^{(k)} dF^{(j,l)} + O(n^{-1/2}) \\ &= 0 + O(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Les autres termes de la somme du théorème 3.2.1 sont tels que

$$Cov(U_1^{(i,j),s}, U_1^{(k,l),s'}) = O(n^{-1/2}), \text{ pour } s \neq s', s = 1, 2 \text{ et } s' = 1, 2.$$

Autrement dit, les matrices de  $\Omega_K$  non situées sur la diagonale sont nulles. Par conséquent,  $\Omega_K = \Omega^{(e)}$ .

(ii) *Cas de la matrice de Spearman.* D'après le théorème 3.2.2, le vecteur aléatoire

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} vecS_{21} \\ \vdots \\ vecS_{hh'} \\ \vdots \\ vecS_{G,G-1} \end{pmatrix},$$

$h' < h$ , converge en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_f(D^{(\varrho)}, \Omega^{(\varrho)})$ ,  $f = \frac{1}{2}(m^2 - \sum_{h=1}^G m_h^2)$  où les éléments de la matrice de covariance  $\Omega^{(\varrho)}$  sont donnés par

$$\sigma_S^{(ij,kl)} = 9Cov(V_1^{(i,j),1}, V_1^{(k,l),1}) = \varrho^{(i,k)} \varrho^{(j,l)}$$

pour  $(i, j) \in I_h \times I_{h'}$  et  $1 \leq h' < h \leq G$ , par le même raisonnement et des calculs similaires que pour la partie (i).

(iii) *Cas de la matrice de covariance.* Pour ce cas le résultat découle du théorème 1.3.2.

En effet, le vecteur aléatoire

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} vec S_{21} \\ \vdots \\ vec S_{hh'} \\ \vdots \\ vec S_{G,G-1} \end{pmatrix},$$

$h' < h$ , converge en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_f(D^{(C)}, \Omega_S)$ . Déterminons  $\Omega_S$ . Si  $h = d$  et  $h' = d'$ , on a  $(i, k) \in I_h \times I_h$  et  $(j, l) \in I_{h'} \times I_{h'}$ . Par conséquent, on a sous  $H_{1:m}^{*(G)}$

$$\begin{aligned} d_{jl}^{(i,k)} &= 4Cov(h_1^{(i,j)}(X_1), h_1^{(k,l)}(X_1)) \\ &= \iiint \int (x^{(i)} - \mu^{(i)})(x^{(j)} - \mu^{(j)})(x^{(k)} - \mu^{(k)})(x^{(l)} - \mu^{(l)}) dF^{(ij,kl)} - \frac{1}{n} c_{a_{ij}} c_{a_{kl}} \\ &= \iint (x^{(i)} - \mu^{(i)})(x^{(k)} - \mu^{(k)})(x^{(l)} - \mu^{(l)}) dF^{(i,k)} \iint (x^{(j)} - \mu^{(j)})(x^{(l)} - \mu^{(l)}) dF^{(j,l)} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n}} \iiint \int (x^{(i)} - \mu^{(i)})(x^{(j)} - \mu^{(j)})(x^{(k)} - \mu^{(k)})(x^{(l)} - \mu^{(l)}) \omega_{ij,kl}^H dx^{(i)} dx^{(j)} dx^{(k)} dx^{(l)} \\ &\quad - \frac{1}{n} c_{a_{ij}} c_{a_{kl}} \\ &= \sigma^{(i,k)} \sigma^{(j,l)} + O(n^{-1/2}) \end{aligned}$$

qui converge vers zéro. Ainsi, les matrices de  $\Omega_S$  situées sur la diagonale correspondent à  $\Sigma_{h'h'} \otimes \Sigma_{hh}$ . Si au contraire par exemple  $h \neq d$ , alors pour  $i \in I_h$ ,  $k \in I_d$  on a

$$j \in I_{h'} \text{ et } l \in I_{d'} \text{ avec } h' < h \text{ et } d' < d$$

et on trouve par conséquent

$$\begin{aligned} d_{ji}^{(i,k)} &= 4Cov(h_1^{(i,j)}(X_1), h_1^{(k,l)}(X_1)) \\ &= \iiint (x^{(i)} - \mu^{(i)})(x^{(j)} - \mu^{(j)})(x^{(k)} - \mu^{(k)})(x^{(l)} - \mu^{(l)}) dF^{(i)} dF^{(k)} dF^{(j,l)} + O(n^{-1/2}) \\ &= 0 + O(n^{-1/2}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que les matrices de  $\Omega_S$  non situées sur la diagonale sont nulles. Ainsi,  $\Omega_S = \Omega^{(C)}$ .

(iv) *Cas de la matrice de corrélation.* D'après le théorème 1.3.3, le vecteur aléatoire

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec} R_{21} \\ \vdots \\ \text{vec} R_{hh'} \\ \vdots \\ \text{vec} R_{G,G-1} \end{pmatrix},$$

$h' < h$ , converge en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_f(D^{(R)}, \Omega_R)$ . Selon le cas précédent, les matrices de  $\Omega^{(C)}$  non situées sur la diagonale sont nulles. Donc les matrices de  $\Omega_R$  non situées sur la diagonale sont nulles. Comme  $\sqrt{n} \text{vec} R_{hh'}$  converge en loi vers une loi multinormale  $\mathcal{N}_{hh'}(\text{vec} R_{hh'}, \mathcal{P}_{h'h'} \otimes \mathcal{P}_{hh})$ , les matrices de  $\Omega_R$  situées sur la diagonale sont  $\mathcal{P}_{h'h'} \otimes \mathcal{P}_{hh}$ , pour  $h' < h$ . Par conséquent,  $\Omega_R = \Omega^{(R)}$ .

C.Q.F.D.

Une conséquence immédiate du théorème précédent est le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.4.1. *Sous  $H_0^{*(G)}$  ou sous  $H_{1:n}^{*(G)}$ , les  $G(G-1)/2$  vecteurs aléatoires*

$$\sqrt{n} \text{vec} K_{21}, \dots, \sqrt{n} \text{vec} K_{G,G-1}$$

*sont asymptotiquement multinormaux et indépendants. Il en est de même pour  $\sqrt{n} \text{vec} S_{21}, \dots, \sqrt{n} \text{vec} S_{G,G-1}$ , pour  $\sqrt{n} \text{vec} S_{21}, \dots, \sqrt{n} \text{vec} S_{G,G-1}$  et pour  $\sqrt{n} \text{vec} R_{21}, \dots, \sqrt{n} \text{vec} R_{G,G-1}$ .*

## CHAPITRE 4

---

### Tests asymptotiques d'indépendance

Dans ce quatrième chapitre on étudie un certain nombre de tests non paramétriques pour tester l'indépendance entre deux ou plusieurs vecteurs aléatoires. En se basant sur les travaux de Puri, Sen & Gokhale (1970), Cléroux, Lazraq & Lepage (1995) et Lazraq, Lepage & Cléroux (1995) ont proposé des tests asymptotiques d'indépendance entre deux ou plusieurs vecteurs aléatoires basés sur l'application de mesures d'association vectorielle appliquées à la matrice de Spearman. En se basant sur le concept des matrices de U-statistiques qu'on a étudié dans le chapitre 3, on présente maintenant des tests asymptotiques d'indépendance basés sur l'application de mesures d'association vectorielle appliquées à la matrice de Kendall. On retrouve aussi les tests asymptotiques construits à partir de la matrice de Spearman. D'autre part, en se basant sur les matrices de covariance et de corrélation, on obtient des tests asymptotiques d'indépendance entre deux ou plusieurs vecteurs aléatoires sans le présupposé d'ellipticité de la distribution mentionnée dans le chapitre 1. Dans la section 4.1, on construit douze tests asymptotiques pour tester l'indépendance entre deux vecteurs aléatoires. Une simulation est présentée dans la section 4.2 afin d'évaluer le comportement expérimental du niveau et de la puissance des douze tests.

La même approche sera généralisée dans la section 4.3 pour tester l'indépendance entre plusieurs vecteurs aléatoires.

#### 4.1. TESTS D'INDÉPENDANCE ENTRE DEUX VECTEURS

À l'aide des résultats du chapitre précédent, on va construire dans cette section des tests asymptotiques non paramétriques pour éprouver l'hypothèse nulle,  $H_0^*$ , d'indépendance des deux vecteurs aléatoires  $X^{[1]} : p \times 1$  et  $X^{[2]} : q \times 1$ .

Dans le cas particulier où la fonction de distribution  $F(x)$  est une loi multivariée normale, l'hypothèse  $H_0^*$  est équivalente à  $M_{21} = 0$  pour  $M = \Lambda, P, \Sigma$  ou  $\mathcal{P}$ . L'objectif de ce chapitre est de construire des tests asymptotiques non paramétriques d'indépendance lorsque  $F(x)$  est arbitraire. Ces tests sont regroupés en quatre groupes selon la matrice des U-statistiques sur lesquels ils reposent: matrice de Kendall, matrice de Spearman, matrice de covariance et matrice de corrélation. Les tests des deux premiers groupes ne supposent pas l'existence de la matrice de covariance et même si elle existe elle ne joue aucun rôle. Ils ont donc un plus grand champ d'application que les tests des deux derniers groupes. Néanmoins, hormis l'hypothèse de l'existence du quatrième moment, ces derniers tests ne font aucune hypothèse quant à la nature de la fonction de distribution  $F(x)$ . Les quatre groupes de tests proposés sont convergents pour la suite d'hypothèses alternatives  $H_{1:n}^*$ .

Rappelons qu'on a vu au lemme 3.3.1 que la suite d'hypothèses alternatives  $H_{1:n}^*$  implique que

$$\Lambda_{21} = \frac{1}{\sqrt{n}} \tau A, \quad P_{21} = \frac{1}{\sqrt{n}} e A, \quad \Sigma_{21} = \frac{1}{\sqrt{n}} c A \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{21} = \frac{1}{\sqrt{n}} R A.$$

Écrivons dans chaque cas l'expression des mesures d'Escoufier (1973), de Stewart & Love (1968) et Cramer & Nicewander (1979) basées sur chacune des quatre matrices échantillonnales définies précédemment.

(i) **Mesure Escoufier (1973)**

- (a)  $RV^{(\tau)} = \frac{tr(K_{12}K'_{12})}{\sqrt{tr(K^2_{11})tr(K^2_{22})}}$  pour la matrice de Kendall,
- (b)  $RV^{(e)} = \frac{tr(S_{12}S'_{12})}{\sqrt{tr(S^2_{11})tr(S^2_{22})}}$  pour la matrice de Spearman,
- (c)  $RV^{(C)} = \frac{tr(S_{12}S'_{12})}{\sqrt{tr(S^2_{11})tr(S^2_{22})}}$  pour la matrice de covariance,
- (d)  $RV^{(R)} = \frac{tr(R_{12}R'_{12})}{\sqrt{tr(R^2_{11})tr(R^2_{22})}}$  pour la matrice de corrélation.

(ii) **Mesure de Stewart & Love (1968)**

- (a)  $SL^{(\tau)} = \frac{tr(K_{12}K^{-1}_{22}K'_{12})}{p}$  pour la matrice de Kendall,
- (b)  $SL^{(e)} = \frac{tr(S_{12}S^{-1}_{22}S'_{12})}{p}$  pour la matrice de Spearman,
- (c)  $SL^{(C)} = \frac{tr(S_{12}S^{-1}_{22}S'_{12})}{p}$  pour la matrice de covariance
- (d)  $SL^{(R)} = \frac{tr(R_{12}R^{-1}_{22}R'_{12})}{p}$  pour la matrice de corrélation.

(iii) **Mesure de Cramer & Nicewander (1979)**

- (a)  $CN^{(\tau)} = \frac{tr(K^{-1}_{11}K_{12}K^{-1}_{22}K'_{12})}{p}$  pour la matrice de Kendall,
- (b)  $CN^{(e)} = \frac{tr(S^{-1}_{11}S_{12}S^{-1}_{22}S'_{12})}{p}$  pour la matrice de Spearman,
- (c)  $CN^{(C)} = \frac{tr(S^{-1}_{11}S_{12}S^{-1}_{22}S'_{12})}{p}$  pour la matrice de covariance,
- (d)  $CN^{(R)} = \frac{tr(R^{-1}_{11}R_{12}R^{-1}_{22}R'_{12})}{p}$  pour la matrice de corrélation.

Au niveau de la population, si on applique les mêmes mesures aux matrices d'association correspondantes, on obtient

(i) Mesure d'Escoufier (1973)

$$(a) \quad \rho_{RV^{(\tau)}} = \frac{\text{tr}(\Lambda_{12}\Lambda'_{12})}{\sqrt{\text{tr}(\Lambda_{11}^2)\text{tr}(\Lambda_{22}^2)}} \quad \text{pour la matrice de Kendall,}$$

$$(b) \quad \rho_{RV^{(e)}} = \frac{\text{tr}(P_{12}P'_{12})}{\sqrt{\text{tr}(P_{11}^2)\text{tr}(P_{22}^2)}} \quad \text{pour la matrice de Spearman,}$$

$$(c) \quad \rho_{RV^{(C)}} = \frac{\text{tr}(\Sigma_{12}\Sigma'_{12})}{\sqrt{\text{tr}(\Sigma_{11}^2)(\text{tr}(\Sigma_{22}^2))}} \quad \text{pour la matrice de covariance,}$$

$$(d) \quad \rho_{RV^{(R)}} = \frac{\text{tr}(\mathcal{P}_{12}\mathcal{P}'_{12})}{\sqrt{\text{tr}(\mathcal{P}_{11}^2)(\text{tr}(\mathcal{P}_{22}^2))}} \quad \text{pour la matrice de corrélation.}$$

(ii) Mesure de Stewart & Love (1968)

$$(a) \quad \rho_{SL^{(\tau)}} = \frac{\text{tr}(\Lambda_{12}\Lambda_{22}^{-1}\Lambda'_{12})}{p} \quad \text{pour la matrice de Kendall,}$$

$$(b) \quad \rho_{SL^{(e)}} = \frac{\text{tr}(P_{12}P_{22}^{-1}P'_{12})}{p} \quad \text{pour la matrice de Spearman,}$$

$$(c) \quad \rho_{SL^{(C)}} = \frac{\text{tr}(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma'_{12})}{p} \quad \text{pour la matrice de covariance,}$$

$$(d) \quad \rho_{SL^{(R)}} = \frac{\text{tr}(\mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{22}^{-1}\mathcal{P}'_{12})}{p} \quad \text{pour la matrice de corrélation.}$$

(iii) Mesure Cramer & Nicewander (1979)

$$(a) \quad \rho_{CN^{(\tau)}} = \frac{\text{tr}(\Lambda_{11}^{-1}\Lambda_{12}\Lambda_{22}^{-1}\Lambda'_{12})}{p} \quad \text{pour la matrice de Kendall,}$$

$$(b) \quad \rho_{CN^{(e)}} = \frac{\text{tr}(P_{11}^{-1}P_{12}P_{22}^{-1}P'_{12})}{p} \quad \text{pour la matrice de Spearman,}$$

$$(c) \quad \rho_{CN^{(C)}} = \frac{\text{tr}(\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma'_{12})}{p} \quad \text{pour la matrice de covariance,}$$



$$(d) \quad \rho_{CN^{(R)}} = \frac{\text{tr}(\mathcal{P}_{11}^{-1}\mathcal{P}_{12}\mathcal{P}_{22}^{-1}\mathcal{P}'_{12})}{p} \quad \text{pour la matrice de corrélation.}$$

Remarquons que les groupes de mesures basées sur des matrices de U-statistiques de Kendall et de Spearman présentent plusieurs avantages:

- (i) les observations peuvent être de type ordinal,
- (ii) les échelles de mesure pour chaque variable peuvent être différentes,
- (iii) l'hypothèse classique de multinormalité ou d'ellipticité peut être écartée,
- (iv) une robustesse vis-à-vis des observations aberrantes.

De plus, les deux groupes de mesures possèdent les propriétés suivantes:

- (i)  $\rho_{M^{(\tau)}} = \rho_{M^{(\varrho)}} = 0$  si et seulement si  $P_{21} = \Lambda_{12} = 0$ , pour  $M = RV, SL$  et  $CN$ .
- (ii) Lorsque  $p = q = 1$ , les trois mesures correspondent au carré du coefficient de Kendall et de Spearman respectivement entre les variables  $X^{(1)}$  et  $X^{(2)}$ .
- (iii)  $0 \leq \rho_{M^{(s)}} \leq 1$ , pour  $s = \tau, \varrho$  et  $M = RV, SL$  et  $CN$ .

Si l'hypothèse de multinormalité est retenue, alors l'indépendance des deux vecteurs aléatoires  $X^{[1]}$  et  $X^{[2]}$  est équivalente à  $\rho_{M^{(\tau)}} = \rho_{M^{(\varrho)}} = 0$ , puisque chacun des coefficients de Kendall ou Spearman est une fonction bijective (voir le rappel du chapitre 3) du coefficient de corrélation simple.

#### 4.1.1. Distributions asymptotiques de $RV^{(h)}$ , $SL^{(h)}$ et $CN^{(h)}$ sous $H_0^*$ .

**THÉORÈME 4.1.1.** Soient  $K_n, S_n, S_n$  et  $R_n$  les matrices de Kendall, de Spearman, de covariance et de corrélation d'un échantillon de taille  $n$  issu d'un vecteur aléatoire  $X = (X_1, \dots, X_m)'$  dont la fonction de distribution  $F(x)$  est continue. Alors, sous l'hypothèse  $H_0^*$ , on a, pour  $h = \tau, \varrho, C$  ou  $R$ ,

- (i) *Mesure  $RV^{(h)}$*

$$(a) nRV^{(\tau)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{4}{9} \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(\Lambda_{11}^2) \text{tr}(\Lambda_{22}^2)}} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i \mu_j U_{ij}^2,$$

$$(b) nRV^{(e)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(P_{11}^2) \text{tr}(P_{22}^2)}} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i \mu_j U_{ij}^2,$$

si  $X$  admet tous les moments d'ordre 4, on a

$$(c) nRV^{(C)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(\Sigma_{11}^2) \text{tr}(\Sigma_{22}^2)}} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \phi_i \varphi_j U_{ij}^2,$$

$$(d) nRV^{(R)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(\mathcal{P}_{11}^2) \text{tr}(\mathcal{P}_{22}^2)}} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \beta_i \pi_j U_{ij}^2,$$

où les variables aléatoires  $U_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ , sont indépendantes et de même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  avec  $\lambda_i$ ,  $\mu_j$ ,  $\phi_i$ ,  $\varphi_j$ ,  $\beta_i$  et  $\pi_j$  étant respectivement valeurs propres de  $P_{11}$ ,  $P_{22}$ ,  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{22}$ ,  $\mathcal{P}_{11}$  et  $\mathcal{P}_{22}$ .

(ii) *Mesure*  $SL^{(h)}$

$$(a) nSL^{(\tau)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{4}{9p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i t_j^{(2)} U_{ij}^2,$$

$$(b) nSL^{(e)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \lambda_i Z_{q,i}^2,$$

si  $X$  admet tous les moments d'ordre 4, on a

$$(c) nSL^{(C)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \phi_i Z_{q,i}^2,$$

$$(d) nSL^{(R)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \beta_i Z_{q,i}^2,$$

où les variables aléatoires  $Z_{q,i}^2$ ,  $i = 1, \dots, p$ , sont indépendantes et de même loi  $\chi_q^2$  avec  $q$  degrés de liberté et  $t_j^{(2)}$ ,  $j = 1, \dots, q$ , étant les valeurs propres de  $\Lambda_{22}^{-1} P_{22}$

(iii) *Mesure*  $CN^{(h)}$

$$(a) \quad nCN^{(\tau)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{4}{9p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q t_i^{(1)} t_j^{(2)} U_{ij}^2,$$

$$(b) \quad nCN^{(e)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\chi_{pq}^2}{p},$$

si  $X$  admet tous les moments d'ordre 4, on a

$$(c) \quad nCN^{(C)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\chi_{pq}^2}{p},$$

$$(d) \quad nCN^{(R)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\chi_{pq}^2}{p}$$

avec  $t_i^{(1)}$   $i = 1, \dots, p$ , étant les valeurs propres de  $\Lambda_{11}^{-1} P_{11}$ .

### Démonstration:

(i) Mesure  $RV^{(h)}$ .

(a)  $h = \tau$ . D'après le corollaire 1.3.1, les matrices  $K_{11}$  et  $K_{22}$  convergent en probabilité respectivement vers  $\Lambda_{11}$  et  $\Lambda_{22}$  et d'après le théorème 3.3.1,  $\sqrt{n} \text{vec} K_{21}$  converge vers le vecteur aléatoire  $Z$  de loi  $\mathcal{N}_{pq}(O, 4/9 P_{11} \otimes P_{22})$ . Alors, par le théorème 4.4 de Bilingsley (1968), on a

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \text{vec} K_{21} \\ \text{vec} K_{11} \\ \text{vec} K_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} Z \\ \text{vec} \Lambda_{11} \\ \text{vec} \Lambda_{22} \end{pmatrix}.$$

Comme  $n \text{tr}(K_{12} K_{21}) = (\sqrt{n} \text{vec} K_{21})' (\sqrt{n} \text{vec} K_{21}) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z' Z$

et que la mesure  $RV^{(\tau)}$  est continue en ses arguments, on a alors

$$nRV^{(\tau)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{Z' Z}{\sqrt{\text{tr}(\Lambda_{11}^2) \text{tr}(\Lambda_{22}^2)}} = Y^{(\tau)}.$$

La forme quadratique  $Y^{(\tau)}$  devient (Appendice A, théorème A.1.1)

$$\frac{4}{9} \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(\Lambda_{11}^2) \text{tr}(\Lambda_{22}^2)}} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q t_{ij}^{(\tau)} U_{ij}^2 = Q^{(\tau)},$$

où pour  $i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ , les quantités  $l_{ij}^{(\tau)}$  sont les valeurs propres de  $P_{11} \otimes P_{22}$  et par conséquent  $l_{ij}^{(\tau)} = \lambda_i \mu_j$  et les  $U_{ij}$  sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . L'expression  $Q^{(\tau)}$  devient alors

$$Q^{(\tau)} = \frac{1}{9} \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(\Lambda_{11}^2) \text{tr}(\Lambda_{22}^2)}} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i \mu_j U_{ij}^2.$$

(b) Pour les cas des matrices de Spearman, de covariance et de corrélation, les démonstrations sont similaires à la précédente.

(ii) **Mesure  $SL^{(h)}$ .**

(a)  $h = \tau$ . On a

$$n \text{tr}(K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}) = (\sqrt{n} \text{vec} K_{21})' (I_p \otimes K_{22})^{-1} (\sqrt{n} \text{vec} K_{21}).$$

En considérant le théorème 3.3.1 et puisque  $SL^{(\tau)}$  est continue en ses arguments, on obtient la convergence en loi de  $nCN^{(\tau)}$  vers

$$Q^{(\tau)} = \frac{Z'(I_p \otimes \Lambda_{22})^{-1} Z}{p}.$$

La forme quadratique  $Q^{(\tau)}$  devient (Appendice A, théorème A.1.1)

$$Q^{(\tau)} = \frac{1}{9p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q l_{ij}^{(\tau)} U_{ij}^2,$$

où pour  $i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ , les quantités  $l_{ij}^{(\tau)}$  sont les valeurs propres de  $(I_p \otimes \Lambda_{22})^{-1} (P_{11} \otimes P_{22}) = P_{11} \otimes \Lambda_{22}^{-1} P_{22}$  et par conséquent  $l_{ij}^{(\tau)} = \lambda_i t_j^{(2)}$ , avec  $t_j^{(2)}$ , pour  $i = 1, \dots, q$ , étant les valeurs propres de  $\Lambda_{22}^{-1} P_{22}$ . Ainsi,  $Q^{(\tau)}$  devient finalement

$$Q^{(\tau)} = \frac{1}{9p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i t_j^{(2)} U_{ij}^2.$$

(b) Pour  $h = \varrho$ ,  $C$ , ou  $R$ , les démonstrations sont similaires à la précédente.

(iii) **Mesures  $CN^{(h)}$ .**

(a)  $h = \tau$ . On a

$$n \text{tr}(K_{11}^{-1} K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}) = (\sqrt{n} \text{vec} K_{21})' (K_{11} \otimes K_{22})^{-1} (\sqrt{n} \text{vec} K_{21}).$$

En considérant le théorème 3.3.1,  $nCN^{(\tau)}$  converge en loi vers

$$Q^{(\tau)} = \frac{Z'(\Lambda_{11} \otimes \Lambda_{22})^{-1} Z}{p}$$

et la forme quadratique  $Q^{(\tau)}$  devient

$$Q^{(\tau)} = \frac{4}{9p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q l_{ij}^{(\tau)} U_{ij}^2,$$

où  $l_{ij}^{(\tau)}$  sont les valeurs propres de

$$(\Lambda_{11} \otimes \Lambda_{22})^{-1} (P_{11} \otimes P_{22}) = (\Lambda_{11}^{-1} P_{11}) \otimes (\Lambda_{22}^{-1} P_{22}).$$

Si l'on désigne par  $t_i^{(1)}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , les valeurs propres de  $\Lambda_{11}^{-1} P_{11}$ , alors  $Q^{(\tau)}$  devient

$$Q^{(\tau)} = \frac{4}{9p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q t_i^{(1)} t_j^{(2)} U_{ij}^2.$$

(b)  $h = p$ . Puisque  $CN^{(e)} = \text{tr}(P_{11}^{-1} P_{12} P_{22}^{-1} P_{21})/p$ , on peut écrire

$$n \text{tr}(P_{11}^{-1} P_{12} P_{22}^{-1} P_{21}) = (\sqrt{n} \text{vec} P_{21})' (P_{11} \otimes P_{22})^{-1} (\sqrt{n} \text{vec} P_{21}).$$

En considérant le théorème 3.3.1,  $nCN^{(e)}$  converge en loi vers

$$Q^{(e)} = \frac{Z'(P_{11} \otimes P_{22})^{-1} Z}{p}.$$

Puisque la seule valeur propre de

$$(P_{11} \otimes P_{22})(P_{11} \otimes P_{22})^{-1} = (P_{11} P_{11}^{-1}) \otimes (P_{22} P_{22}^{-1}) = I_p \otimes I_q$$

est 1 avec multiplicité  $pq$ , alors

$$Q^{(e)} = \frac{1}{p} \chi_{pq}^2$$

puisque la variable aléatoire  $\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q U_{ij}^2$  suit une loi  $\chi_{pq}^2$ .

(c) Les cas  $h = C$  ou  $R$  se démontrent de la même manière en considérant

$$n \text{tr}(S_{11}^{-1} S_{12} S_{22}^{-1} S_{21}) = (\sqrt{n} \text{vec} S_{21})' (S_{11} \otimes S_{22})^{-1} (\sqrt{n} \text{vec} S_{21})$$

et

$$n \text{tr}(R_{11}^{-1} R_{12} R_{22}^{-1} R_{21}) = (\sqrt{n} \text{vec} R_{21})' (R_{11} \otimes R_{22})^{-1} (\sqrt{n} \text{vec} R_{21}).$$

C.Q.F.D.

#### 4.1.2. Distributions asymptotiques de $RV^{(h)}$ , $SL^{(h)}$ et $CN^{(h)}$ sous $H_{1;n}^*$ .

THÉORÈME 4.1.2. Si les conditions du théorème 4.1.1 sont satisfaites et toutes les fonctions de densité marginales existent, alors sous  $H_{1;n}^*$ , on a pour  $h = \tau, \varrho, C$ , ou  $R$

(i) Mesures  $RV^{(h)}$

$$(a) nRV^{(\tau)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{4}{9} \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(\Lambda_{11}^2) \text{tr}(\Lambda_{22}^2)}} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i \mu_j U_{ij}^2,$$

$$(b) nRV^{(\varrho)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(P_{11}^2) \text{tr}(P_{22}^2)}} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i \mu_j U_{ij}^2,$$

si  $X$  admet tous les moments d'ordre 4, on a

$$(c) nRV^{(C)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(\Sigma_{11}^2) \text{tr}(\Sigma_{22}^2)}} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \phi_i \varphi_j U_{ij}^2,$$

$$(d) nRV^{(R)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(\mathcal{P}_{11}^2) \text{tr}(\mathcal{P}_{22}^2)}} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \beta_i \pi_j U_{ij}^2,$$

où les variables aléatoires  $U_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ , sont indépendantes et de loi  $\mathcal{N}(\delta_{ij}, 1)$ ,  $s = \tau, \varrho, C$  et  $R$ , avec  $a_i, b_j, c_i, f_j, g_i$  et  $h_j$  étant respectivement les vecteurs propres orthonormés associés aux valeurs propres  $\lambda_i, \mu_j, \phi_i, \varphi_j, \beta_i$  et  $\pi_j$  de  $P_{11}, P_{22}, \Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \mathcal{P}_{11}$  et  $\mathcal{P}_{22}$ .

$${}^{\tau}\delta_{ij}^2 = \text{tr}({}^{\tau}A' b_j b_j' P_{22}^{-1} {}^{\tau}A P_{11}^{-1} a_i a_i'), \quad {}^{\varrho}\delta_{ij}^2 = \text{tr}({}^{\varrho}A' b_j b_j' P_{22}^{-1} {}^{\varrho}A P_{11}^{-1} a_i a_i'),$$

$${}^C\delta_{ij}^2 = \text{tr}({}^C A' f_j f_j' P_{22}^{-1} {}^C A P_{11}^{-1} c_i c_i') \quad \text{et} \quad {}^R\delta_{ij}^2 = \text{tr}({}^R A' h_j h_j' P_{22}^{-1} {}^R A P_{11}^{-1} g_i g_i').$$

De plus, on a  ${}^{\tau}\delta_{ij}^2 = \frac{4}{9} {}^{\varrho}\delta_{ij}^2$ .

(ii) Mesure  $SL^{(h)}$

$$(a) nSL^{(\tau)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{4}{9p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i t_j^{(2)} \chi_{1,ij}^2({}^{\tau}\delta_{ij,2}^2),$$

$$\text{où pour } i = 1, \dots, p \text{ et } j = 1, \dots, q, \quad {}^{\tau}\delta_{ij,2}^2 = \text{tr}({}^{\tau}A' p_j p_j' P_{22}^{-1} {}^{\tau}A P_{11}^{-1} a_i a_i'),$$

les variables aléatoires  $\chi_{1,ij}^2(\tau\delta_{ij,2}^2)$  sont indépendantes et de loi  $\chi_1^2$  décentrées avec le paramètre de décentralité  $\tau\delta_{ij,2}^2$  et  $p_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ , sont les vecteurs propres orthonormés associés aux valeurs propres  $t_j^{(2)}$  de  $\Lambda_{22}^{-1}P_{22}$ ,

$$(b) \quad nSL^{(e)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \lambda_i \chi_{i(q)}^2({}^e\delta_i^2),$$

où pour  $i = 1, \dots, p$ ,  ${}^e\delta_i^2 = \text{tr} \left( {}^eA' P_{22}^{-1} {}^eA P_{11}^{-1} a_i a_i' \right)$ ,

si  $X$  admet tous les moments d'ordre 4, on a

$$(c) \quad nSL^{(C)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \phi_i \chi_{i(q)}^2({}^C\delta_i^2) \quad \text{où pour } i = 1, \dots, p, \quad {}^C\delta_i^2 = \text{tr} \left( {}^C A' \Sigma_{22}^{-1} {}^C A \Sigma_{11}^{-1} c_i c_i' \right),$$

$$(d) \quad nSL^{(R)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \beta_i \chi_{i(q)}^2({}^R\delta_i^2) \quad \text{où pour } i = 1, \dots, p, \quad {}^R\delta_i^2 = \text{tr} \left( {}^R A' P_{22}^{-1} {}^R A P_{11}^{-1} g_i g_i' \right),$$

où les variables aléatoires  $\chi_{i(q)}^2({}^s\delta_i^2)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , sont indépendantes et suivent des lois  $\chi^2$  décentrées avec  $q$  degrés de liberté et paramètre de décentralité  ${}^s\delta_i^2$ ,  $s = e, C$  et  $R$ .

(iii) **Mesures  $CN^{(h)}$**

$$(a) \quad nCN^{(\tau)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{9p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q t_i^{(1)} t_j^{(2)} U_{ij}^2$$

où les variables aléatoires  $U_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ , sont indépendantes et de loi  $\mathcal{N}(\tau\Delta_{ij}, 1)$ , avec  $d_i$  et  $p_j$  étant respectivement vecteurs propres orthonormés correspondant aux valeurs propres  $t_i^{(1)}$  et  $t_j^{(2)}$  de  $\Lambda_{11}^{-1}P_{11}$  et  $\Lambda_{22}^{-1}P_{22}$  et  $\tau\Delta_{ij}^2 = \text{tr} \left( {}^T A' p_j p_j' P_{22}^{-1} {}^T A P_{11}^{-1} d_i d_i' \right)$ ,

$$(b) \quad nCN^{(e)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\chi_{pq}^2({}^e\delta^2)}{p}, \quad \text{avec } {}^e\delta^2 = \text{tr} \left( {}^eA' P_{22}^{-1} {}^eA P_{11}^{-1} \right),$$

si  $X$  admet tous les moments d'ordre 4, on a

$$(c) \quad nCN^{(C)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\chi_{pq}^2({}^C\delta^2)}{p}, \quad \text{avec } {}^C\delta^2 = \text{tr} \left( {}^C A' \Sigma_{22}^{-1} {}^C A \Sigma_{11}^{-1} \right)$$

$$(d) nCN^{(R)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\chi_{pq}^2(R\delta^2)}{p} \quad \text{avec } R\delta^2 = \text{tr} \left( R_1' P_{22}^{-1} R_1 P_{11}^{-1} \right) = C\delta^2$$

où pour chaque  $s = \varrho$ ,  $C$  et  $R$ , la variable aléatoire  $\chi_{pq}^2(s\delta^2)$  suit une loi  $\chi^2$  décentrée avec  $pq$  degrés de liberté et paramètre de décentralité  $s\delta^2$ .

**Démonstration:** Les démonstrations de ces résultats sont analogues à celle du théorème 4.1.1. Un paramètre de décentralité est introduit puisque le vecteur de la moyenne de la loi asymptotique de  $\sqrt{n}vecM_{21}$  est non nul,  $M = K, S, S, R$ .

(i) Mesures  $RV^{(h)}$ .

(a)  $h = \tau$ . En utilisant la démonstration du théorème 4.1.1, la distribution asymptotique de  $nRV^{(\tau)}$  est celle de la forme quadratique

$$Y^{(\tau)} = \frac{4}{9} \frac{Z'Z}{\sqrt{\text{tr}(\Lambda_{11}^2)(\text{tr}(\Lambda_{22}^2))}}$$

où  $Z$  est un vecteur aléatoire de loi  $\mathcal{N}_{pq}(vec \tau A, 4/9 P_{11} \otimes P_{22})$ . Or la distribution de  $Y^{(\tau)}$  est donnée (voir Appendice A, théorème A.1.1) par

$$Q^{(\tau)} = \frac{4}{9} \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(\Lambda_{11}^2)(\text{tr}(\Lambda_{22}^2))}} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q l_{ij}^{(\tau)} U_{ij}^2$$

où, pour  $i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ , les variables aléatoires  $U_{ij}$  sont indépendantes et de loi  $\mathcal{N}(\bar{\delta}_{ij}, 1)$  avec

$$\tau \delta_{ij}^2 = \text{tr} \left( \tau A' b_j b_j' P_{22}^{-1} \tau A P_{11}^{-1} a_i a_i' \right)$$

avec  $i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ . En effet,  $l_{ij}^{(\tau)} = \lambda_i \mu_j$  où  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  et  $\mu_1, \dots, \mu_q$  sont les valeurs propres respectivement de  $P_{11}$  et  $P_{22}$ . Désignons par  $a_i$  et  $b_j$  les vecteurs propres orthonormés associés à  $\lambda_i$  et  $\mu_j$ . Le vecteur  $v_{ij} = a_i \otimes b_j$  correspond alors au vecteur propre orthonormé associé à  $l_{ij}^{(\tau)} = \lambda_i \mu_j$ . D'après le théorème A.1.1 et le rappel sur la décomposition spectrale d'une matrice



(voir Appendice A) , on a

$$\begin{aligned}
{}^\tau\delta_{ij}^2 &= (\text{vec } {}^\tau A)' [v_{ij} v'_{ij} (P_{11}^{-1} \otimes P_{22}^{-1})] (\text{vec } {}^\tau A) \\
&= (\text{vec } {}^\tau A)' [(a_i \otimes b_j)(a'_i \otimes b'_j)(P_{11}^{-1} \otimes P_{22}^{-1})] (\text{vec } {}^\tau A) \\
&= (\text{vec } {}^\tau A)' (a_i a'_i P_{11}^{-1} \otimes b_j b'_j P_{22}^{-1}) (\text{vec } {}^\tau A) \\
&= \text{tr} \left( {}^\tau A' b_j b'_j P_{22}^{-1} {}^\tau A P_{11}^{-1} a_i a'_i \right)
\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

avec  $i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ .

(b) Les cas  $h = \varrho, C$  ou  $R$  se démontrent de façon similaire.

L'égalité  ${}^\tau\delta_{ij}^2 = 4 \varrho \delta_{ij}^2 / 9$  découle de l'expression  $\Lambda_{21} = 2P_{21}/3$  déduite du lemme 3.3.1

(ii) Mesure  $SL^{(h)}$ .

(a)  $h = \tau$ . En utilisant la démonstration du théorème 4.1.1, la distribution asymptotique de  $nSL^{(\tau)}$  est celle de la forme quadratique

$$Y^{(\tau)} = \frac{Z'(I_p \otimes \Lambda_{22})^{-1} Z}{p}$$

où  $Z$  est un vecteur aléatoire de loi  $\mathcal{N}_{pq}(\text{vec } {}^\tau A, P_{11} \otimes P_{22})$ . Or la distribution de  $Y^{(\tau)}$  est donnée (voir Appendice A, théorème A.1.1) par

$$Q^{(\tau)} = \frac{4}{9} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i t_j^{(2)} U_{ij}^2,$$

où, pour  $i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ , les variables aléatoires  $U_{ij}$  sont indépendantes et de loi  $\mathcal{N}(\delta_{ij,2}, 1)$ ,  $\lambda_i$  et  $t_j^{(2)}$  étant les valeurs propres de  $P_{11}$  et de  $\Lambda_{22}^{-1} P_{22}$  correspondant à leurs vecteurs propres orthonormés respectifs  $a_i$  et  $d_j$  avec

$$\begin{aligned}
{}^\tau\delta_{ij,2}^2 &= (\text{vec } {}^\tau A)' [(a_i \otimes p_j)(a'_i \otimes p'_j)(P_{11}^{-1} \otimes P_{22}^{-1})] (\text{vec } {}^\tau A) \\
&= (\text{vec } {}^\tau A)' (a_i a'_i P_{11}^{-1} \otimes p_j p'_j P_{22}^{-1}) (\text{vec } {}^\tau A) \\
&= \text{tr} \left( {}^\tau A' p_j p'_j P_{22}^{-1} {}^\tau A P_{11}^{-1} a_i a'_i \right)
\end{aligned}$$

pour  $i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ .

(b) Pour  $h = \varrho, C$ , ou  $R$ , la démonstration est similaire à la précédente.

(iii) Mesures  $CN^{(h)}$ .

(a)  $h = \tau$ . D'après la démonstration du théorème 4.1.2, la forme quadratique

$Q^{(\tau)}$  devient

$$Q^{(\tau)} = \frac{1}{9p} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q t_i^{(1)} t_j^{(2)} U_{ij}^2$$

où, pour  $i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ , les variables aléatoires  $U_{ij}$  sont indépendantes et de loi  $\mathcal{N}(\tau \Delta_{ij}, 1)$  avec  $\tau \Delta_{ij}^2 = \text{tr}(\tau A' p_j p_j' P_{22}^{-1} \tau A P_{11}^{-1} d_i d_i')$ ,  $d_i$  et  $p_j$ ,  $i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ , étant respectivement les vecteurs propres orthonormés correspondant aux valeurs propres  $t_i^{(1)}$  et  $t_j^{(2)}$  de  $\Lambda_{11} P_{11}^{-1}$  et de  $\Lambda_{22} P_{22}^{-1}$ .

(b)  $h = \varrho$ . La distribution asymptotique de  $nCN^{(\varrho)}$  est celle de la forme quadratique

$$Q^{(\varrho)} = \frac{Z(P_{11}^{-1} \otimes P_{22}^{-1})Z'}{p}$$

qui devient  $(\chi_{pq}^2(\varrho \delta^2))/p$  avec

$$\varrho \delta^2 = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q \text{tr}(\varrho A' e_l e_l' P_{22}^{-1} \varrho A P_{11}^{-1} e_k e_k') = \text{tr}(\varrho A' P_{22}^{-1} \varrho A P_{11}^{-1})$$

où on a tenu compte de l'indépendance des variables aléatoires  $U_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ , de loi  $\mathcal{N}(\vartheta_{ij}, 1)$  et du fait que la seule valeur propre de  $(P_{11} \otimes P_{22})(P_{11} \otimes P_{22})^{-1} = (I_p \otimes I_q)$  est 1 de multiplicité  $pq$  correspondant au vecteur propre  $e' = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{pq}$ .

(c) Les cas  $h = \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$  se démontrent de façon similaire au cas précédent.

L'égalité  $C\delta^2 = R\delta^2$  découle du fait que  $\rho CN^{(\mathbb{C})} = \rho CN^{(\mathbb{R})}$  (voir début du chapitre 2).

C.Q.F.D.

#### 4.1.3. Tests d'indépendance entre deux vecteurs aléatoires.

Le théorème 4.1.1 permet de construire douze tests asymptotiques pour tester l'hypothèse nulle  $H_0^*$ . À l'aide des mesures d'Escoufier (1973), de Stewart & Love (1968) et Cramer & Nicewander (1979), les régions critiques des tests de niveau asymptotique  $\alpha$  sont données respectivement par

$$\text{rejeter } H_0^* \text{ si : } nM^{(h)} > c_\alpha^{(M,h)},$$

où  $c_{\alpha}^{(M,h)}$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha$  de la distribution correspondante donnée par le théorème 4.1.1 pour  $M = RV, SL$  ou  $CN$  et  $h = \varrho, \tau, C$  ou  $R$  selon le choix de l'une ou l'autre des douze statistiques  $(nM^{(h)})$ .

On a  $M^{(h)} \xrightarrow{\mathcal{P}} \rho M^{(h)}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  pour  $M = RV, SL$  ou  $CN$  et  $h = \varrho, \tau, C$  ou  $R$ . Lorsque  $H_0^*$  est fautive,  $\rho M^{(h)} > 0$  et alors, on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(nM^{(h)} > c_{\alpha}^{(M,h)}) = 1$$

pour,  $M = RV, SL$  ou  $CN$  et  $h = \varrho, \tau, C$  ou  $R$ . Les douze tests proposés sont donc convergents.

On évalue numériquement les quantiles  $c_{\alpha}^{(M,h)}$ , pour  $M = RV, SL$  ou  $CN$  et  $h = \tau, \varrho, C$  ou  $R$  donnés par le théorème 4.1.1 à l'aide de l'algorithme d'Imhof (1961).

Remarquons que les tests  $M^{(\tau)}$  ( $M = RV, SL$  ou  $CN$ ) basés sur la matrice de Kendall sont liés aux  $M^{(\varrho)}$  basés sur la matrice de Spearman. Par exemple, la loi asymptotique  $nRV^{(\tau)}$  et  $nRV^{(\varrho)}$  utilisent les mêmes valeurs propres issues des sous-matrices de la matrice de Spearman  $P_{11}$  et  $P_{22}$ . Ils sont asymptotiquement équivalents, à un coefficient multiplicatif près qui dépend de la matrice Kendall. Dans le cas où l'on s'intéresse à l'indépendance totale, cette constante est  $4/9$  et ceci est déjà signalé par plusieurs auteurs (voir par exemple Hájek & Sidák (1967)).

#### 4.1.4. Application des tests.

On considère l'ensemble de données des tableaux 1 et 2 de Naik & Khattree (1996) constitués des records nationaux féminins et masculins en athlétisme de 55 pays. Il s'agit, comme le mentionnent les auteurs, d'une partie des données recueillies par Belcham & Hymans (1984) pour les jeux olympiques de 1984 à Los Angeles. Le tableau 1 (voir Naik & Khattree (1996)) est constitué des records nationaux féminins de 55 pays pour 7 courses en athlétisme : le 100 m, 200 m, 400 m, 800 m, 1500 m, 3000 m et le marathon (qui est 42195 m). Pour les mêmes pays, le tableau 2 (voir Naik & Khattree (1996)) est constitué des records masculins pour 8 courses en athlétisme: 100 m, 200 m, 400 m, 800 m, 1500 m, 5000 m, 10 000 m et le marathon.

Il est à noter que l'échelle de mesure de ces variables n'est pas la même puisque

les sprints (100 m, 200 m et 400 m) sont chronométrés en seconde tandis que les temps des autres courses sont données en minutes. Si on centre et réduit chaque variable pour utiliser des variables sans unité on risque de réduire l'information sur la variabilité des donnés. Pour ces données, une solution, proposée par Naik & Khattree (1996) est de représenter toutes les variables par les variables vitesses correspondantes, c'est-à-dire le nombre de mètres parcourus par secondes. Représentées ainsi, les variables conservent la possibilité d'avoir différents degrés de variabilité.

On veut éprouver, globalement puis par catégorie de course, l'indépendance entre la performances féminine et masculine. Pour cet ensemble de données où les performances relatives des femmes et des hommes sont sensiblement les mêmes d'une épreuve à l'autre on peut s'attendre à rejeter l'indépendance. D'ailleurs, les deux sexes utilisent les mêmes techniques pour accéder à des performances de haut niveau.

Considérons l'hypothèse nulle  $H_0^*$ : les performances nationales féminines et masculines sont indépendantes. Autrement dit, les vecteurs aléatoires  $X^{[1]}$  de dimension 7 et  $X^{[2]}$  de dimension 8 représentant respectivement la performance nationale féminine et masculine sont indépendants. Pour les 12 tests proposés dans le théorème 4.1.1, on trouve des niveaux critiques fortement significatifs. Le tableau 4.1 donne une récapitulation des différentes valeurs des statistiques correspondantes, leurs points critiques au niveau nominal 5% et les niveaux critiques.

On veut maintenant éprouver l'hypothèse nulle  $H_0^*$ : les performances nationales féminines et masculines, dans les courses de sprint sont indépendantes, autrement dit, les vecteurs aléatoires  $X^{[1]}$  de dimension 3 et  $X^{[2]}$  de dimension 3 représentant respectivement la performance nationale féminine et masculine dans les courses de sprints sont indépendants. On trouve aussi des niveaux critiques fortement significatifs (voir le tabeau 4.2).

Enfin, on veut éprouver l'hypothèse nulle  $H_0^*$ : les performances nationales féminines et masculines, dans les courses de demi-fond sont indépendantes c'est-à-dire qu'il y a indépendance entre les deux vecteurs aléatoires  $X^{[1]}$  de dimension 2 et  $X^{[2]}$  de dimension 2 représentant respectivement la performance nationale féminine et masculine

Matrice	Statistiques	Valeur	Point critique $C_{0,05}$	Niveau critique
covariance	$nRV^{(C)}$	45,28	4,28	$1,19 \times 10^{-7}$
	$nSL^{(C)}$	41,89	14,32	0
	$nCN^{(C)}$	14,94	10,63	$8,78 \times 10^{-5}$
corrélation	$nRV^{(R)}$	45,09	2,61	$1,19 \times 10^{-7}$
	$nSL^{(R)}$	41,47	14,31	0
	$nCN^{(R)}$	14,94	10,63	$8,78 \times 10^{-5}$
Spearman	$nRV^{(e)}$	44,88	4,33	$1,19 \times 10^{-7}$
	$nSL^{(e)}$	42,14	14,32	$1,19 \times 10^{-7}$
	$nCN^{(e)}$	17,18	10,63	$1,25 \times 10^{-6}$
Kendall	$nRV^{(\tau)}$	37,16	2,77	0
	$nSL^{(\tau)}$	28,67	3,95	$1,19 \times 10^{-7}$
	$nCN^{(\tau)}$	8,21	1,57	$1,19 \times 10^{-7}$

TABLEAU 4.1. Tests d'indépendance globale entre les performances nationales féminines et masculines, points critiques au niveau nominal 5% et niveaux critiques.

Matrice	Statistique	Valeur	Point critique $C_{0,05}$	Niveau critique
covariance	$nRV^{(C)}$	35,11	4,04	$1,31 \times 10^{-6}$
	$nSL^{(C)}$	34,21	7,44	$1,19 \times 10^{-7}$
	$nCN^{(C)}$	14,46	5,63	$5,00 \times 10^{-6}$
corrélation	$nRV^{(R)}$	35,14	4,04	$2,38 \times 10^{-7}$
	$nSL^{(R)}$	34,16	7,44	$1,19 \times 10^{-7}$
	$nCN^{(R)}$	14,46	5,63	$4,94 \times 10^{-6}$
Spearman	$nRV^{(e)}$	34,43	4,06	$1,19 \times 10^{-7}$
	$nSL^{(e)}$	37,00	7,47	$5,96 \times 10^{-7}$
	$nCN^{(e)}$	16,15	5,63	$2,62 \times 10^{-6}$
Kendall	$nRV^{(\tau)}$	24,15	2,27	$5,36 \times 10^{-7}$
	$nSL^{(\tau)}$	22,94	2,55	$5,36 \times 10^{-7}$
	$nCN^{(\tau)}$	9,86	1,30	$5,36 \times 10^{-7}$

TABLEAU 4.2. Tests d'indépendance entre les performances nationales féminines et masculines pour les courses de sprint, points critiques au niveau nominal 5% et niveaux critiques.

dans les courses de demi-fond (800 m et 1500 m). Là encore, on trouve des niveaux critiques fortement significatifs (voir le tableau 4.3).

Matrice	Statistique	Valeur	Point critique $C_{0.05}$	Niveau critique
covariance	$nRV^{(C)}$	31,41	3,91	$2,38 \times 10^{-7}$
	$nSL^{(C)}$	31,71	5,91	0
	$nCN^{(C)}$	17,89	4,74	$5,96 \times 10^{-7}$
corrélation	$nRV^{(R)}$	31,32	3,90	0
	$nSL^{(R)}$	31,56	5,90	$1,19 \times 10^{-7}$
	$nCN^{(R)}$	17,89	4,74	$8,34 \times 10^{-7}$
Spearman	$nRV^{(e)}$	27,90	3,93	$1,19 \times 10^{-7}$
	$nSL^{(e)}$	28,41	5,89	$1,19 \times 10^{-7}$
	$nCN^{(e)}$	15,93	4,74	$1,78 \times 10^{-6}$
Kendall	$nRV^{(\tau)}$	17,81	2,01	$8,34 \times 10^{-7}$
	$nSL^{(\tau)}$	17,05	2,13	0
	$nCN^{(\tau)}$	9,51	1,27	$1,19 \times 10^{-7}$

TABLEAU 4.3. Tests d'indépendance entre les performances nationales féminines et masculines pour les courses de demi-fond, points critiques au niveau nominal 5% et niveaux critiques.

## 4.2. ETUDE EXPÉRIMENTALE

À l'aide d'une simulation, on va évaluer le comportement des douze tests développés précédemment et les comparer entre eux.

On utilise la méthode de Monte Carlo pour comparer le niveau et la puissance expérimentalement. Cette étude est réalisée à titre indicatif puisqu'on se limite seulement au cas  $p = 2$ ,  $q = 3$  ( $p+q = m$ ) et au niveau nominal 1%. Le nombre d'échantillons générés est 10000 pour des distributions multivariées de type elliptique et non elliptique. Dans la catégorie des distributions elliptiques, on considère la loi

multinormale  $\mathcal{N}_5(O, \Sigma)$  et deux lois  $t$  multivariées de degrés de liberté 5 et 1 respectivement. On choisit la distribution  $t_5$  parce que ses ailes sont plus rabattues que celles d'une distribution multinormale tandis que le choix de la distribution de Cauchy multivariée (c'est-à-dire  $t_1$ ) est dicté par le fait qu'elle n'admet aucun moment. Pour cette dernière distribution seuls les deux groupes de tests basés sur la matrice de Spearman et la matrice de Kendall s'appliquent. Dans la catégorie des distributions non elliptiques, on considère la distribution logistique multivariée et une distribution particulière multivariée construite comme suit: chaque composante du vecteur  $X$ , de dimension 5, est générée de façon indépendante des autres. La 1<sup>ière</sup> est une loi  $\mathcal{N}(0,1)$ , la 2<sup>ème</sup> est une distribution uniforme  $[0,1]$  moins 0,5 puis multipliée par  $\sqrt{12}$ , la 3<sup>ème</sup> est une distribution exponentielle (de paramètre 1) moins 1, la 4<sup>ème</sup> est une distribution bêta (de paramètres 2 et 2) moins 0,5 puis multipliée par  $\sqrt{20}$  et enfin, la 5<sup>ème</sup> est une distribution gamma (de paramètres 1 et 4) moins 4 puis divisée par 2. Le vecteur est alors transformé en  $CX$  où  $C$  est une matrice de dimension  $5 \times 5$  telle que  $\Sigma = CC'$ . Ainsi la distribution multivariée générée est de matrice de covariance  $\Sigma$ . Cette dernière distribution a été utilisée par Cléroux, Lazraq & Lepage (1995).

La distribution multinormale et la distribution particulière multivariée décrite ci-dessus sont utilisées avec la même matrice de covariance  $\Sigma$  telle que

$$\Sigma_{11} = I_p, \quad \Sigma_{22} = I_q \text{ et } \Sigma_{12} = \Sigma'_{21} = C_{00}, C_{10}, C_{15} \text{ et } C_{20}$$

où les matrices  $C_{xy}$  représentent les matrices  $p \times q$  dont tous les éléments sont égaux à 0,xy. Par exemple, tous les éléments de  $C_{15}$  sont égaux à 0,15. Ce type de matrices de covariance a été aussi utilisé par Cléroux, Lazraq & Lepage (1995).

Pour générer les différentes lois, la procédure d'étude expérimentale du chapitre deux est utilisée.

Un vecteur aléatoire de dimension  $m$  est dit de distribution logistique multivariée si sa fonction de densité est

$$f(x_1, \dots, x_m) = \Gamma(m+1) \frac{\exp(-\sum_{i=1}^m x_i)}{[\sum_{i=1}^m \exp(-x_i)+1]^{m+1}} \quad (4.2.1)$$

$\forall x_i \in \mathbb{R}$  pour  $i = 1, \dots, m$ .

Si  $X_1, \dots, X_m, X_{m+1}$  sont indépendantes et de même distribution exponentielle (de paramètre 1), alors la distribution conjointe de

$$U_i = -\log\left(\frac{X_i}{X_{m+1}}\right) \quad \text{pour } i = 1, \dots, m$$

est donnée par 4.2.1 (voir Johnson (1987)).

Pour générer  $t_5$ ,  $t_1$  et la logistique multivariée, on procède comme suit:

D'abord pour l'hypothèse nulle  $H_0^*$  identifiée par  $C_{00}$ , on génère de façon indépendante deux vecteurs aléatoires  $X^{[1]}$  et  $X^{[2]}$  de dimension respective 2 et 3 selon la même distribution. Remarquons tout de suite que le vecteur aléatoire qui en résulte  $X = (X^{[1]}, X^{[2]})'$  n'admet pas nécessairement la même distribution que les sous-vecteurs  $X^{[1]}$  et  $X^{[2]}$ .

Pour les hypothèses alternatives, on considère la transformation linéaire  $Y = CX$ , où  $C$  est la matrice obtenue ci-dessus par triangularisation inférieure de Cholesky de la matrice définie positive  $\Sigma$ .

Les tableaux 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 et 4.8 présentent les résultats de la simulation pour les cinq distributions. Des tailles échantillonales de 50, 100, 200 et 300 sont considérées. Afin de pouvoir juger du niveau expérimental des douze tests asymptotiques et de leur puissance expérimentale, un niveau expérimental sera jugé acceptable si le niveau nominal 1% appartient à l'intervalle de confiance au niveau 95%. Ceci sera réalisé lorsque le niveau expérimental, correspondant à la colonne  $C_{00}$ , varie entre 79 et 121.

Les résultats de cette étude font apparaître que pour toutes les distributions considérées, les niveaux expérimentaux des douze tests d'indépendance se maintiennent au niveau acceptable, contrairement aux cinq tests de non association du chapitre 2 où pour  $t_5$  les niveaux expérimentaux n'étaient acceptables que pour de très grandes tailles échantillonales.



Quant à la puissance expérimentale, on note que pour les cinq distributions la puissance expérimentale de chaque test croît au fur et à mesure qu'on s'éloigne de l'hypothèse nulle  $C_{00}$ , c'est-à-dire que la puissance expérimentale croît avec la valeur  $xy$  des matrices  $C_{xy}$ .

Pour la distribution multinormale et la distribution particulière multivariée, on constate que les deux groupes de tests basés sur la matrice de covariance et la matrice de corrélation,  $nM^{(C)}$  et  $nM^{(R)}$  ( $M=RV, SL, CN$ ) ont une puissance expérimentale plus grande que ceux des deux groupes de tests basés sur la matrice de Spearman et la matrice de Kendall,  $nM^{(\rho)}$  et  $nM^{(\tau)}$ . Cette tendance s'inverse pour les distributions  $t_5$ ,  $t_1$  et la logistique multivariée. À l'intérieur de chacun des quatre groupes, le test  $nSL^{(h)}$  ( $h = C, R, \rho, \tau$ ) est plus puissant expérimentalement que les deux autres de son propre groupe, surtout au voisinage de l'hypothèse nulle  $C_{00}$ . Par contre, pour la distribution logistique multivariée, les tests ( $nRV^{(h)} : h = C, R, \rho, \tau$ ) sont nettement plus puissants expérimentalement que les huit autres. Rappelons que dans l'étude expérimentale du chapitre deux, le test  $nCN$  était le plus puissant expérimentalement des cinq tests pour toutes les distributions considérées. Il en résulte que pour chaque groupe considéré des quatre, il n'y a pas un test qui est le plus puissant expérimentalement que deux autres de son propre groupe. On ne peut pas non plus dire qu'un groupe est plus puissant expérimentalement que les trois autres. Néanmoins, on remarque que le groupe de Kendall est plus puissant expérimentalement que celui de Spearman surtout pour des petites tailles échantillonnales et au voisinage de l'hypothèse nulle, c'est-à-dire pour l'hypothèse voisine  $C_{10}$ . Par contre, les deux groupes de tests basés sur la matrice de covariance et de corrélation demeurent équivalents.

## **NOTE TO USERS**

**Page(s) not included in the original manuscript are unavailable from the author or university. The manuscript was microfilmed as received.**

**UMI**

n	matrice	Tests	Multinormale				t de degré $\nu=5$				Quelconque				Logistique			
			$C_{00}$	$C_{10}$	$C_{15}$	$C_{20}$	$C_{00}$	$C_{10}$	$C_{15}$	$C_{20}$	$C_{00}$	$C_{10}$	$C_{15}$	$C_{20}$	$C_{00}$	$C_{10}$	$C_{15}$	$C_{20}$
100	Covariance	nRV <sup>(c)</sup>	71	1605	4572	7481	114	1685	4534	7131	89	1586	4567	7460	85	5418	9101	9931
		nSL <sup>(c)</sup>	83	1676	5273	8684	106	1761	5274	8437	83	1671	5247	8630	79	3531	7988	9762
		nCN <sup>(c)</sup>	83	1584	4981	8482	101	1732	5184	8359	79	1547	4938	8385	87	2438	6798	9400
	Corrélation	nRV <sup>(R)</sup>	77	1583	4552	7514	110	1680	4590	7208	81	1534	4506	7411	85	5442	9108	9925
		nSL <sup>(R)</sup>	82	1671	5248	8701	103	1805	5364	8528	78	1636	5210	8625	79	3545	8025	9770
		nCN <sup>(R)</sup>	83	1584	4981	8482	101	1732	5184	8359	79	1547	4938	8385	87	2438	6798	9400
	Spearman	nRV <sup>(e)</sup>	92	1453	4120	6994	88	1799	4802	7428	100	1168	3325	5710	108	5564	9151	9931
		nSL <sup>(e)</sup>	100	1534	4745	8232	100	1877	5465	8539	103	1299	4049	7405	99	3673	8090	9751
		nCN <sup>(e)</sup>	94	1467	4459	7931	97	1766	5151	8210	97	1241	3768	7062	100	2578	6857	9384
	Kendall	nRV <sup>(<math>\tau</math>)</sup>	98	1513	4195	7065	97	1899	4934	7541	107	1235	3387	5802	106	5632	9185	9939
		nSL <sup>(<math>\tau</math>)</sup>	104	1573	4629	7950	111	1964	5426	8315	105	1303	3899	6991	112	4895	8826	9879
		nCN <sup>(<math>\tau</math>)</sup>	105	1534	4490	7746	108	1888	5216	8127	106	1281	3739	6752	108	4488	8561	9830

Suite du tableau 4.4

n	matrice	Tests	Multinormale				t de degré $\nu=5$				Quelconque				Logistique			
			$C_{00}$	$C_{10}$	$C_{15}$	$C_{20}$	$C_{00}$	$C_{10}$	$C_{15}$	$C_{20}$	$C_{00}$	$C_{10}$	$C_{15}$	$C_{20}$	$C_{00}$	$C_{10}$	$C_{15}$	$C_{20}$
200	Covariance	nRV <sup>(c)</sup>	80	4519	8938	9919	114	4544	8692	9806	103	4573	8922	9933	94	8968	9987	9999
		nSL <sup>(c)</sup>	80	4852	9297	9989	107	4831	9185	9945	107	4878	9322	9982	106	7734	9937	9999
		nCN <sup>(c)</sup>	80	4728	9252	9987	102	4774	9166	9943	104	4725	9259	9982	101	6523	9807	9999
	Corrélation	nRV <sup>(r)</sup>	82	4526	8937	9921	108	4561	8713	9821	102	4562	8914	9927	94	8958	9987	9999
		nSL <sup>(r)</sup>	84	4851	9309	9987	99	4868	9228	9953	107	4855	9319	9981	110	7734	9937	9999
		nCN <sup>(r)</sup>	80	4728	9252	9987	102	4774	9166	9943	104	4725	9259	9982	101	6523	9807	9999
	Spearman	nRV <sup>(e)</sup>	94	4086	8530	9845	103	4806	8973	9892	102	3492	7746	9616	100	9042	9986	10000
		nSL <sup>(e)</sup>	98	4333	8964	9956	107	5076	9343	9969	100	3758	8476	9905	105	7880	9940	9999
		nCN <sup>(e)</sup>	100	4212	8889	9949	102	4931	9229	9965	106	3657	8317	9892	101	6719	9816	9999
	Kendall	nRV <sup>(<math>\tau</math>)</sup>	103	4118	8549	9848	113	4905	8974	9903	103	3539	7795	9635	104	9056	9986	10000
		nSL <sup>(<math>\tau</math>)</sup>	104	4301	8871	9939	107	5089	9270	9964	104	3735	8300	9860	100	8651	9975	99999
		nCN <sup>(<math>\tau</math>)</sup>	102	4232	8809	9935	112	5004	9213	9955	103	3681	8219	9849	111	8353	9963	9999

Suite du tableau 4.4

n	matrice	Tests	Multinormale				t de degré $\nu=5$				Quelconque				Logistique			
			$C_{00}$	$C_{10}$	$C_{15}$	$C_{20}$	$C_{00}$	$C_{10}$	$C_{15}$	$C_{20}$	$C_{00}$	$C_{10}$	$C_{15}$	$C_{20}$	$C_{00}$	$C_{10}$	$C_{15}$	$C_{20}$
300	Covariance	nRV <sup>(c)</sup>	100	7284	9883	10000	115	7020	9808	9991	92	7341	9898	10000	101	9842	9999	10000
		nSL <sup>(c)</sup>	101	7572	9939	9999	109	7392	9908	9996	91	7617	9949	9994	98	9447	9999	10000
		nCN <sup>(c)</sup>	100	7468	9935	10000	104	7360	9900	9998	94	7493	9953	10000	92	8857	9998	10000
	Corrélation	nRV <sup>(R)</sup>	102	7286	9882	9996	114	7033	9814	9992	90	7320	9898	10000	98	9848	9999	10000
		nSL <sup>(R)</sup>	97	7566	9939	9998	105	7430	9919	9994	91	7593	9951	9995	100	9444	9999	10000
		nCN <sup>(R)</sup>	100	7468	9935	10000	104	7360	9900	9998	94	7493	9953	10000	92	8857	9998	10000
	Spearman	nRV <sup>(e)</sup>	103	6679	9785	9996	107	7436	9910	10000	98	5961	9565	9990	110	9859	9999	10000
		nSL <sup>(e)</sup>	115	6939	9874	9997	103	7698	9945	9998	99	6350	9793	9994	101	9489	9999	10000
		nCN <sup>(e)</sup>	115	6837	9862	10000	97	7604	9946	10000	98	6250	9762	10000	91	8954	9996	10000
	Kendall	nRV <sup>(<math>\tau</math>)</sup>	101	6704	9785	9996	108	7488	9909	10000	102	6015	9568	9991	110	9864	9999	10000
		nSL <sup>(<math>\tau</math>)</sup>	110	6897	9844	9999	106	7666	9945	10000	101	6280	9746	10000	108	9736	9999	10000
		nCN <sup>(<math>\tau</math>)</sup>	115	6841	9840	9999	105	7603	9942	10000	101	6210	9719	10000	103	9635	9999	10000

Suite du tableau 4.4

n	matrice	Tests	Cauchy			
			$C_{00}$	$C_{10}$	$C_{15}$	$C_{20}$
50	Spearman	$nRV^{(e)}$	95	2227	3647	4556
		$nSL^{(e)}$	79	2181	4073	5580
		$nCN^{(e)}$	84	1797	3277	4601
	Kendall	$nRV^{(\tau)}$	118	2659	4289	5365
		$nSL^{(\tau)}$	109	2761	4743	6176
		$nCN^{(\tau)}$	111	2502	4338	5723
100	Spearman	$nRV^{(e)}$	91	5319	7563	8572
		$nSL^{(e)}$	95	5602	8151	9242
		$nCN^{(e)}$	100	5051	7623	8893
	Kendall	$nRV^{(\tau)}$	112	5814	8041	8914
		$nSL^{(\tau)}$	113	6078	8432	9376
		$nCN^{(\tau)}$	115	5723	8148	9191
200	Spearman	$nRV^{(e)}$	105	8954	9870	9972
		$nSL^{(e)}$	117	9176	9932	9994
		$nCN^{(e)}$	114	8933	9889	9987
	Kendall	$nRV^{(\tau)}$	114	9151	9909	9984
		$nSL^{(\tau)}$	114	9291	9946	9998
		$nCN^{(\tau)}$	115	9157	9929	9993
300	Spearman	$nRV^{(e)}$	100	9862	9996	10000
		$nSL^{(e)}$	103	9896	9995	10000
		$nCN^{(e)}$	100	9865	9998	10000
	Kendall	$nRV^{(\tau)}$	98	9896	9998	10000
		$nSL^{(\tau)}$	103	9917	9998	10000
		$nCN^{(\tau)}$	102	9902	9998	10000

Tableau 4.8. Puissance expérimentale (x10000) des tests basés sur les matrices de Spearman et de Kendall au niveau nominal 1% pour une distribution multivariée de Cauchy donnée avec  $p = 2$  et  $q = 3$ .

### 4.3. TESTS D'INDÉPENDANCE ENTRE PLUSIEURS VECTEURS

Dans cette dernière section, on généralise les résultats précédents pour construire des tests d'indépendance entre plusieurs vecteurs aléatoires. Plus précisément, on veut éprouver l'indépendance entre  $G$  sous-vecteurs aléatoires du vecteur aléatoire  $X$  (de dimension  $m \times 1$ ) dont la fonction de distribution  $F(x)$  est continue.

Comme dans la section 3.4, on partitionne le vecteur  $X$  comme suit

$$X = \begin{pmatrix} X^{[1]} \\ \vdots \\ X^{[s]} \\ \vdots \\ X^{[G]} \end{pmatrix}$$

où pour  $s = 1, \dots, G$ ,  $X^{[s]}$  est un sous-vecteur de  $X$  de dimension  $m_s$  (avec  $\sum_{s=1}^G m_s = m$ ).

Dans cette section on veut tester l'indépendance entre les  $G$  sous-vecteurs, c'est-à-dire tester l'hypothèse nulle

$$H_0^{*(G)} : \text{les } G \text{ vecteurs, } s=1, \dots, G, X^{[s]}, \text{ sont indépendants.}$$

La mesure d'association qu'on va utiliser pour cette dernière section est celle d'Escoufier (1973). Les deux autres mesures se traitent de façon similaire. Reconsidérons les partitions des matrices échantillonnales de Kendall, de Spearman, de covariance et de corrélation de la section 3.4 et définissons les mesures  $RV_{ij}^{(h)}$  ( $h = \tau, \varrho, C$  ou  $R$ ;  $1 \leq j < i \leq G$ ) par

$$(i) \quad RV_{ij}^{(\tau)} = \frac{tr(K_{ij}K_{ji})}{\sqrt{tr(K_{ii}^2)tr(K_{jj}^2)}} \quad \text{pour la matrice de Kendall,}$$

$$(ii) \quad RV_{ij}^{(\varrho)} = \frac{tr(S_{ij}S_{ji})}{\sqrt{tr(S_{ii}^2)tr(S_{jj}^2)}} \quad \text{pour la matrice de Spearman,}$$

$$(iii) \quad RV_{ij}^{(C)} = \frac{tr(S_{ij}S_{ji})}{\sqrt{tr(S_{ii}^2)tr(S_{jj}^2)}} \quad \text{pour la matrice de la covariance,}$$

$$(iv) \quad RV_{ij}^{(R)} = \frac{tr(R_{ij}R_{ji})}{\sqrt{tr(R_{ii}^2)tr(R_{jj}^2)}} \quad \text{pour la matrice de la corrélation.}$$

La loi asymptotique conjointe des  $G(G-1)/2$ ,  $RV_{ij}^{(h)}$ , est donnée par le théorème suivant.

**THÉORÈME 4.3.1.**

**A:** Sous  $H_0^{(G)}$ , on a

$$n \begin{pmatrix} RV_{21}^{(h)} \\ \vdots \\ RV_{ij}^{(h)} \\ \vdots \\ RV_{G,G-1}^{(h)} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} Y_{21}^{(h)} \\ \vdots \\ Y_{ij}^{(h)} \\ \vdots \\ Y_{G,G-1}^{(h)} \end{pmatrix} \quad \text{pour } h = \tau, \varrho, C \text{ ou } R$$

où pour chaque  $h$  fixe, les  $G(G-1)/2$  variables aléatoires  $Y_{ij}^{(h)}$  sont indépendantes et distribuées comme

$$(i) \quad Y_{ij}^{(\tau)} = \frac{4}{9} \frac{1}{\sqrt{tr(\Lambda_{jj}^2)tr(\Lambda_{ii}^2)}} \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{m_j} \lambda_k^{(i)} \mu_l^{(j)} U_{kl,(ij)}^2,$$

$$(ii) \quad Y_{ij}^{(\varrho)} = \frac{1}{\sqrt{tr(P_{jj}^2)tr(P_{ii}^2)}} \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{m_j} \lambda_k^{(i)} \mu_l^{(j)} U_{kl,(ij)}^2,$$

si  $X$  admet tous les moments d'ordre 4,

$$(iii) \quad Y_{ij}^{(C)} = \frac{1}{\sqrt{tr(\Sigma_{jj}^2)tr(\Sigma_{ii}^2)}} \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{m_j} \phi_k^{(i)} \varphi_l^{(j)} U_{kl,(ij)}^2,$$



$$(iv) Y_{ij}^{(R)} = \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(\mathcal{P}_{jj}^2) \text{tr}(\mathcal{P}_{ii}^2)}} \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{m_j} \beta_k^{(i)} \pi_l^{(j)} U_{kl,(ij)}^2$$

où pour  $i$  et  $j$  fixes,  $1 \leq j < i \leq G$ , les variables aléatoires  $U_{kl,(ij)}$  sont indépendantes et de même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,  $k = 1, \dots, m_i$ ,  $l = 1, \dots, m_j$  avec  $\lambda_k^{(i)}$ ,  $\mu_l^{(j)}$ ,  $\phi_k^{(i)}$ ,  $\varphi_l^{(j)}$ ,  $\beta_k^{(i)}$  et  $\pi_l^{(j)}$  étant les valeurs propres de  $P_{ii}$ ,  $P_{jj}$ ,  $\Sigma_{ii}$ ,  $\Sigma_{jj}$ ,  $\mathcal{P}_{ii}$  et  $\mathcal{P}_{jj}$  respectivement.

**B:** Sous  $H_{1:n}^{*(G)}$  alors le résultat en **A** tient sauf que pour  $i$  et  $j$  fixes,  $1 \leq j < i \leq G$ , les variables aléatoires  $U_{kl,(ij)}$  sont indépendantes et de loi  $\mathcal{N}(h\delta_{kl,(ij)}, 1)$ ,  $h = \tau, \varrho, C$  ou  $R$ , avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau\delta_{kl,(ij)}^2 = \text{tr} \left( \tau A'_{ij} b_{l,jj} b'_{l,jj} P_{jj}^{-1} \tau A_{ij} P_{ii}^{-1} a_{k,ii} a'_{k,ii} \right) \\ \varrho\delta_{kl,(ij)}^2 = \text{tr} \left( \varrho A'_{ij} b_{l,jj} b'_{l,jj} P_{jj}^{-1} \varrho A_{ij} P_{ij}^{-1} a_{k,ii} a'_{k,ii} \right) \\ C\delta_{kl,(ij)}^2 = \text{tr} \left( C A'_{ij} h_{l,jj} h'_{l,jj} \Sigma_{jj}^{-1} C A_{ij} \Sigma_{ii}^{-1} g_{k,ii} g'_{k,ii} \right) \\ R\delta_{kl,(ij)}^2 = \text{tr} \left( R A'_{ij} f_{l,jj} f'_{l,jj} \Sigma_{jj}^{-1} R A_{ij} \Sigma_{ii}^{-1} c_{k,ii} c'_{k,ii} \right) \end{array} \right.$$

pour  $k = 1, \dots, m_i$  et  $l = 1, \dots, m_j$ ,  $1 \leq j < i \leq G$ ,  $a_{k,ii}$ ,  $b_{l,jj}$ ,  $g_{k,ii}$ ,  $h_{l,jj}$ ,  $c_{k,ii}$  et  $f_{l,jj}$  étant respectivement les vecteurs propres orthonormés associés aux valeurs propres de  $P_{ii}$ ,  $P_{jj}$ ,  $\Sigma_{ii}$ ,  $\Sigma_{jj}$ ,  $\mathcal{P}_{ii}$  et  $\mathcal{P}_{jj}$ .

**C:** Pour  $G=m$  et  $f = m(m-1)/2$ , on a

(1) sous  $H_0^{*(m)}$

$$(i) nK^2 = \frac{9n}{4} \sum_{1 \leq j < i \leq m} nRV_{ij}^{(\tau)} = \frac{9n}{4} \sum_{1 \leq j < i \leq m} K_n^{(i,j)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(\tau)} \text{ suit une loi } \chi_f^2,$$

$$(ii) nS^2 = n \sum_{1 \leq j < i \leq m} RV_{ij}^{(\varrho)} = n \sum_{1 \leq j < i \leq m} S_n^{(i,j)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(\varrho)} \text{ suit une loi } \chi_f^2,$$

(iii) si, de plus,  $X$  admet tous les moments d'ordre 4,

$$nR^2 = n \sum_{1 \leq j < i \leq m} RV_{ij}^{(R)} = n \sum_{1 \leq j < i \leq m} r_{ij}^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(R)} \text{ suit une loi } \chi_f^2$$

(2) sous  $H_{1:n}^{*(m)}$  le résultat en  $C(1)$  tient sauf que

$$(i) \text{ pour } Z^{(\tau)} \text{ le paramètre décentralité est } \tau\delta^2 = \sum_{1 \leq j < i \leq m} \tau a_{ij}^2,$$

$$(ii) \text{ pour } Z^{(e)} \text{ le paramètre décentralité est } e\delta^2 = \sum_{1 \leq j < i \leq m} e a_{ij}^2 = \frac{9}{4} e\delta^2,$$

$$(iii) \text{ et pour } Z^{(r)} \text{ le paramètre décentralité est } R\delta^2 = \sum_{1 \leq j < i \leq m} R a_{ij}^2$$

où  $r_{ij}$  est le coefficient de corrélation échantillonnal entre les composantes  $X^{(i)}$  et  $X^{(j)}$  du vecteur aléatoire  $X$ .

### Démonstration:

A:  $h=\tau$ . Pour  $1 \leq j < i \leq G$ , le vecteur aléatoire  $\sqrt{n} \text{vec} K_{ij}$  converge en loi vers le vecteur aléatoire  $Z_{ij}$  de loi  $\mathcal{N}_{m_j m_i}(O, 4/9 P_{jj} \otimes P_{ii})$ . D'autre part, comme les mesures  $RV_{ij}^{(\tau)}$ ,  $1 \leq j < i \leq G$ , sont continues en tous leurs arguments, on a, lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$n \begin{pmatrix} RV_{21}^{(\tau)} \\ \vdots \\ RV_{ij}^{(\tau)} \\ \vdots \\ RV_{G,G-1}^{(\tau)} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} Z'_{21} Z_{21} / \sqrt{\text{tr}(\Lambda_{11}^2) (\text{tr}(\Lambda_{22}^2))} \\ \vdots \\ Z'_{ij} Z_{ij} / \sqrt{\text{tr}(\Lambda_{jj}^2) (\text{tr}(\Lambda_{ii}^2))} \\ \vdots \\ Z'_{G,G-1} Z_{G,G-1} / \sqrt{\text{tr}(\Lambda_{G-1,G-1}^2) (\text{tr}(\Lambda_{G,G}^2))} \end{pmatrix}$$

Les vecteurs aléatoires  $Z_{ij}$  pour  $1 \leq j < i \leq G$ , étant asymptotiquement indépendantes d'après le corollaire 3.4.1, alors les formes quadratiques  $Y_{ij}^{(\tau)}$  sont asymptotiquement indépendantes et distribuées comme

$$Y_{ij}^{(\tau)} = \frac{4}{9} \frac{1}{\sqrt{\text{tr}(\Lambda_{ii}^2) \text{tr}(\Lambda_{jj}^2)}} \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{m_j} \lambda_k^{(i)} \mu_l^{(j)} U_{kl,(ij)}^2$$

Le reste de la démonstration est une simple réécriture de celle du théorème 4.1.1.

Les cas  $h=\varrho$ , C ou R se démontrent façon similaire.

**B:** Cette partie se démontre aussi de la même façon que le théorème 2.3.2.

**C:**  $h=\tau$ . Puisque sous  $H_0^{*(m)}$  et pour  $i = 1, \dots, m$ ,  $\Lambda_{ii} = 1$ , les valeurs propres  $\lambda_k^{(i)} = \mu_k^{(j)} = 1$  pour tout triplet  $(i, j, k)$ . D'autre part, puisque les  $f$  variables aléatoires  $Z_{ij}$ ,  $1 \leq j < i \leq m$  sont asymptotiquement indépendantes, alors on a

$$Y_{ij}^{(\tau)} = \frac{4}{9} U_{ij}^2$$

où les  $f$  variables aléatoires  $U_{ij}$  sont indépendantes et suivent une même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Par conséquent, on a

$$nK^2 = \frac{9n}{4} \sum_{1 \leq j < i \leq m} nRV_{ij}^{(\tau)} = \frac{9n}{4} \sum_{1 \leq j < i \leq m} K_n^{(i,j)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(\tau)} \text{ suit une loi } \chi_f^2.$$

Les cas  $h = \varrho$  ou R se démontrent façon similaire.

Sous  $H_{1:n}^{*(m)}$ , par le même raisonnement on déduit que les  $f$  variables aléatoires  $U_{ij}$  pour  $1 \leq j < i \leq m$ , sont indépendantes et suivent une loi  $\mathcal{N}(\tau a_{ij}, 1)$ . Par conséquent, on a

$$nK^2 = \frac{9n}{4} \sum_{1 \leq j < i \leq m} nRV_{ij}^{(\tau)} = \frac{9n}{4} \sum_{1 \leq j < i \leq m} K_n^{(i,j)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z^{(\tau)} \text{ suit une loi } \chi_f^2(\tau\delta^2).$$

Les cas  $h=\varrho$  ou R se démontrent aussi de façon similaire.

**C.Q.F.D.**

#### 4.3.1. Tests asymptotiques pour $H_0^{*(G)}$ .

Le théorème 4.3.1 permet de construire quatre tests asymptotiques pour tester l'hypothèse nulle  $H_0^{*(G)}$ . À l'aide de la mesures d'Escoufier (1973), les régions critiques des tests de niveau asymptotique  $\alpha$  sont données respectivement par

$$\begin{aligned} \text{rejeter } H_0^{*(G)} & \text{ si } n \sum_{1 \leq j < i \leq G} RV_{ij}^{(\tau)} > c_\alpha^{(\tau)}, \\ \text{rejeter } H_0^{*(G)} & \text{ si } n \sum_{1 \leq j < i \leq G} RV_{ij}^{(\varrho)} > c_\alpha^{(\varrho)}, \\ \text{rejeter } H_0^{*(G)} & \text{ si } n \sum_{1 \leq j < i \leq G} RV_{ij}^{(C)} > c_\alpha^{(C)} \end{aligned}$$

et

$$\text{rejeter } H_0^{*(G)} \text{ si } n \sum_{1 \leq j < i \leq G} \sum_{i \leq j} RV_{ij}^{(R)} > c_\alpha^{(R)}$$

selon le choix de l'un ou l'autre des quatre tests ( $h = \tau, \varrho, C$  et  $R$ ) avec  $c_\alpha^{(h)}$  étant le quantile d'ordre  $1 - \alpha$  de la distribution correspondante:

$$\sum_{1 \leq j < i \leq G} \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{m_j} \left( \frac{\lambda_k^{(i)} \mu_l^{(j)}}{\sqrt{\text{tr}(\Lambda_{jj}^2) \text{tr}(\Lambda_{ii}^2)}} \right) U_{kl,(ij)}^2 \text{ pour } h = \tau,$$

$$\sum_{1 \leq j < i \leq G} \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{m_j} \left( \frac{\lambda_k^{(i)} \mu_l^{(j)}}{\sqrt{\text{tr}(P_{jj}^2) \text{tr}(P_{ii}^2)}} \right) U_{kl,(ij)}^2 \text{ pour } h = \varrho,$$

$$\sum_{1 \leq j < i \leq G} \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{m_j} \left( \frac{\phi_k^{(i)} \varphi_l^{(j)}}{\sqrt{\text{tr}(\Sigma_{jj}^2) \text{tr}(\Sigma_{ii}^2)}} \right) U_{kl,(ij)}^2 \text{ pour } h = C,$$

et

$$\sum_{1 \leq j < i \leq G} \sum_{k=1}^{m_i} \sum_{l=1}^{m_j} \left( \frac{\beta_k^{(i)} \pi_l^{(j)}}{\sqrt{\text{tr}(P_{jj}^2) \text{tr}(P_{ii}^2)}} \right) U_{kl,(ij)}^2 \text{ pour } h = R.$$

Puisque les  $G(G-1)$  variables aléatoires  $nRV_{ij}^{(h)}$ , pour chaque  $h$  fixé,  $h = \tau, \varrho, C, R$ , sont asymptotiquement indépendantes sous  $H_0^*$ , les variables aléatoires  $U_{kl,(ij)}$  pour  $1 \leq j < i \leq G$ ,  $1 \leq k \leq m_i$ ,  $1 \leq l \leq m_j$ , sont indépendantes et de même loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , les coefficients de pondération des lois  $\mathcal{X}_1^2$  qui figurent dans ces quatre distributions sont définies par le théorème 4.3.1. On calcule numériquement les quantités  $c_\alpha^{(h)}$  pour  $h = \tau, \varrho, C, R$ , à l'aide de l'algorithme d'Imhof (1961).

On a  $RV_{ij}^{(h)} \xrightarrow{\mathcal{P}} \rho RV_{ij}^{(h)}$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , pour  $h = \tau, \varrho, C$  et  $R$ ,  $1 \leq j < i \leq G$ . Lorsque l'hypothèse  $H_0^{*(G)}$  est fautive  $\rho RV_{ij}^{(h)} > 0$  pour au moins un couple  $(i,j)$  où

$1 \leq j < i \leq G$ , alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(n \sum_{1 \leq j < i \leq G} \sum_{i \leq k \leq G} RV_{ij}^{(h)} > c_{\alpha}^{(h)}\right) = 1 \text{ pour } h = \tau, \varrho, C \text{ et } R.$$

Les quatre tests proposés sont donc convergents.

#### 4.3.2. Test d'indépendance totale.

Dans cette sous-section, on construit des tests pour l'indépendance totale entre toutes les composantes du vecteur aléatoire  $X$ .

COROLLAIRE 4.3.1.

(1) sous  $H_0^{*(m)}$ , on a

$$\sqrt{n} \left( \sum_{1 \leq j < i \leq m} K_n^{(i,j)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{4}{9}f\right),$$

$$\sqrt{n} \left( \sum_{1 \leq j < i \leq m} S_n^{(i,j)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, f),$$

et si  $X$  admet tous les moments d'ordre 4,

$$\sqrt{n} \left( \sum_{1 \leq j < i \leq m} r_{ij} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, f).$$

(2) Sous  $H_{1:n}^{*(m)}$ , on a

$$\sqrt{n} \left( \sum_{1 \leq j < i \leq m} K_n^{(i,j)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\sum_{1 \leq j < i \leq m} \tau a_{ij}, \frac{4}{9}f\right),$$

$$\sqrt{n} \left( \sum_{1 \leq j < i \leq m} S_n^{(i,j)} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\sum_{1 \leq j < i \leq m} \varrho a_{ij}, f\right),$$

et si  $X$  admet tous les moments d'ordre 4

$$\sqrt{n} \left( \sum_{1 \leq j < i \leq m} r_{ij} \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(\sum_{1 \leq j < i \leq m} R a_{ij}, f\right).$$

**Démonstration:**

Le corollaire 3.4.1 appliqué pour  $G=m$  montre que les variables aléatoires  $\sqrt{n}K_n^{(i,j)}$  sont asymptotiquement indépendantes et normalement distribuées. Sous  $H_0^{*(m)}$ , pour tout couple  $(i,j)$ ,  $\sqrt{n}K_n^{(i,j)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 4/9)$  car  $\Lambda_{ii}=\Lambda_{jj}=1$  et ainsi, la somme des  $f$  variables convergent en loi vers  $\mathcal{N}(0, 4f/9)$ . Sous  $H_{1:n}^{*(m)}$  pour tout couple  $(i,j)$ ,  $\sqrt{n}K_{ij} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\tau a_{ij}, 4/9)$  et ainsi, la somme des  $f$  variables aléatoires indépendantes convergent en loi vers

$$\mathcal{N}\left(\sum_{1 \leq j < i \leq m} \tau a_{ij}, 4f/9\right).$$

Le cas des coefficients Spearman et de corrélation se démontrent de la même manière.

**C.Q.F.D.**

Le corollaire 4.3.1 nous permet de construire des tests asymptotiques pour l'hypothèse d'indépendance totale:  $H_0^{*(m)}$ . Ces tests au niveau asymptotique  $\alpha$  sont donnés par

$$(i) \quad \text{rejeter } H_0^{*(m)} \text{ si } \sqrt{n} \left( \sum_{1 \leq j < i \leq m} K_n^{(i,j)} \right) > c_\alpha^{(\tau)},$$

$$\text{rejeter } H_0^{*(m)} \text{ si } \sqrt{n} \left( \sum_{1 \leq j < i \leq m} S_n^{(i,j)} \right) > c_\alpha^{(\varrho)} = \frac{3}{2} c_\alpha^{(\tau)},$$

et si  $X$  admet tous les moments d'ordre 4,

$$\text{rejeter } H_0^{*(m)} \text{ si } \sqrt{n} \left( \sum_{1 \leq j < i \leq m} r_{ij} \right) > c_\alpha^{(R)} = \frac{3}{2} c_\alpha^{(\tau)}$$

où  $c_\alpha^{(\tau)}$  est le quantile d'ordre  $1-\alpha$  donné par

$$\Phi\left(\frac{3}{2\sqrt{f}} c_\alpha^{(\tau)}\right) = 1 - \alpha$$

et  $\Phi(x)$  étant la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite.

Tout comme au chapitre 2, on peut envisager aussi les tests suivants:

$$(ii) \quad \text{rejeter } H_0^{*(m)} \text{ si } \sqrt{n} \left( \text{Max}_{\{1 \leq j < i \leq m\}} \left( K_n^{(i,j)} \right) \right) > d^{(\tau)},$$

rejeter  $H_0^{*(m)}$  si  $\sqrt{n} \left( \text{Max}_{\{1 \leq j < i \leq m\}} \left( S_n^{(i,j)} \right) \right) > d^{(\theta)} = \frac{3}{2} d^{(\tau)}$ ,

et si X admet tous les moments d'ordre 4,

rejeter  $H_0^{*(m)}$  si  $\sqrt{n} \left( \text{Max}_{\{1 \leq j < i \leq m\}} (r_{ij}) \right) > d^{(R)} = \frac{3}{2} d^{(\tau)}$

où  $d_\alpha^{(\tau)}$  est le quantile d'ordre  $1-\alpha$  donné par

$$\Phi \left( \frac{3}{2} d_\alpha^{(\tau)} \right) = \sqrt{1-\alpha}.$$

Pour tester l'indépendance totale, on peut aussi utiliser le test  $\chi^2$  donné par la partie C du théorème 4.3.1, c'est-à-dire le test basé sur le maximum des  $K_n^{(i,j)^2}$ ,  $S_n^{(i,j)^2}$  ou  $r_{ij}^2$  donné par

rejeter  $H_0^{*(m)}$  si  $n \left( \text{Max}_{\{1 \leq j < i \leq m\}} \left( K_n^{(i,j)^2} \right) \right) > e_\alpha^{(\tau)} = \frac{4}{9} e_\alpha^{(\theta)}$ ,

rejeter  $H_0^{*(m)}$  si  $n \left( \text{Max}_{\{1 \leq j < i \leq m\}} \left( S_n^{(i,j)^2} \right) \right) > e_\alpha^{(\theta)}$ ,

et si X admet tous les moments d'ordre 4,

rejeter  $H_0^{*(m)}$  si  $n \left( \text{Max}_{\{1 \leq j < i \leq m\}} \left( r_{ij}^2 \right) \right) > e_\alpha^{(\theta)}$

où  $e_\alpha^{(\theta)}$  est le quantile d'ordre  $1-\alpha$  donné par

$$P \left( \chi_1^2 \leq e_\alpha^{(\theta)} \right) = \sqrt{1-\alpha}.$$

Ceci résulte du fait que, sous  $H_0^{*(m)}$ , les  $f$  variables aléatoires  $S_n^{(i,j)^2}$  sont asymptotiquement indépendantes et de même loi  $\chi_1^2$ . Il en est de même pour  $K_n^{(i,j)^2}$  et  $r_{ij}^2$  qui suivent respectivement les lois  $4/9\chi_1^2$  et  $\chi_1^2$ .

La partie C du théorème 4.3.1 peut aussi servir pour tester  $H_0^{*(m)}$  et comparer les trois tests entre eux. Comparons par exemple les deux tests asymptotiques  $nK^2$  et  $nS^2$ .

Il est bien connu (voir Puri, Sen & Gokhale (1970), p.290) que si deux statistiques  $T_1$  et  $T_2$  sont, sous  $H_{1:n}^{*(m)}$ , distribuées selon une loi  $\chi^2$  avec le même nombre de degrés de liberté, alors l'efficacité relative asymptotique de  $T_1$  par rapport à  $T_2$  ( $ERA(T_1, T_2)$ ) est égale au rapport entre le paramètre de décentralité de  $T_1$  et celui de  $T_2$ . Ainsi,

$$ERA(nK^2, nS^2) = \frac{\tau\delta^2}{\varrho\delta^2} = \frac{4}{9}$$

car, d'après le lemme 3.3.1, on a

$$\begin{aligned}\tau\delta^2 &= 8^2 \sum_{1 \leq j < i \leq m} \beta_{ij}^2, \\ \varrho\delta^2 &= 12^2 \sum_{1 \leq j < i \leq m} \beta_{ij}^2.\end{aligned}$$

Il est à noter que cette comparaison correspond à une évaluation des performances relatives des deux tests au voisinage de  $H_0^{*(m)}$ . C'est ainsi que le test  $nK^2$  nécessite  $4/9 = 0,44$  fois autant d'observations que le test  $nS^2$  pour atteindre la même puissance pour la suite d'alternatives  $H_{1:n}^{*(m)}$  convergeant vers  $H_0^{*(m)}$ .



## APPENDICE A

---

### A.1. FORMES QUADRATIQUES DE VARIABLES MULTINORMALES

On dit qu'une matrice  $A$ , de dimension  $m \times m$ , admet une décomposition spectrale  $A = \sum_{j=1}^s \lambda_j E_j$ , si  $\lambda_j$  ( $j=1, \dots, s \leq m$ ) sont les valeurs propres distinctes de  $A$  et si les matrices  $E_j$ , de dimension  $m \times m$ , sont définies non-négatives et satisfont  $E_i E_j = O$ , si  $i \neq j$  et  $E_i^2 = E_i$ . Le rang de  $E_j$  est égal à l'ordre de multiplicité  $r_j$  de  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, s$ .

On a alors  $\sum_{j=1}^s E_j = I_m$  où  $I_m$  est la matrice identité de dimension  $m \times m$  et la décomposition spectrale est unique ( voir Ayres, (1973)).

Si  $A$  est symétrique alors il existe une matrice orthonormale  $Q$  ( c'est-à-dire  $QQ' = Q'Q = I_m$  ) dont les colonnes sont les vecteurs propres orthonormés de  $A$  telle que

$$A = Q \Lambda Q' = \sum_{j=1}^s \lambda_j Q A_j Q'$$

avec  $A_j = \sum_{i=r_{j-1}}^{r_j} H_{ii}$ ,  $H_{ii}$  étant la matrice de dimension  $m \times m$  ayant 1 à la position  $(i,i)$  et 0 ailleurs. On a, alors

$$E_j = Q A_j Q' = \sum_{i=r_{j-1}}^{r_j} Q H_{ii} Q' = \sum_{i=r_{j-1}}^{r_j} a_i a_i'$$

où les  $a_i$  sont les vecteurs propres (orthonormés) associés aux valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A$ .

LEMME A.1.1. (Baldessari (1967)) Si  $A$  et  $\Sigma$  sont deux matrices de dimension  $m \times m$ , symétriques et  $\Sigma$  est définie positive, alors  $A\Sigma$  admet la décomposition spectrale

$$A\Sigma = \sum_{j=1}^s \lambda_j E_j = \sum_{j=1}^s \lambda_j \sum_{i=r_{j-1}}^{r_j} a'_i a_i.$$

où les  $a_i$  sont les vecteurs propres (orthonormés) associés aux valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A\Sigma$  de multiplicité  $r_j$  et

$$E_j = \sum_{i=r_{j-1}}^{r_j} a'_i a_i \quad \text{avec } r_0 = 0.$$

THÉORÈME A.1.1. (Baldessari (1967)) Si  $X$  est distribué selon la loi multinormale  $N_m(\mu, \Sigma)$ ,  $\Sigma$  définie positive et  $A$  est une matrice réelle symétrique, alors la forme quadratique  $X'AX$  est distribuée comme

$$\sum_{j=1}^s \lambda_j \chi_{r_j}^2(\delta_j^2)$$

si, et seulement si,  $A\Sigma$  admet la décomposition spectrale  $A\Sigma = \sum_{j=1}^s \lambda_j E_j$ , où les  $\lambda_j$  sont les valeurs propres de  $A\Sigma$  avec l'ordre de multiplicité  $r_j = \text{rang}(E_j)$ ,  $j=1, \dots, s$ ,  $\sum_{j=1}^s r_j = m$  et les  $s$  variables aléatoires  $\chi_{r_j}^2(\delta_j^2)$  sont indépendantes respectivement de  $\chi^2$  avec  $r_j$  degrés de liberté et paramètre de décentralité  $\delta_j^2 = \mu' E_j \Sigma^{-1} \mu$ .

Ce résultat admet une généralisation au cas où  $\Sigma$  est singulière (voir Khatri (1977))

Rappelons que si  $\lambda_k$ ,  $k = 1, \dots, p$  [resp:  $\mu_l$ ,  $l = 1, \dots, q$ ] sont les valeurs propres de la matrice symétrique définie positive  $\mathcal{P}_{11}$  de dimension  $p \times p$  [resp:  $\mathcal{P}_{22}$ :  $q \times q$ ] dont les vecteurs propres orthonormés associés sont  $a_k$  [resp:  $b_l$ ] formant la matrice  $Q_{11}$  [resp:  $Q_{22}$ ] tel que

$$\mathcal{P}_{11} = Q'_{11} \Lambda Q_{11} \quad [\text{resp: } \mathcal{P}_{22} = Q'_{22} M Q_{22}]$$

où  $\Lambda$ :  $p \times p$  [resp:  $M$ :  $q \times q$ ] la matrice diagonale formée des valeurs propres  $\lambda_k$  [resp:  $\mu_l$ ], alors les valeurs propres de  $\mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22}$  sont  $\lambda_k \mu_l$  et la matrice orthonormale formée des vecteurs propres orthonormés,  $a_k \otimes b_l$ , de  $\mathcal{P}_{11} \otimes \mathcal{P}_{22}$  est  $Q = Q_{11} \otimes Q_{22}$  satisfaisant à  $Q'Q = I_{pq}$  car

$$(Q'_{11} \otimes Q'_{22})(Q_{11} \otimes Q_{22}) = (Q'_{11} Q_{11}) \otimes (Q'_{22} Q_{22}) = I_p \otimes I_q = I_{pq}.$$

Si  $e_k, k = 1, \dots, p$  [resp:  $f_l, l = 1, \dots, q$ ] est la base canonique de  $\mathbb{R}^p$  [resp:  $\mathbb{R}^q$ ], alors  $e_k \otimes f_l$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^p \otimes \mathbb{R}^q$ .

## RÉFÉRENCES

---

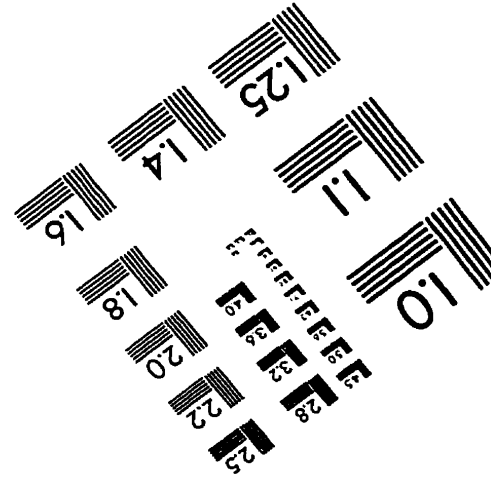
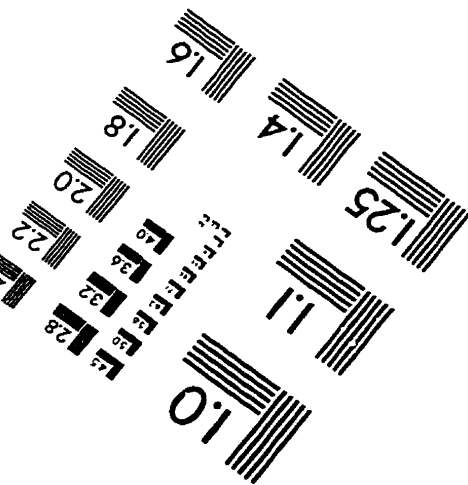
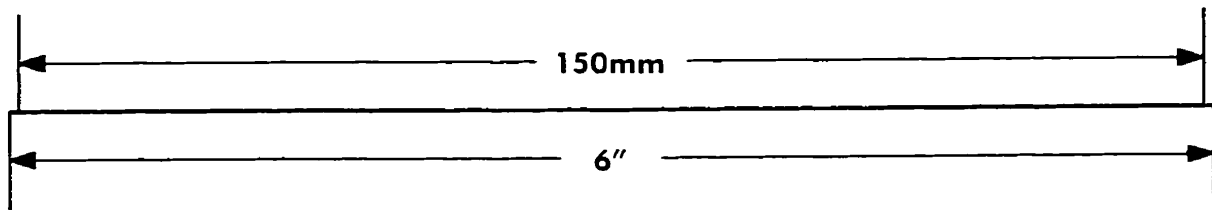
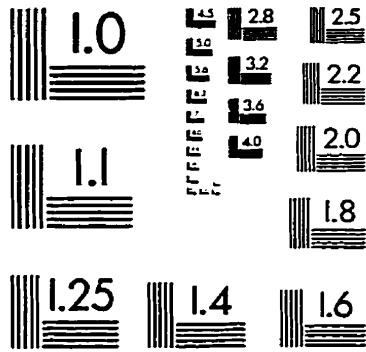
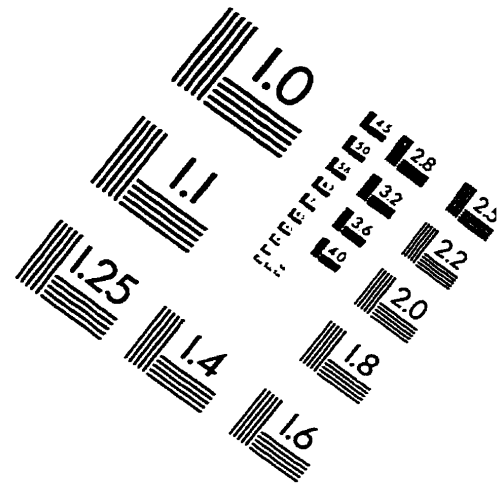
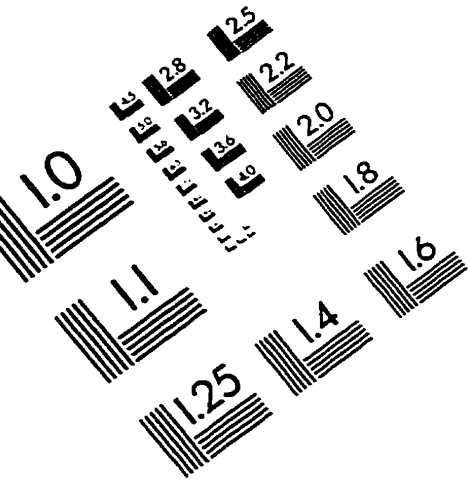
- ALLAIRE, J. & LEPAGE, Y. (1990). Tests de l'absence de liaison entre plusieurs vecteurs aléatoires pour les distributions elliptiques. *Statistique et Analyse des Données*, **15**, 3, 21-46.
- AYRES, F. JR (1973). *Matrices, cours et problèmes* Serie Schaum. McGraw-Hill, New York.
- BALDESSARI, B. (1967). The Distribution of Quadratic Form of Normal Random Variables. *Ann. Math. Statist*, **38**, 1700-1704.
- BELCHAM, P. & HYMANS, R. (1984). IAAF/ATSF Track and Field Statistics Handbook for 1984 Los Angeles Olympic Game. *International Amateur Athletic Federation, London*.
- BHUCHONGKUL. (1964). A Class of Nonparametric Tests for Independence in Bivariate Populations. *Ann. Math. Statist.*, **35**, 138-149.
- BILLINGSLEY, P. (1968). *Convergence of Probability Measures*. John Wiley, New York.
- BISHOP, Y. M.M. FIENBERG, S. E. & HOLLAND, P.W. (1975). *Discrete Multivariate Analysis: Theory and Practice*. MIT Press, Cambridge, England.
- CAMERON, M.A. & EAGLESON, G.K. (1985). A New Procedure for Assessing Large Sets of Correlation. *Austra. J. Statist.*, **27**(1), 84-95.
- CARRIERE, J.F. (1994). A Large Sample Test for one Parameter Families of Copulas. *Commun.Statist.-Theory meth.*, **23**(5), 1311-1317.
- CLÉROUX, R. & DUCHARME, G. (1989). Vector Correlation for Elliptical Distributions. *Commun.Statist.-Theory meth.*, **18**(4),1441-1454.

- CLÉROUX, R., LAZRAQ, A. & LEPAGE, Y. (1995). Vector Correlation Based on Rank and a Nonparametric Test of no Association Between Vectors. *Commun.Statist.-Theory meth.*, 24(3),713-733.
- CONOVER, W.J. & IMAN,R.L.(1980). The Rank Transform as a Method of Discrimination with Some Examples. *Communications in statistics*, A9(5) 465-487.
- CONOVER, W.J. & IMAN,R.L.(1981). Rank Transform as a Bridge Between Parametric and Nonparametric Statistic. *The American Statistician*, 35, 124-133.
- COOK, M.B. (1951). Bivariate k-Statistics and Cumulants of Their Joint Sampling Distribution. *Biometrika*, 38, 179-195.
- CRAMER, E.M. & NICEWANDER, G.R. (1979). Some Symetric Invariant Mesure of Multivariate Association. *Psychometrika*, 49, 403-423.
- DAWKINS, B. (1989). Multivariate Analysis of National Track Records. *The American Statistician*, 43, 110-115.
- EDWARDES, M.D.B. (1993). Kendall's  $\tau$  is equal to correlation for BVE distribution. *Statistics & Probability Letters*, 414-419.
- ESCOUFIER, Y. (1973 ). Le Traitement des variables vectorielles. *Biometrics*, 29, 751-760.
- FANG, K., KOTZ, S. & KAI WANG, N.G. (1990). *Symetric Multivariate and Related Distributions*. Chapman and Hall , New York.
- HÁJEK, J. & SIDÁK, Z. (1967). *Theory of Rank Tests*. Academic Press, New York.
- Hoeffding, W. (1948). A Class of Statistics with Asymptotically Normal Distribution. *Ann. Math. Statist.*, XIX, 293-325.
- IMHOF, P. (1961). Computing the Distribution of Quadratic Forms in Normal Variates. *Biometrika*, 48, 419-426.
- JOAG-DEV, K. (1984). Mesures of Dependence. *Krishnaiah, P. R. & Sen, P.K. eds., Handbook of Statistics*. 4, 79-88.
- JOHNSON, M.E. (1987). *Multivariate Statistical Simulation*. John Wiley, New York.

- KENDALL, M. G. (1962). *Rank Correlation Methods*. 3<sup>rd</sup> edition. London: Griffin.
- KHATRI, C.G. (1977). Quadratic Forms and Extension Of Cochran's Theorem to Normal Vector Variables. *J. Multivariate Analysis*, IV, 79-94.
- KOERTS, J. & ABRAHAMS, A.P.J. (1969). *On the Theory and Application of the General Linear Model*. Rotterdam University Press.
- KONIJN, H.S. (1956). On the Power of Certain Tests of Independence in Bivariate Populations. *Ann. Math. Statist.*, 27, 353-376.
- KRUSKAL, W.H. (1958). Ordinal Measures of Association. *J. Am. Statist. Assoc.*, 53, 814-861.
- LAZRAQ, A., CLÉROUX, R. & KIERS, H.A.L. (1992). Mesures de liaison vectorielle et généralisation de l'analyse canonique. *Rev. Statistique Appliquées*, XXXIX (1), 23-35.
- LAZRAQ, A. & CLÉROUX, R. (1992). Tests d'homogénéité entre indices de redondance pour des lois elliptiques. *Rev. Statistique Appliquées*, XXXX (3), 19-33.
- LAZRAQ, A. & CLÉROUX, R. (1988). Études comparatives de différentes mesures de liaison entre deux vecteurs aléatoires et tests d'indépendance. *Statist. Anal. Données*, 13, 15-18.
- LAZRAQ, A., LEPAGE, Y. & CLÉROUX, R. (1995). Tests Non Paramétriques pour l'indépendance entre plusieurs vecteurs aléatoires. *Pub. Inst. Stat. Univ. Paris*. XXXIX, 3, 57-77.
- LEHMANN, E.L. (1966). Some Concepts of Dependence. *Ann. Math. Statist*, 37, 1137-1153.
- MAGNUS, J. & NEUDECKER, H. (1979). The Commutation Matrix: Some Properties And Applications. *The Annals of Statistics*, 7, 2, 381-394.
- MANOUKIAN, E. B. (1986). *Mathematical Nonparametric Statistics*. Gordon and Breach Science Publishers, New York.
- MUIRHEAD, R.J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. John Wiley, New York.

- MUIRHEAD, R.J. & WATERNAUX, C. (1980). Asymptotic Distribution in Canonical Correlation Analysis and other Multivariate Procedures for Non-normal populations. *Biometrika*, **67**, 31-43.
- NAIK, D. N. & KHATTREE, R. (1996). Revisiting Olympic Track Records: Some Practical Considerations in the Principal Component Analysis. *The American Statistician*, **50**, 2, 140-144.
- PURI, M.L., SEN, P.K. & GOKHALE, D.V. (1970). On a Class of Rank Order Tests for Independence in Multivariate Distributions. *Sankhya*, Serie A, 271-98.
- RANGLES, H.R. & WOLFE, D. A. (1979). *Introduction to The Theory of Nonparametric Statistics*. John Wiley, New York.
- ROBERT, P. & ESCOUFIER, Y. (1976). A Unifying Tool Between Sets of Variables. *Psychometrika*, **30**, 57-71 .
- ROY, R. & CLÉROUX, R. (1993). Vector Cross-Correlation in Time Series and Application. *International Statistical Review*, **61** , 3 , 447- 464.
- SERFLING, R.J. (1980 ). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. John Wiley, New York.
- SIBUYA, M. (1959). Bivariate Extreme Statistics. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **11**, 195-210.
- STEIGER, J.H. & HAKSTIAN, A.R. (1982). The Asymptotic Distribution of a Correlation Matrix: Theory and application. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, **35**, 208-215.
- STEWART, D. & LOVE , W. (1968). A General Canonical Correlation Index. *Psychological Bulletin*, **70**, 160-163.
- WERNER, M., TOLLS, M.EM., HULTIN, J. V. & MELLECKER, J. (1970) Sex and Age Dependence of Serum Calcium, Inorganic Phosphorus, Total Protein and Albumin in a Large Ambulatory Population. *Fifth International Congress on Automation, Advances in Automated Analysis*, **2**, 59-65.

# IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)



**APPLIED IMAGE, Inc**  
1653 East Main Street  
Rochester, NY 14609 USA  
Phone: 716/482-0300  
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved