MAHDOKHT NAGHIBI - BEIDOKHTI

LES TRANSFORMATIONS HARMONIQUES P-VALENTES

Mémoire
présenté
à la Faculté des étude supérieures
de l'Université Laval
pour l'obtention
du grade de Maître ès Sciences (M.Sc.)

Département de Mathématiques et de Statistique
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

Décembre 1998

0-612-38163-3

Résumé

Après un rappel des principaux résultats concernant les transformations harmoniques p-valentes sur un domaine simplement connexe borné, nous présentons dans ce mémoire des résultats originaux concernant les polynômes harmoniques, les transformations harmoniques p-valentes, qui préservent l'orientation, puis les transformations harmoniques p-valentes munies d'une dilatation de Blaschke.

À mon époux
Siamak

Avant-propos

Je tiens à témoigner ma plus vive gratitude à mon directeur de recherche, M. Walter Hengartner, pour sa disponibilité, sa patience et son esprit critique. Sans ce soutien sincère, ce mémoire ne serait certainement pas devenu ce qu'il est maintenant. L'aide financière fournie m'a offert la chance d'étudier au Canada.

Je tiens également à remercier M. Marie-Louis Lavertu, mon co-directeur de recherche, pour ses précieux conseils et pour la correction de ce mémoire.

Je voudrais remercier également Aïcha Rahmani et Saïd El Morchid, pour l'aide qu'ils m'ont apportée et qui fut grandement appréciée. Ma gratitude va également à mes amis Iraniens, en particulier, Fatemeh, Godsi, Ahmad, et Masoud. Ils m'ont soutenu moralement tout au long de mon travail.

J'exprime ma reconnaissance à mes parents, Mehdi Naghibi et Mehri Ghannadan, qui m'ont donné le goût de la recherche et qui m'ont encouragé constamment durant mes études.

J'adresse mes remerciement les plus sincères à mon époux et mon compagnon de vie,Siamak Kalantari, pour sa confiance, sa patience, son soutien constant. Il a suscité mon intérêt pour les études et sans son encouragement, je ne serais pas là aujourd'hui.

Table des matières

chapitre 1

Introduction

Nous commençons le premier paragraphe du deuxième chapitre par une nouvelle caractérisation des transformations harmoniques à l'aide des équations aux dérivées partielles elliptiques d'ordre un. Après, nous introduisons les transformations harmoniques p-valentes dans un domaine D de C et nous terminons ce paragraphe avec un résultat de A.Lyzzaik qui détermine la valence locale d'une transformation harmonique.

Dans le deuxième paragraphe, nous donnons quelques nouvelles propriétés des polynômes harmoniques. En particulier, nous montrons dans le Théorème 2.2.3 qu'il existe des transformations harmoniques qui ne sont pas des polynômes et qui ont la propriété que $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$. Nous utilisons dans la démonstration le fameux théorème de Arakelyan sur l'approximation uniforme analytique. Plusieurs autres propriétés caractéristiques des polynômes analytiques ne restent plus valides pour les polynômes harmoniques. Nous allons donner des bornes inférieures et supérieures optimales concernant la cardinalité de l'ensemble des zéros d'un polynôme harmonique.

Dans le paragraphe trois du chapitre 2, nous étudions les transformations harmoniques p-valentes qui préservent l'orientation. Nous introduisons d'abord la notion d' homéomorphisme faible et nous présentons une démonstration du lemme 2.3.6 qui est un résultat original concernant la valence et le nombre de zéros de la dérivée de la transformée de Clunie et Sheil-Small.

Nous commençons le premier paragraphe du troisième chapitre par la présentation de notions géométriques préliminaires comme par exemple, la définition d'un domaine réglé , d'un point de corné, d'un point de concavité ou d'un point de convexité.

Dans le deuxième paragraphe, nous supposons que la dilatation $a(z)$ admet un prolongement analytique à travers un intervalle J du cercle unité ∂U de sorte que $|a| \equiv 1$ sur J. Le premier résultat principal est le théorème 3.2.2. combiné avec le corollaire 3.2.3 qui s'appliquent aux transformations harmoniques p-valentes. Nous allons montrer que si f est une solution bornée de $\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)} = a(z)\frac{\partial f}{\partial z}(z)$, alors les valeurs de $f^*(e^{it})$ sur J sont déterminées par les valeurs de $a(e^{it})$. Nous montrons en particulier qu'il n'existe aucune solution de cette équation qui représente une transformation harmonique p-valente de U sur un domaine strictement convexe Ω. D'autre part, si $f^*(J)$ est un segment linéaire I, alors f^* relie les deux extrémités de I en sauts.

Dans le troisième paragraphe de ce chapitre, nous supposons que $f^*(e^{it}) \equiv q$ sur un sous-intervalle J de ∂U. Nous présentons une démonstration originale du lemme 3.3.2 qui démontre que l'angle de la direction de la tangente vers l'avant de $\partial\Omega$ et celle de la direction de la tangente vers l'arrière de $\partial\Omega$ existent en chaque point intérieur q de $\partial\Omega \cap f^*(J)$.

Le deuxième résultat principal dans ce paragraphe est le théorème3.3.4 qui donne une estimation optimale pour la variation totale de l'argument de $a(z)$ sur J. En effet, nous obtenons une relation entre l'image inverse $(f^*)^{-1}(q)$ d'un point de la frontière $q \in \partial\Omega$ et la variation de arg $a(e^{it})$ lorsque $f^*(e^{it}) = q$.

L'étude des transformations harmoniques p-valents munies d'une dilatation de Blaschke est poursuivie au prochain paragraphe. Le premiér résultat est le théorème 3.4.3 qui dit que la frontière $\partial\Omega$ contient au plus $2 + \frac{N}{p}$ points de convexité. Plus précisement, nous montrons que le nombre de points de repos complet est égal à N+2p, l'ordre compté.

Dans le théorème 3.5.2, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour un quasihoméomorphisme f^* de ∂U sur $\partial\Omega$, afin que son intégrale de Poisson soit une solution p-valente qui transforme U sur Ω. Ces condtions seront transformées dans le paragraphe suivant en un système d'équations qui sont plus maniables pour la constrution explicite de ces transformations.

Dans le dernier paragraphe, nous commençons avec un lemme qui considère le cas particulier où a(z) est un seul facteur de Blaschke. Nous montrons qu'il existe une solution univalente qui transforme U sur Ω si et seulement si $\partial\Omega$ contient exactement trois points de convexité et nous terminons ce paragraphe en énonçant le théorème 3.7.3 qui est démontré par P.Duren et W.Hengartner dans [DH].

Chapitre 2

Transformations harmoniques p-valentes.

2§1 Transformations harmoniques.

Soit D un domaine du plan complexe $\mathbb{C}$. Une fonction $w = u + iv = f(z)$, $z = x + iy \in D$, est dite une transformation harmonique définie sur D, si les parties réelles et imaginaires de f sont des fonctions harmoniques sur D, i.e., si

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} \equiv 0 \text{ sur } D, \tag{2.1.1}$$

où $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

De (2.1.1) nous déduisons immédiatement que f admet localement la représentation

$$f = h + \bar{g} \tag{2.1.2}$$

où h et g sont des fonctions analytiques (ou multiformes analytiques) sur D. De plus, le Jacobien J_f de la transformation f est donné par

$$J_f = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|^2. \tag{2.1.3}$$

Donc, f préserve l'orientation si et seulement si f n'est pas une constante et si sa (deuxième) dilatation,

$$(21.4) \qquad a(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)},$$

satisfait la condition $|a(z)| < 1$ sur D. Remarquons aussi que dans ce dernier cas, a(z) est une fonction analytique sur D. En effet, l'ensemble des points Z(h',D) où h' s'annule dans D, sont des singularités isolées de a et puisque $|a| < 1$ dans D \ Z(h',D), on déduit que ces singularités sont enlevables. En général, la dilatation a(z) de f est une fonction méromorphe ou on a $a(z) \equiv \infty$ sur D. Notre premier résultat est le lemme suivant.

Lemme 2.1.1 (original). Soit w = f(z) une application de classe C" du domaine D de $\mathbb{C}$ telle que f(D) n'est pas sur une droite. Alors f est une transformation harmonique si et seulement si $\bar{f}$ est une fonction analytique sur D ou bien f est une solution de

$$(2.1.5) \qquad \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)} = a(z)\frac{\partial f}{\partial z}(z)$$

où a(z) est une fonction méromorphe telle que $|a|$ n'est pas identiquement 1.

<u>Démonstration</u>:

a) Si f est une transformation harmonique, alors on a la représentation locale $f = h + \bar{g}$ et donc $a = g'/h'$ est ou bien une fonction méromorphe ou bien $h'(z) \equiv 0$ sur D. Supposons que $|a| \equiv 1$ sur D. Alors il existe un α réel tel que $a \equiv e^{i\alpha}$ et nous obtenons $g' = e^{i\alpha}h'$ et $g = e^{i\alpha}h + p$, où p est une constante. Donc, nous avons

$$f = h + e^{-i\alpha}\bar{h} + \bar{p} = e^{-i\alpha/2}(e^{i\alpha/2}h + e^{-i\alpha/2}\bar{h}) + \bar{p}$$

$$= 2e^{-i\alpha/2}\,\mathrm{Re}(e^{i\alpha/2}h) + \bar{p}$$

ce qui implique que f(D) est sur une droite. Mais ce cas est exclu et nous avons montré la nécessité des conditions.

b) Soit f une solution de (2.1.5). Si $a(z) \equiv \infty$, alors $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}(z) \equiv 0$ sur D et f est une fonction anti-analytique et donc harmonique sur D. D'autre part, le cas où f est une constante est exclu. Supposons maintenant que a(z) est une fonction méromorphe et que f est une solution de (2.1.5). Alors nous avons

$$\text{(2.1.6)} \qquad \overline{\Delta f} = 4\overline{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)} = 4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right)} = a\,\Delta f.$$

Donc, si $|a(z)| \neq 1$, nous avons $\Delta f(z) = 0$. Puisque le cas $|a| \equiv 1$ est exclu, l'ensemble $E = \{ z \in D: |a(z)| = 1\}$ est une réunion dénombrable des courbes analytiques. Finalement, $f \in C''$ et $\Delta f = 0$ sur $D\backslash E$ entraînent que f est harmonique sur D et le lemme est démontré.

Remarques 2.1.2.

1. Il suffit de demander que f appartienne à l'espace de Sobolev $W^{1,2}_{loc}$, parce que la régularité de a implique que les solutions f de (2.1.5) sont de classe C^∞.

2. Si $|a(z)| \equiv 1$, on ne peut pas déduire que f est une transformation harmonique sur D. En effet, $f(z) = e^{-i\alpha/2} z\bar{z}$ est une solution de (2.1.5) avec $a \equiv e^{i\alpha}$.

3. Soit ϕ une transformation conforme (analytique et injective) et soit f une transformation harmonique. Alors $f_1 = f(\phi)$ est une transformation harmonique et elle satisfait l'équation aux dérivées partielles elliptiques

$$\text{(2.1.7)} \qquad \overline{\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}}(z)} = a_1(z)\frac{\partial f_1}{\partial z}(z); \quad a_1(z) = a(\phi(z)).$$

D'autre part, on ne peut pas conclure que $\phi(f)$ est une transformation harmonique. En d'autres mots on peut introduire des domaines standardisés pour les domaines de définition des transformations harmoniques mais pas pour leurs images.

Définition 2.1.3:

1. Soit $w = f(z)$ une fonction définie sur un domaine D de C. Nous notons l'ensemble des zéros de f dans D par $Z(f,D)$ et sa cardinalité, le nombre des zéros de f, par $\# Z(f,D)$. La fonction f est dite p-valente sur D, si pour tout w dans $\Omega = f(D)$, $\# Z(f - w,D)$ ne dépasse pas p et s'il existe un $w_0 \in \Omega$ tel que $\#Z(f - w_0) = p$.

2. Une fonction $w = f(z)$ est dite localement p- valente en $z_0 \in D$, s'il existe un $r_0 > 0$ tel que f est p-valente dans chaque disque

$\{ z: |z - z_0| < r\}, r < r_0$

Remarquons que pour tout $p \in N$, il existe des transformations harmoniques p-valentes qui sont localement univalentes en chaque point de D. En effet, la fonction $f(z) = e^z$ définie sur

$$D = \{z = x + iy : x < 0 \text{ et } |y| < \pi\}$$

en est un tel exemple.
Le résultat suivant est dû à Lyzzaik [L1].

Théorème 2.1.4: Soit f une transformation harmonique définie sur D telle que l'image de chaque continuum (ensemble fermé et connexe contenant plus qu'un point) est un continuum.

1. Si $|a(z)| < 1$, alors f est localement p-valente en $z_0 \in D$, si et seulement si $\frac{d^k h}{dz^k}(z_0) = 0$ pour $1 \leq k < p$, et $\frac{d^p h}{dz^p}(z_0) \neq 0$.

2. Si $|a(z)| > 1$, alors f est localement p-valente en $z_0 \in D$, si et seulement si $\frac{d^k g}{dz^k}(z_0) = 0$ pour $1 \leq k < p$, et $\frac{d^p g}{dz^p}(z_0) \neq 0$.

3. Supposons que $|a(z)| = 1$, $a(z) = a(z_0) + \sum\limits_{k=m}^{\infty} \alpha_k (z-z_0)^k, \alpha_m \neq 0$ et $h(z) = h(z_0) + \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, a_n \neq 0$.

Alors f est localement p-valente en $z_0 \in D$ où $n + m \leq p \leq n + 2m$.

Exemple 2.1.5: Considérons la fonction $f(z) = \bar{z} + z^2/2$. Alors $a(z) = 1/z$. Nous avons $n = m = 1$ pour chaque point du cercle unité. Si $z = i$, alors $p = 2 = n + m$ et pour $z = 1$ nous avons $p = 3 = n + 2m$.

Contrairement au cas des fonctions analytiques, il est possible qu'une transformation harmonique f(z) soit 2-valente dans le disque unité U et que $f^*(e^{it}) = f(e^{it})$ soit un homéomorphisme entre la frontière ∂U et une courbe de Jordan Γ.

Exemple 2.1.6: Considérons la transformation $f(z) = 3z - \bar{z} + z^2 + \bar{z}^2$ et $D = U$. La dilatation est $a(z) = \dfrac{2z-1}{2z+3}$ et on a $|a| < 1$ si $x > -1/2$. Par les figures (2.2) et (2.1) on voit bien que f est 2-valente sur U et univalente sur ∂U.

2§2 Polynômes harmoniques.

Soit $f = h + \bar{g}$ un polynôme harmonique de degré n. Nous donnons dans ce paragraphe des exemples qui montrent que plusieurs propriétés des polynômes analytiques ne sont plus vraies pour les polynômes harmoniques. Nous commençons par étudier le nombre de zéros d'un polynôme harmonique.

Théorème 2.2.1 (original): Il existe des polynômes harmoniques de degré n, $n > 0$, qui ne s'annulent en aucun point de $\mathbb{C}$.

<u>Démonstration</u>: Soit p(z) un polynôme analytique. Alors le polynôme harmonique $f(z) = (1+i)(p(z) + \overline{p(z)}) + 1$ ne s'annule pas. En effet, $\text{Im}(f(z)) = 0$ implique que $\text{Re}(f(z)) = 1$.

L'autre cas extrême est:

Théorème 2.2.2 (original): Il existe des polynômes harmoniques qui s'annulent en une infinité des points de $\mathbb{C}$. Donc, un polynôme harmonique n'est pas nécessairement p-valent sur $\mathbb{C}$.

<u>Démonstration</u>: Le polynôme $p(z) = z + \bar{z} + (z^2 - \bar{z}^2)/2 = 2x(1+iy)$ s'annule sur l'axe imginaire.

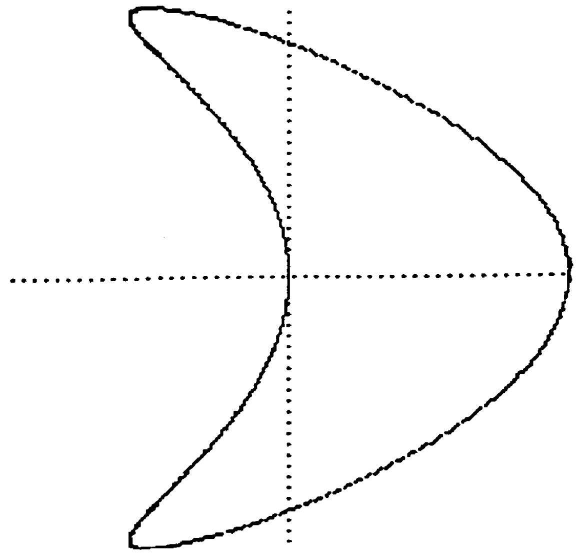

Figure 2.1. Image du cercle unité par f .

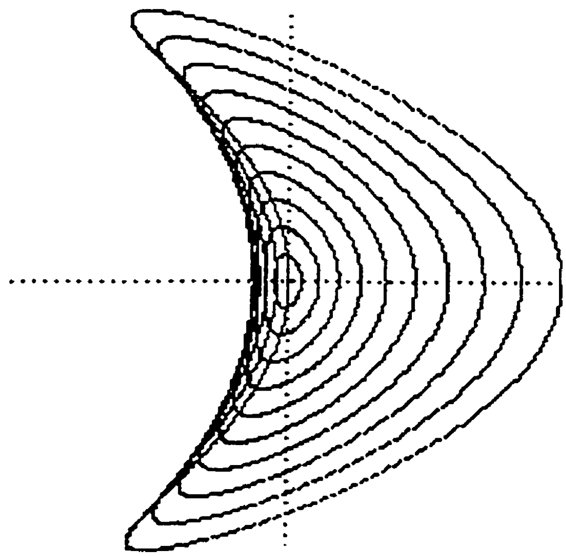

Figure 2.2. Image du disque unité par f .

Avant de donner d'autres résultats sur le nombre de zéros d'un polynôme harmonique, nous montrons qu'une autre caractérisation des polynômes analytiques ne tient plus. Il est bien connu qu'une fonction entière f (analytique sur $\mathbb{C}$) est un polynôme si et seulement si $\lim_{z\to\infty} f(z)$ existe dans $\mathbb{C} \cup \infty$. En particulier, f est un polynôme analytique non constant si et seulement si $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

Théorème 2.2.3 (original):

a) Il existe des polynômes harmoniques telles que $\lim_{z\to\infty} f(z)$ n'existe pas dans $\mathbb{C} \cup \infty$.

b) Il existe des fonctions harmoniques f sur $\mathbb{C}$ qui ne sont pas des polynômes et qui satisfont la propriété $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$.

Démonstration:

a) Nous avons vu que le polynôme $p(z) = z + \bar{z} + (z^2 - \bar{z}^2)/2 = 2x(1+iy)$ s'annule sur l'axe imginaire . D'autre part, nous avons $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Donc, $\lim_{z\to\infty} p(z)$ n'existe pas dans $\mathbb{C} \cup \infty$.

b) Considérons le sous-ensemble fermé $F = \{ z: |x| \geq 1 \} \cup \{ z: x = 0 \}$ de $\mathbb{C}$. Soit $k(z) = z$ si $|x| \geq 1$ et $k(z) = 0$ si $x = 0$. D'après le théorème d'Arakelian sur l'approximation uniforme (voir par exemple [GH]), il existe une fonction entière G(z) (analytique sur $\mathbb{C}$) telle que $\|G-k\|_\infty = \sup_{z\in F} |G(z) - k(z)| < 1$ Donc G n'est pas un polynôme parce que G est borné sur l'axe imaginaire. De plus, nous avons

$|\text{Re } G(z)| > |x| - 1$ si $|x| \geq 1$ et $|\text{Re } G(z)| \geq 0 \geq |x| - 1$ si $|x| \leq 1$. Donc $|\text{Re } G(z)| > |x| - 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Posons $f(z) = \text{Re}(G) + iy$. Alors nous avons

$$|f(z)| \geq \max(|\text{Re } G(z)|, |y|) \geq \tfrac{1}{2}(|\text{Re } G(z)| + |y|) > \tfrac{1}{2}(|x| + |y| - 1)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. Donc, $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

Le théorème suivant montre qu' une autre propriété fondamentale des polynômes analytiques ne tient plus pour les polynômes harmoniques.

Théorème 2.2.4 (original): Il existe des polynômes harmoniques f tels que l'image $f(\mathbb{C}) \neq \mathbb{C}$.

<u>Démonstration</u>: Le polynôme harmonique $f(z) = (1+i)(p(z) + \overline{p(z)}) + 1$ du théorème 2.2.1 omet les deux demi-plans $\{w = u+iv: u - v > 1\}$ et $\{w = u+iv: u - v < 1\}$. De plus, le polynôme harmonique $p(z) = z + \bar{z} + (z^2 - \bar{z}^2)/2 = 2x(1+iy)$ omet l'axe imaginaire moins l'origine.

Remarquons qu'il n'y aucun polynôme harmonique qui omet un seul demi-plan. En effet, en appliquant une rotation et une translation appropriées à l'image $f(\mathbb{C})$, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que le demi-plan à droite, $\{w: \operatorname{Re} w > 0\}$ est omis. Puisque Re f est dans ce cas borné nous déduisons que Re f est une constante et donc $f(\mathbb{C})$ est sur une droite et omet deux demi-plans.

Pour un polynôme harmonique, la (deuxième) dilatation $a(z) = g'(z)/h'(z)$ est une fonction rationnelle ou $a \equiv \infty$. Donc, la valeur de $a(\infty)$ est bien définie. Dans tous les exemples que nous avons donnés ci-dessus, nous avons eu $|a(\infty)| = 1$. La situation change complètement si $|a(\infty)| \neq 1$. Sans perte de généralité nous pouvons supposer que $|a(\infty)| < 1$. En effet, sinon, considérons le polynôme $\overline{p}$. Dans ce cas il existe un $R > 0$ tel que $|a| \leq k < 1$ sur $\Delta_R = \{ z: |z| > R\}$. En d'autres mots, nous pouvons supposer que f est K-quasirégulière sur Δ_R où $K = \sup\limits_{|z|>R} \frac{1+|a|}{1-|a|}$, et f préserve l'orientation. Rappellons qu'une fonction f qui est quasirégulière sur un domaine D peut être représentée par

$$(2.2.1) \qquad f(z) = A(\psi(z))$$

où ψ est un homéomorphisme sur D qui préserve l'orientation et A est une fonction analytique définie sur $\psi(D)$. Il s'ensuit que la classification des sigularités isolées est la même que celle pour les fonctions analytiques et que le principe d'argument reste valide pour les transformations harmoniques qui préservent l'orientation. En particulier nous avons:

Théorème 2.2.5 (original): Soit f une transformation harmonique telle que $|a(\infty)| \neq 1$. Alors f est un polynôme si et seulemnt si $\lim_{z \to \infty} f(z)$ existe dans $\mathbb{C} \cup \infty$. De plus, le polynôme est une constante si et seulement si la limite est finie.

Remarque 2.2.6 : Il est possible que $|a(\infty)| = 1$ et que $\lim_{z \to \infty} p(z) = \infty$. En effet, considérons le polynôme harmonique $p(z) = (z^2 - \bar{z}^2)/2 + (1+i)z = x\text{-}y + i(2xy + x + y)$. Alors p est 2-valente, $p(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, et $\lim_{z \to \infty} p(z) = \infty$. Nous avons $a(z) = -z/(z+1+i)$. Donc $|a| = 1$ sur la droite $y = -1 - x$ et $p(x,-1-x) = 1 + 2x - i(2x^2 + 2x + 1)$.

Revenons au problème du nombre de zéros d'un polynôme harmonique p(z). Notons par $Z(f,\mathbb{C})$ l'ensemble des zéros d'une fonction f et par $\# Z(f,\mathbb{C})$ sa cardinalité, multiplicité comptée. Le résultat suivant donne une borne supérieure de $\# Z(p,\mathbb{C})$ d'un polynôme harmonique p et il est dû à [W] et [BHS].

Théorème 2.2.7: Soit p(z) un polynôme harmonique avec $|a(\infty)| \neq 1$. Alors p admet au plus n^2 zéros, multiplicité comptée. La borne n^2 est la meilleure possible.

Avant d'énoncer le prochain resultat qui concerne la borne inférieure de $\# Z(p,\mathbb{C})$, nous démontrons un lemme qui utilise le principe d'argument.

Lemme 2.2.8 (original): Soit f(z) un polynôme harmonique de degré n avec $|a(\infty)| < 1$ et soit $K = \{z \in D: |a(z)| \geq 1\}$. si $0 \in f(K^o)$, alors le nombre de zéros de f, multiplicité comptée, est plus grand que n.

<u>Démonstration</u>: Soit $0 \in f(K^o)$, alors il existe un cycle Γ dans Ω assez proche de $\partial\Omega$, tel que $\oint_\Gamma d\arg(f) < 0$. En appliquant le principe d'argument pour le domaine G borné par Γ et le cercle $\{z: |z| = R\}$, nous déduisons que le nombre de zéros de p dans G est plus grand que n et le lemme est démontré.

Notre résultat principal de ce paragraphe est le suivant:

Théorème 2.2.9 (original): Soit $f(z)$ un polynôme harmonique de degré n avec $|a(\infty)| \neq 1$. Alors f est p-valente avec $n \leq p \leq n^2$. La borne inférieure $p = n$ est atteinte si et seulement si le polynôme est de la forme

(2.2.3) $$f(z) = p(z) + b\overline{p(z)},\ |b| \neq 1.$$

<u>Démonstration</u>: Sans perte de généralité on peut supposer que $|a(\infty)| < 1$. La conclusion $p \leq n^2$ suit du théorème 2.2.7. Soit $K = \{z : |a(z)| \geq 1\}$.

Si K est vide, alors $|a| < 1$ sur $\mathbb{C}$ et $a(z)$ est donc une constante. Puisque la (deuxième) dilatation de $f_1(z) = \dfrac{f(z)-\overline{af(z)}}{1-|a|^2}$ est $a_1(z) \equiv 0$, nous concluons que $f_1(z)$ est un polynôme analytique de degré n qui admet exactement n zéros, multiplicité comptée. Finalement, on obtient f par la transformation affine $f(z) = f_1(z) + \overline{af_1(z)}$ qui est de la forme (2.2.3). D'autre part, si f est de la forme (2.2.3), alors
$\# Z(f-w,D) = n$ pour tout $w \in \mathbb{C}$.

Supposons maintenant que K n'est pas vide. En appliquant le principe du module maximum pour les fonctions analytiques nous déduisons qu'il existe un $w \in K^o$ tel que $a(w) = \infty$. D'après le lemme précédent f-w contient au moins n+1 zéros. Donc, f est p-valente avec $p > n$ et le théorème est établi, ainsi que le lemme.

Nous terminons ce paragraphe par l'énoncé de deux problèmes ouverts.

Problèmes ouverts:

1. Soit $p(z)$ un polynôme analytique de degré $n > 1$. Donner la meilleure borne supérieure pour le nombre de zéros de $f(z) = p(z) - \bar{z}$. T.Sheil-Small a émis la conjecture que $\# Z(f,\mathbb{C}) \leq 3n - 2$.

2. Soit f une transformation harmonique sur $\mathbb{C}$. Si f est p-valente, est-ce qu'on peut conclure que f est un polynôme? La réponse est affirmative dans le cas où la limite $a(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} a(z)$ existe et $|a(\infty)| \neq 1$.

2§3 Transformations harmoniques p-valentes qui préservent l'orientation.

Rappelons (voir ci-dessus) qu'une transformation harmonique f préserve l'orientation sur un domaine D si son Jacobien $J_f \geq 0$ et J_f n'est pas identiquement 0 sur D. En d'autres mots, le lemme 2.1.1 nous dit que f préserve l'orientation sur D si et seulement si f est une solution non-constante du système d'équations aux dérivées partielles elliptiques (2.1.5)

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)} = a(z)\frac{\partial f}{\partial z}(z)$$

où $a(z)$ est une fonction analytique dans D ayant la propriété $|a(z)| < 1$ pour tout $z \in D$. Nous avons aussi mentionné qu'une telle transformation est une fonction quasirégulière sur D et qu'elle peut être représentée par

$$f(z) = A(\psi(z)) \tag{2.3.1}$$

où ψ est un homéomorphisme défini sur D qui préserve l'orientation et où A est une fonction analytique définie sur $\psi(D)$. Donc, du point de vue topologique, les transformations harmoniques qui préservent l'orientation se comportent comme des fonctions analytiques. Leurs zéros sont isolés (On peut parler de l'ordre d'un zéro de f) et le principe d'argument reste valide. Contrairement au cas des transformations harmoniques univalentes, une transformation harmonique p-valente, $p > 1$, ne préserve pas nécessairement l'orientation. Ainsi, par exemple, le polynôme $p(z) = z + \bar{z}^2$ est 4-valent sur $D = \{z: |z| < 2\}$ mais il ne préserve pas l'orientation sur D.

Définition 2.3.1: Soit Ω un domaine de Jordan simplement connexe de $\mathbb{C}$ et soit ϕ une transformation conforme du disque unité U sur Ω. Notons que ϕ admet une extension sur le disque fermé $\overline{U}$ qui est un homéomorphisme de $\overline{U}$ sur $\overline{\Omega}$. Nous disons qu'une fonction $f^*(e^{it})$ du cercle unité ∂U sur $\partial\Omega$ est un homéomorphisme faible de ∂U sur $\partial\Omega$, qui préserve l'orientation, si

$$(2.3.2) \qquad \vartheta(t) = \arg\left(\phi^{-1} \circ f^*(e^{it})\right)$$

est une fonction continue non décroissante sur $[0,2\pi]$ telle que $\vartheta(2\pi) = \vartheta(0) + 2\pi$. En d'autres mots, f^* est un homéomorphisme faible du cercle unité ∂U sur $\partial\Omega$, si et seulement si f^* est une fonction continue de ∂U sur $\partial\Omega$ et est la limite simple d'une suite d'homéomorphismes de ∂U sur $\partial\Omega$.

Le prochain résultat est dû à H. Kneser [K].

Théorème 2.3.2. Soit Ω un domaine de Jordan simplement connexe de $\mathbb{C}$ et soit f^* un homéomorphisme de ∂U sur $\partial\Omega$. Alors la solution du problème de Dirichlet (l'intégrale de Poisson) est une transformation harmonique et univalente de U sur Ω si et seulement si $f(U) \subset \Omega$.

Remarques 2.3.3.

1. Chaque extension continue f de f^*, de ∂U dans U possède la propriété que $f(U) \supset \Omega$. Donc, la condition $f(U) \subset \Omega$ est équivalente à la condition $f(U) = \Omega$.

2. Si Ω est un domaine convexe, alors l'intégrale de Poisson f de f^* possède la propriété $f(U) \subset \Omega$ parce que la mesure harmonique est une mesure de probabilité. Donc, dans ce cas, f devient automatiquement univalente. Ce résultat a été démontré indépendantement (plus tard) par G. Choquet [C1].

3. Le théorème de Kneser ne tient pas pour les domaines non bornés. En effet, considérons $\Omega = \{w\colon \operatorname{Re} w < 1\}$, $s = \sigma + i\tau = \dfrac{2z}{1+z}$, $F(s) = s + \bar{s} + (s^2 - \bar{s}^2)/2 = 2\sigma(1 + i\tau)$ et $f(z) = F(s(z))$. Alors f^* est un homéomorphisme de ∂U sur $\partial\Omega \cup \infty$ qui préserve l'orientation, $f(U) = \Omega$ et f n'est pas injective.

4. P.Duren et W.Hengartner [DH] ont montré que le théorème de Kneser peut être modifié pour les domaines de Jordan de connectivité finie et des homéomorphismes faibles f^*.

Dans le reste de ce travail, nous allons étudier des transformations harmoniques p-valentes du disque unité sur des domaines de Jordan simplement connexes.

Définition 2.3.4:
1. Soit Ω un domaine de Jordan de $\mathbb{C}$, et soit ϕ une transformation conforme du disque unité U sur Ω. Nous disons qu'une application p-valente $f^*(e^{it})$ du cercle unité ∂U sur $\partial\Omega$ est <u>localement un homéomorphisme faible</u> de ∂U sur $\partial\Omega$, qui préserve l'orientation, si (1.3.2)

$$\vartheta(t) = \arg\,(\phi^{-1} \circ f^*(e^{it}))$$

est une fonction continue non décroissante sur $[0,2\pi]$, telle que $\vartheta(2\pi) = \vartheta(0) + 2\pi p$.

2. Si, de plus, la (deuxième) dilatation $a(z)$ de la solution f du problème de Dirichlet possède la propriété $|a| < 1$ sur U, alors nous disons que f est une <u>transformation harmonique p-valente de U sur Ω</u> qui préserve l'orientation.

Remarques 2.3.5.

1. Puisque $|a| < 1$ sur U, le principe d'argument s'applique et nous avons pour tout $w \in \Omega$ donné

$$(2.3.4) \qquad 2\pi p = \oint_{|z|=r} d\arg(f-w) = \oint_{|z|=r} d\arg(df) = \oint_{|z|=r} d\arg(h'dz - \overline{gdz})$$

$$= \oint_{|z|=r} d\arg(h'dz) + \oint_{|z|=r} d\arg(1 + a\frac{\overline{h'dz}}{h'dz}) = \oint_{|z|=r} d\arg(h'dz)$$

$$= 2\pi + \oint_{|z|=r} d\arg(h') = 2\pi(1 + \# Z(h',U))$$

$$= 2\pi + \oint_{|z|=r} d\arg(h') + \oint_{|z|=r} d\arg(1-a)$$

$$= 2\pi + \oint_{|z|=r} d\arg(h'-g') = 2\pi(1 + \# Z(h' - g',U))$$

où r, $0 < r < 1$, est assez proche de 1. Une fois de plus, $\# Z(f,D)$ signifie le nombre de zéros de f dans D, multiplicité comptée. Donc,

$$(2.3.5) \qquad \oint_{|z|=r} d\arg(f-w) = \oint_{|z|=r} d\arg(df) = 2\pi(1 + \# Z(h' - g',U)) = 2\pi p,$$

pour tout $w \in \Omega$.

2. Notons que nous n'avons pas remplacé la condition $|a| < 1$ sur U par la condition de Kneser $f(U) \subset \Omega$.

Lemme2.3.6 (original): Soit Ω un domaine de Jordan <u>convexe</u> et soit f^* une application p-valente qui est localement un homéomorphisme faible de ∂U sur $\partial\Omega$. Soit $f = h + \overline{g}$ la solution du problème de Dirichlet. Alors la transformée de Clunie et Sheil-Small [CS]:

$$(2.3.6) \qquad \phi_\alpha(z) = e^{i\alpha}h(z) - e^{-i\alpha}\overline{g(z)}$$

est n-valente, $2 \le n \le p$ et le nombre de zéros de ϕ_α' est $\# Z(\phi_\alpha') = p-1$, multiplicité comptée, pour tout α réel.

<u>Démonstration</u>: Nous avons

$$(2.3.7) \qquad \operatorname{Im} e^{i\alpha}f(z) \equiv \operatorname{Im} \phi_\alpha(z).$$

Chaque maximum (resp. minimum) local de Im $\phi_\alpha(e^{it})$ est un maximum (resp. minimum) local de Im $e^{i\alpha}f^*(e^{it})$. Ces maxima (resp. minima) sont atteints en p points. Donc, $\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Im}\,\phi_\alpha(e^{it})$ change 2p fois le signe et puisque $\phi_\alpha(U)$ est un domaine, nous déduisons du principe d'argument appliqué à ϕ_α - w et à $iz\phi_\alpha'$ que ϕ_α est n-valente, $2 \leq n \leq p$, et que $Z(\phi_\alpha, U) = p - 1$, multiciplité comptée, pour tout α réel.

Chapitre 3

Transformations harmoniques p-valentes munies d'une dilatation de Blaschke.

3§1 Notions géométriques préliminaires.

Dans ce chapitre, nous introduisons plusieurs notions géométriques. La première définition est dûe à C.Pommerenke [P].

Définition 3.1.1.

1. Nous disons que $\beta(\tau)$ est une fonction réglée sur l'intervalle (a,b) si les limites à droite et à gauche,

$$(3.1.1) \qquad \beta(\tau+0) = \lim_{\sigma\downarrow\tau} \beta(\sigma) \text{ et } \beta(\tau-0) = \lim_{\sigma\uparrow\tau} \beta(\sigma),$$

existent pour tout $\tau \in (a,b)$.

2. Nous disons qu'une courbe fermée Γ de $\mathbb{C}$ est réglée si elle admet une représentation paramétrique localement injective, $\Gamma = \{w(t),\ a \le t \le b\}$, telle que pour chaque $q = w(\tau)$, l'angle de la direction de la tangente vers l'avant de Γ en $w(\tau)$,

$$(3.1.2) \qquad \beta(q) = \beta_R(q) = \lim_{\sigma\downarrow\tau} \arg[w(\sigma)-w(\tau)] = \lim_{\sigma\downarrow\tau} \arg[w(\sigma)-q]$$

existe et définit une fonction réglée.

3. Soit Ω un domaine de Jordan simplement connexe et soit ϕ une transformation analytique et univalente (conforme) de U sur Ω. Alors Ω est dit un domaine réglé si $\Gamma = \partial\Omega = \phi(\partial U)$ est une courbe réglée.

Dieudonné [P] a montré que $\beta(\tau)$ est une fonction réglée si et seulement si elle peut être approchée uniformément par des fonctions en escalier. De plus, nous avons $\beta(\tau+0) = \beta(\tau-0)$ hors d'un ensemble dénombrable des τ. De plus, si Ω est un domaine de Jordan réglé, alors $\beta_L(q) - \pi$ est la direction de la tangente vers l'arrière en $q = w(\tau)$ et chaque point $q \in \partial\Omega$ possède une tangente hors d'un ensemble dénombrable qui est formé par des points dont l'angle d'ouverture $\alpha(q)$ vu de l'intérieur du domaine n'est pas π.

Définition 3.1.2. Soit Ω un domaine réglé. Nous disons qu'un point $q \in \partial\Omega$ est un <u>corné</u> en q, si l'angle d'ouverture $\alpha(q)$ vu de l'intérieur du domaine, est zéro.

Définition 3.1.3. Soit Ω un domaine de Jordan simplement connexe de $\mathbb{C}$. Nous disons qu'un point $q \in \partial\Omega$ est un <u>point de concavité</u> (par rapport à Ω) s'il existe un segment linéaire L qui contient q comme point intérieur tel que $L \setminus \{q\}$ est dans Ω. D'autre part, nous disons qu'un point $q \in \partial\Omega$ est un <u>point de convexité</u> (par rapport à Ω) s'il existe un segment linéaire L qui contient q comme point intérieur tel que $L \setminus \{q\}$ est dans l'extérieur de Ω.

Remarques 3.1.4.

(a) La frontière d'un domaine convexe borné ne contient aucun point de concavité et $q \in \partial\Omega$ est un point de convexité si et seulement si q est un point extrême de $\overline{\Omega}$.

(b) Soit Ω le quadrilatère dont les sommets sont $w_1 = 1$, $w_2 = i$, $w_3 = -1$ et $w_4 = i/2$. Alors $q = i/2$ est le seul point de concavité dans $\partial\Omega$ et les points de convexité sont les trois points $q = 1$, $q = i$ et $q = -1$.

(c) Il n'existe aucun domaine de Jordan simplement connexe (donc borné) dont la frontière ne contient que des points de concavités. Il y a au moins 3 points de convexité.

3§2 Le cas $|a| = 1$ sur un intervalle J de ∂U.

Dans ce paragraphe, nous supposons que la dilatation $a(z)$ admet un prolongement analytique à travers un intervalle J du cercle unité ∂U de sorte que $|a| \equiv 1$ sur J. Si f est une solution bornée de (2.1.5)

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)} = a(z)\frac{\partial f}{\partial z}(z),$$

alors les valeurs de $f^*(e^{it})$ sur J sont déterminées par les valeurs de $a(e^{it})$. Plus précisément, nous allons montrer que

(3.2.1) $\quad \arg df^*(e^{it}) = -\frac{1}{2} \arg a(e^{it}) \bmod \pi \; f^*\text{-a.e. sur } J.$

Notre premier lemme est dû à [AL].

Lemme 3.2.1. Soit $f^* \in L^1(\partial U)$ une fonction à variation bornée sur un intervalle J de ∂U et soit $f = h + \bar{g}$ l'intégrale de Poisson de f^*. Alors les limites non tangentielles de h' et g' existent et sont finies pour presque tous les $e^{it} \in J$. En particulier, nous avons pour tout $p > 0$:

(3.2.2) $\quad \lim_{r \to 1} (1-r)^p h'(re^{it}) = 0$ a.e. sur ∂U.

En utilisant ce lemme, Bshouty et Hengartner [BH] ont démontré le résultat suivant.

Théorème 3.2.2 (partiellement original). Soit $a(z) \in H(U)$, $|a| < 1$ dans U et supposons que $a(z)$ admet un prolongement analytique à travers l'intervalle $J = \{e^{it}, \gamma < t < \delta\}$, $\gamma < \delta < \gamma + 2\pi$, et que $|a| \equiv 1$ dans J. Soit $f(z)$ une solution bornée de $\overline{f_{\bar{z}}} = af_z$ telle que $f^*(e^{it})$ est à variation bornée sur J. Alors, on a pour les limites radiales $f^*(e^{it})$

(3.2.3) $\quad f^*(e^{it}) - \overline{a(e^{it})f^*(e^{it})} + \overline{\int^t f^*(e^{it})da(e^{it})} = \text{const.}$

presque partout sur J. De plus, si f est une transformation p-valente de U sur un domaine de Jordan Ω, alors en remplaçant $f^*(e^{it})$ par les points d'accumulation de f en e^{it}, (3.2.3) est valide en chaque point de

J. En d'autres mots, (3.2.3) reste vrai pour chaque valeur approchée de f lorsque z tend vers $e^{it} \in J$.

Démonstration: La première conclusion est démontrée dans [BH, Théorème 2.2 et Remarque 2.3]. Supposons donc que f est une transformation p-valente de U sur un domaine de Jordan Ω. D'après Hengartner et Schober [HS3, Lemme 3.1], on a les propriétés suivantes:

(a) La limite $\lim_{z \to e^{it}} f(z) = f^*(e^{it})$ existe et elle se trouve sur $\partial\Omega$ pour tout $e^{it} \in \partial U \setminus E$ où E est un ensemble dénombrable.

(b) Si $e^{it} \in E$, alors l'ensemble des points d'accumulation de f en e^{it} est un segment linéaire dans $\overline{\Omega}$ qui joint deux points de $\partial\Omega$.

En particulier, à part des sauts, $f^*(e^{it})$ est une fonction continue sur J. Donc (3.2.3) reste valide partout sur J.

La relation (3.2.3) peut être exprimée sous forme différentielle

(3.2.4) $$df^*(e^{it}) - \overline{a(e^{it})df^*(e^{it})} = 0; \; f^*\text{-a.e. sur } J$$

ou d'une manière équivalente, par

(3.2.5) $$\operatorname{Im} \sqrt{a(e^{it})}\, df^*(e^{it}) = 0; \; f^*\text{-a.e. sur } J.$$

Si $df^*(e^{it}) \neq 0$, nous avons

(3.2.6) $$\arg df^*(e^{it}) = -\tfrac{1}{2} \arg a(e^{it}) \mod \pi.$$

Le corollaire suivant est démontré dans [BH,Corollaire 2.5], pour les transformations harmoniques univalentes. La même démonstration tient aussi pour les transformations harmoniques p-valentes de U sur Ω.

Corollaire 3.2.3. Soit a comme dans le théorème 3.2.2 et soit f une solution p-valente de (2.1.5) qui transforme U sur un domaine de Jordan Ω. Soit e^{it} un point intérieur de J.

(a) Si f^* admet un saut en e^{it} (ce qui arrive si et seulement si $f^*(J)$ contient un segment linéaire), alors nous avons

$$\arg\,[f^*(e^{i(t+0)}) - f^*(e^{i(t-0)})] = -\tfrac{1}{2}\arg a(e^{it}) \bmod \pi. \tag{3.2.7}$$

(b) Si f^* est continue en e^{it}, alors

$$\lim_{h\to 0}\ \mathrm{Im}\{\sqrt{a(e^{it})}\,[f^*(e^{it+h})-f^*(e^{it})]/h\} = 0. \tag{3.2.8}$$

(c) Si f^* n'est pas une constante sur l'intervalle $[t,t+\delta]$, $\delta > 0$, alors la limite à droite

$$\begin{aligned}\psi_R(t) &= \lim_{h\downarrow 0}\ \arg\,[f^*(e^{i(t+h)}) - f^*(e^{i(t-0)})] \\ &= -\tfrac{1}{2}\arg a(e^{it}) \bmod \pi\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

existe en $e^{it} \in J$. De même, si f^* n'est pas une constante sur l'intervalle $[t-\delta,t]$, $\delta > 0$, la limite à gauche

$$\begin{aligned}\psi_L(t) &= \lim_{h\downarrow 0}\ \arg\,[f^*(e^{i(t+0)}) - f^*(e^{i(t-h)})] \\ &= -\tfrac{1}{2}\arg a(e^{it}) \bmod \pi\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

existe en $e^{it} \in J$.

Remarques 3.2.4.

1. Soit a comme dans le théorème 3.2.2 et soit f une solution bornée de (2.1.5). Il n'existe aucun sous-intervalle ouvert non vide J_1 de J tel que tous les points $f^*(e^{it})$ soient des points de convexité. En particulier, il n'existe aucune solution de (2.1.5) qui est une transformation harmonique p-valente de U sur un domaine strictement convexe Ω. D'autre part, si $f^*(J)$ contient un segment linéaire I, alors f^* relie les deux extrémités de I en sauts.

2. R.Laugesen [L2] a montré que le corollaire 3.2.3 ne tient plus si on remplace l'analyticité de a(z) sur J et la condition $|a(e^{it})| \equiv 1$ sur J par $|a(e^{it})| = 1$ a.e. sur J.

3§3 L'image inverse d'un point de la frontière de Ω.

Dans ce paragraphe, nous étudions l'image inverse $(f^*)^{-1}$ q, d'un point $q \in \partial\Omega$.

Définition 3.3.1. Soit Ω un domaine de Jordan simplement connexe et soit f une transformation harmonique p-valente de U sur Ω préservant l'orientation. Fixons $q \in \partial\Omega$. Supposons que $f^*(e^{it})$ est localement un homéomorphisme faible de ∂U sur $\partial\Omega$, qui préserve l'orientation. Alors $(f^*)^{-1}(q)$ est la réunion de p sous-intervalles fermés mutuellement disjoints de ∂U,

$$(f^*)^{-1}(q) = \bigcup_{k=1}^{p} J_k(q)$$

où $J_k(q) = \{e^{it},\ \gamma_k(q) \le t \le \delta_k(q)\}$.

Les relations (3.2.9) et (3.2.10), nous donnent immédiatement la conclusion suivante:

Lemme 3.3.2 (original). Soit Ω un domaine de Jordan simplement connexe et soit f une transformation harmonique p-valente de U sur Ω préservant l'orientation (donc $|a| < 1$ sur U). Supposons que $f^*(e^{it})$ est localement un homéomorphisme faible de ∂U sur $\partial\Omega$ (qui préserve l'orientation) et que a(z) admet un prolongement analytique à travers l'intervalle ouvert J du cercle unité ∂U et que $|a| \equiv 1$ dans J. Si $J_k(q) \subset$ J, or on a

$$\beta(q) = \beta_R(q) = \lim_{h\downarrow 0} \arg\left[f^*(e^{i(\delta_k(q)+h)}) - f^*(e^{i(\delta_k(q)-0)})\right] \tag{3.3.1}$$

$$= -\frac{1}{2}\arg a(e^{i\delta_k(q)}) \mod \pi$$

et

$$\beta_L(q) = \lim_{h\uparrow 0} \arg\left[f^*(e^{i(\gamma_k(q)+0)}) - f^*(e^{i(\gamma_k(q)-h)})\right] \tag{3.3.2}$$

$$= -\frac{1}{2}\arg a(e^{i\gamma_k(q)}) \mod \pi$$

Remarque 3.3.3. Du point de vue géométrique, les relations (3.3.1) et (3.3.2) disent que l'angle de la direction de la tangente vers l'avant de $\partial\Omega$

$$\lim_{\sigma\downarrow\tau} \arg[w(\sigma) - w(\tau)] = \lim_{\sigma\downarrow\tau} \arg[w(\sigma) - q]$$

et celle de la direction de la tangente vers l'arrière de $\partial\Omega$

$$\lim_{\sigma\uparrow\tau} \arg[w(\sigma) - w(\tau)] = \lim_{\sigma\uparrow\tau} \arg[w(\sigma) - q]$$

existent en chaque point intérieur q de $\partial\Omega \cap f^*(J)$.

Maintenant, nous allons démontrer notre résultat principal de ce paragraphe. Nous allons suivre les arguments donnés dans [BH] en les simplifiant substantiellement.

Soit Ω un domaine de Jordan simplement connexe et soit f une transformation harmonique p-valente de U sur Ω préservant l'orientation. Supposons que $f^*(e^{it})$ est localement un homéomorphisme faible de ∂U sur $\partial\Omega$ et que a(z) admet un prolongement analytique à travers l'intervalle ouvert J du cercle unité ∂U et que $|a| \equiv 1$ sur J. Suposons que $J_k(q) = \{e^{is}, \gamma(q) \le s \le \delta(q)\} \subset J$ pour au moins un k, $1 \le k \le p$ et que $\gamma_k(q) < \delta_k(q)$. Dans ce cas, $f = h + \bar{g}$ admet un prolongement harmonique à travers l'intervalle ouvert $J_k(q)$. Donc, h et g admettent des prolongements analytiques à travers $J_k(q)$. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial r}(e^{it}) = e^{it}\, h'(e^{it}) + \overline{e^{it} g'(e^{it})} = 2\, e^{it}\, h'(e^{it}) \text{ et}$$

$$a(e^{it}) = \frac{e^{it} g'(e^{it})}{e^{it} h'(e^{it})} = \frac{\overline{e^{it} h'(e^{it})}}{e^{it} h'(e^{it})} = \frac{\overline{\partial f(e^{it}) / \partial r}}{\partial f(e^{it}) / \partial r}$$

sur $J_k(q) \setminus Z(h',U)$. En d'autres mots, nous obtenons

$$\text{(3.3.3)} \quad \arg \frac{\partial f}{\partial r}(e^{it}) = -\tfrac{1}{2} \arg a(e^{it}) \bmod \pi \text{ sur } J_k(q) \setminus Z(h',U).$$

Donc, arg $\frac{\partial f}{\partial r}(e^{it})$ est une fonction continue monotone décroissante sur les sous-intrvalles de $J_k(q)$ où $h' \neq 0$. D'autre part, nous déduisons de la géométrie que

$$(3.3.4) \qquad \beta(q) \leq \arg \frac{\partial f}{\partial r}(e^{it}) \leq \beta_L(q) + \pi \leq \beta(q) + 2\pi \text{ sur } J_k(q) \setminus Z(h',U).$$

Observons que arg $a(e^{it})$ est défini comme une fonction continue qui est monotone croissante sur $0 \leq t \leq 2\pi$. Fixons t et s, $\gamma_k(q) < t < s < \delta_k(q)$ et supposons que $h'(e^{it})h'(e^{is}) \neq 0$. Alors, nous déduisons de (3.3.4), et de la continuité de arg $a(e^{it})$ que

$$(2.3.5) \qquad 0 \leq \tfrac{1}{2}[\arg a(e^{it}) - \arg a(e^{is})] \leq \beta_L(q) + \pi - \beta(q) = \alpha(q),$$

où $\alpha(q)$ est l'angle d'ouverture de $\partial\Omega$ en q vu de l'intérieur du domaine Ω. En passant à la limite, nous obtenons la relation

$$(3.3.6) \qquad 0 \leq \tfrac{1}{2}[\arg a(e^{i\delta_k(q)}) - \arg a(e^{i\gamma_k(q)})] \leq \alpha(q).$$

Théorème 3.3.4. Soit Ω un domaine de Jordan simplement connexe et soit f une transformation harmonique p-valente de U sur Ω préservant l'orientation. Supposons que $f^*(e^{it})$ est localement un homéomorphisme faible de ∂U sur $\partial\Omega$ et que $a(z)$ admet un prolongement analytique à travers l'intervalle ouvert J du cercle unité ∂U et que $|a| \equiv 1$ dans J. De plus, soit $q \in \partial\Omega$ et supposons que $J(q) \subset J$ pour au moins un k,
$1 \leq k \leq p$. Finalement, soit $\alpha(q)$ l'angle d'ouverture de $\partial\Omega$ en q vu de l'intérieur de Ω.

(i) Si $\alpha(q) = 0$, alors $\gamma_k(q) = \delta_k(q)$. Si $0 < \alpha(q) < \pi$, alors nous avons l'inégalité stricte $\gamma_k(q) < \delta_k(q)$ et

$$(3.3.7) \qquad \tfrac{1}{2}[\arg a(e^{i\delta_k(q)}) - \arg a(e^{i\gamma_k(q)})] = \alpha(q).$$

(ii) Si $\alpha(q) = \pi$, alors ou bien $\gamma_k(q) = \delta_k(q)$ ou bien $\gamma_k q) < \delta_k(q)$ et la relation (3.3.7) est satisfaite. Les deux cas sont possibles.

(iii) Si $\pi < \alpha(q) < 2\pi$, alors on a toujours $\gamma_K(q) < \delta_K(q)$. De plus, ou bien la relation (3.3.7) est satisfaite ou bien nous avons

$$\frac{1}{2}[\arg a(e^{i\delta_K(q)}) - \arg a(e^{i\gamma_K(q)})] = \alpha(q) - \pi. \tag{3.3.8}$$

Les deux cas sont possibles.

Démonstration: Les relations (3.3.1) et (3.3.2) montrent que $\beta(q) = \beta_R(q)$ et $\beta_L(q)$ existent et nous avons

$$\beta(q) = -\frac{1}{2} \arg a(e^{i\delta_K(q)}) \bmod \pi \text{ et } \beta_L(q) = -\frac{1}{2} \arg a(e^{i\gamma_K(q)}) \bmod \pi.$$

Donc,

$$\alpha(q) = \pi - \beta(q) + \beta_L(q) = \frac{1}{2}\arg a(e^{i\delta_K(q)}) - \frac{1}{2}\arg a(e^{i\gamma_K(q)}) \bmod \pi.$$

Puisque $0 \le \alpha(q) < 2\pi$, l'égalité (3.3.7) mod π s'ensuit de (3.3.6) pour les trois cas (i), (ii) et (iii). Il nous reste à montrer que les deux cas (3.3.7) et (3.3.8) sont possibles dans (ii) et (iii).

La fonction $f(z) = z + \bar{z}^2/2$ est univalente sur le disque unité U et nous avons $a(z) = z$. De plus, $\alpha(\frac{-1}{2}) = \pi$ et $\gamma(\frac{-1}{2}) = \delta(\frac{-1}{2})$.

Considérons la fonction

$$f(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arg\left[\frac{1+\sqrt{2}iz - z^2}{1-\sqrt{2}iz - z^2}\right] + \frac{i}{2}\arg\left[\frac{1+z}{1-z}\right], \ z \in U.$$

Alors, f est une transformation harmonique et univalente de U sur le rectangle $\Omega = \{w: |u| < \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \text{ et } |v| < \frac{\pi}{4}\}$. De plus, f est la solution du problème de Dirichlet de

$$f^*(e^{it}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{i\pi}{4} & \text{si} \quad 0 < t < \frac{\pi}{4} \\ \frac{i\pi}{4} & \text{si} \quad \frac{\pi}{4} < t < \frac{3\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{i\pi}{4} & \text{si} \quad \frac{3\pi}{4} < t < \pi \\ -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{i\pi}{4} & \text{si} \quad -\pi < t < -\frac{3\pi}{4} \\ -\frac{i\pi}{4} & \text{si} \quad -\frac{3\pi}{4} < t < -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{i\pi}{4} & \text{si} \quad -\frac{\pi}{4} < t < 0 \end{cases}.$$

La dilatation de f est $a(z) = -z^4$ et nous avons $\alpha(\frac{i\pi}{4}) = \pi$, $\gamma(\frac{i\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$ et $\delta(\frac{i\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4}$. Donc $\frac{1}{2}$ (arg $a(e^{i\delta_k(q)})$ - arg $a(e^{i\gamma_k(q)})) = \frac{1}{2}(3\pi - \pi) = \pi$ et (3.3.7) est satisfait pour le cas (ii).

Finalement D.Bshouty et W.Hengartner [BH] ont donné des exemples où on voit que (3.3.7) ainsi que (3.3.8) sont possibles dans le cas (iii) et le théorème est démontré.

3§4 Le cas où a(z) est un produit de Blaschke fini

Nous supposons maintenant que la (deuxième) dilatation a(z) est un produit de Blaschke fini,

$$(3.4.1) \qquad a(z) = e^{i\alpha} \prod_{k=1}^{N} \frac{z - p_k}{1 - \overline{p_k} z}, \quad |p_k| < 1, \ 1 \le k \le N.$$

Donc, a(z) est analytique sur le disque unité fermé et on a $|a(e^{it})| \equiv 1$. Soit Ω un domaine de Jordan simplement connexe réglé (voir définition 3.1.1). Nous cherchons des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution p-valente qui transforme le disque unité U sur Ω. Rappelons que $(f^*)^{-1}(q)$ est la réunion de p sous-intervalles fermés mutuellement disjoints de ∂U,

$$(f^*)^{-1}(q) = \bigcup_{k=1}^{p} J_k(q) \text{ où } J_k(q) = \{e^{it}, \ \gamma_k(q) \le t \le \delta_k(q)\}.$$

Définition 3.4.1.. Soient Ω et f comme dans le théorème 3.3.4. Nous disons qu'un point $q \in \partial\Omega$ est un <u>point de repos complet d'ordre n(q)</u> de f si la relation (3.3.7),

$$\frac{1}{2}[\arg a(e^{i\delta_k(q)}) - \arg a(e^{i\gamma_k(q)})] = \alpha(q),$$

est satisfaite pour n(q) intervalles $J_k(q)$.

Remarques 3.4.2..

1. Chaque point de convexité de $\partial\Omega$ est un point de repos complet d'ordre p.

2. L'expression "point de repos complet" peut porter à confusion. En effet, si $\alpha(q) = 0$, nous avons $\gamma_k(q) = \delta_k(q)$, c.à.d., $J_k(q)$ est un seul point (la fonction f^* "ne s'arrête pas"). Pourtant il s'agit d'un point de repos complet parce que l'égalité (3.3.7) est satisfaite. D'autre part, si $\pi < \alpha(q) < 2\pi$, nous avons toujours $\gamma_k(q) < \delta_k(q)$, et si l'égalité (3.3.8) est satisfaite pour chaque k, q n'est pas un point de repos complet.

Notre premier résultat principal donne des conditions nécessaires.

Théorème 3.4.3 (original). Soit a un produit de Blaschke de la forme (3.4.1) et soit f une solution p-valente de (2.1.5) qui transforme U sur un domaine de Jordan simplement connexe et réglé Ω. Alors nous avons

(i) $\sum_{q\in\partial\Omega} n(q) = N + 2p$, où $q \in \partial\Omega$ est un point de repos complet d'ordre $n(q)$.

(ii) La frontière $\partial\Omega$ contient au plus $2 + \dfrac{N}{p}$ points de convexité.

.Démonstration: Soit PAC l'ensemble des points de repos complet d'ordre positif de $\partial\Omega$ et soit E l'ensemble des points $q \in \partial\Omega$ tels que $\alpha(q) = 2\pi$ et $\delta_k(q) = \gamma_k(q)$ pour $m(q)$ des k, $m(q) > 0$. Définissons $A(t) = \arg a(e^{it})$ comme une fonction continue (monotone croissante) sur $[0,2\pi)$, telle que $A(0) \in [0,2\pi)$. Notons que $A(2\pi) - A(0) = 2N\pi$ et fixons $q_0 \in \partial\Omega$. Posons

$$(3.4.1) \qquad B(t) = \pi \sum_{q\in PAC} \sum_{k=1}^{n(q)} H_{qk}(t) - \pi \sum_{q\in E} \sum_{k=1}^{m(q)} H_{qk}(t) - \tfrac{1}{2}A(t);$$

$$B(d_1(q_0)) = \beta(q_0),$$

où $H_{qk}(t)$ est la fonction de Heaviside

$$H_{qk}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } \delta_1(q_0) \le t < \delta_k(q) \\ 1 & \text{if } \delta_k(q) \le t < \delta_1(q_0) + 2\pi \end{cases}.$$

Remarquons que nous avons pour tout $q \in \partial\Omega$ et tout k, $1 \le k \le p$:

$$B(\delta_k(q)) = \beta(q) \text{ et } B(\gamma_k(q)) = \beta_L(q).$$

Nous allons montrer que la première somme dans (3.4.1) contient seulement un nombre fini de termes et qu'il n'existe aucun $q \in E$.

a) Nous montrons d'abord que E ne contient qu'un nombre fini de termes. En effet, sinon, on peut extraire une suite de points q_j de E qui converge vers un point $q \in \partial\Omega$. Nous avons $\beta(q_j) - \beta_L(q_j) = -\pi$ et donc $\beta(q_j)$ ne converge pas ce qui contredit l'hypothèse que Ω soit un domaine réglé.

b) La relation (3.4.2)

$$B(d_1(q_0) + 2\pi) - B(d_1(q_0)) = 2\pi p = \pi \sum_{q \in PAC} n(q) - \pi \sum_{q \in E} m(q) - N\pi.$$

montre que la première somme ne contient qu'un nombre fini de termes, c.à.d., $f(\partial U)$ ne contient qu'un nombre fini des points de repos complet d'ordre positif.

c) Il n'y a aucun $q \in \partial\Omega$ avec $\alpha(q) = 2\pi$. En effet, s'il existe un $q \in \partial\Omega$ tel que $\alpha(q) = 2\pi$, alors on doit avoir un nombre infini des points de convexité par rapport à $f(U)$ et donc un nombre infini des points de repos complet d'ordre positif ce qui contredit b).

d) Finalement, (3.4.2) entraîne que

$$(3.4.3)\quad 2\pi p = \pi \sum_{q \in \partial\Omega} n(q) - N\pi$$

et l'énoncé (i) du théorème est établi. Puisque un point de convexité q de $\partial\Omega$ est un point de repos complet d'ordre p nous déduisons de (3.4.3) que le nombre n_c de ces points est $2\pi p + N\pi = \pi \sum_{q \in \partial\Omega} n(q) \geq n_c p\pi$,

d'où $n_c \leq 2 + \frac{N}{p}$, ce qui complète la preuve.

Exemples 3.4.4

1. La fonction $f(z) = z^p + \bar{z}^{p(n+1)}/(n+1)$ est une transformation harmonique p-valente définie sur U. Sa dilatation est $a(z) = z^{np} = z^N$. La frontière $\partial\Omega$ de l'image $\Omega = f(U)$ contient les $n + 2 = 2 + \frac{N}{p}$ points de convexité

$$q_j = \frac{n+2}{n+1} e^{2ik\pi/(n+1)},\ 0 \leq k \leq n+1,$$

qui sont des points de cornés pointés vers l'extérieur de Ω. Dans cet exemple, nous avons donc $pn_C = \sum_{q\in\partial\Omega} n(q) = N + 2p$.

(2) La fonction considérée dans la preuve du théorème 3.3.4,

$$f(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arg\left[\frac{1+\sqrt{2}iz-z^2}{1-\sqrt{2}iz-z^2}\right] + \frac{i}{2}\arg\left[\frac{1+z}{1-z}\right],\ z \in U,$$

est univalente (p=1), et sa dilatation est $a(z) = -z^4$. Donc $pn_C = 4 < 2 + 4 = N + 2p = \sum_{q\in\partial\Omega} n(q)$.

3§5 Le problème inverse

Revenons au problème original. Soit a(z) un produit de Blaschke de degré N et soit f(z) une solution p-valente de (2.1.5) de U sur un domaine de Jordan réglé Ω telle que f^* est à variation bornée. Alors la relation (3.2.5)

$$\operatorname{Im}\ \{\sqrt{a(e^{it})}\,df^*(e^{it})\} = 0;\ f^*\text{-a.e. sur } \partial U$$

est une propriété nécessaire. Il est raisonnable de se demander si elle est aussi suffisante. La réponse est non comme l'exemple suivant le montre.

Exemple 3.5.1.

Soit f la solution du problème de Dirichlet de

$$f^*(e^{it}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < t < \frac{\pi}{4} \\ i & \text{si} \quad \frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2} \\ -i & \text{si} \quad \frac{\pi}{2} < t < \frac{7\pi}{4} \\ -1 & \text{si} \quad \frac{7\pi}{4} < t < 2\pi \end{cases}$$

Alors f^* satisfait la condition (3.2.5) , mais l'image de f(U) n'est pas un domaine.

La démonstration du prochain théorème est la même que celle donnée pour les transformations harmoniques univalentes par Bshouty et Hengartner dans [BH], théorème 3.6.

Théorème 3.5.2: Soit $a(z)$ un produit de Blaschke de degré N et soit Ω un domaine de Jordan dont la frontière est rectifiable. Soit $f^*(e^{it})$ une application p-valente et localement un homéomorphisme faible du cercle unité ∂U sur $\partial\Omega$ préservant l'orientation. Alors l'intégrale de Poisson

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left\{\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right\} f^*(e^{it})\, dt$$

est une solution p-valente de

$$\overline{f_{\bar{z}}(z)} = a(z) f_z(z),\ z \in U,$$

qui transforme U sur Ω, si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites

(i) (3.2.5) $\mathrm{Im}\ \{ \sqrt{a(e^{it})}\, df^*(e^{it}) \} = 0$; f^* -a.e. sur ∂U et

(ii) (3.5.1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{a(z)-a(e^{it})}{z-e^{it}}\, df^*(e^{it}) \equiv 0$; $z \in U$.

<u>Démonstration</u> : Nous savons déjà que (3.2.5) est une condition nécessaire. Donc, supposons que (3.2.5) est déjà satisfaite. En dérivant l'integrale de Poisson par rapport à z et en effectuant l'integration par parties par rapport à t, nous obtenons

$$(3.5.2) \qquad 4\pi i z\, [\, \overline{f_{\bar{z}}(z)} - a(z) f_z(z).] = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, [a(z) df^*(e^{it}) - \overline{df^*(e^{it})}].$$

puisque $\displaystyle\int_0^{2\pi} df^*(e^{it}) = \int_0^{2\pi} \overline{df^*(e^{it})} = 0$, et

$$a(z) df^*(e^{it}) - \overline{df^*(e^{it})} = \sqrt{a(e^{it})}\ \mathrm{Im}\ \{ \sqrt{a(e^{it})}\, df^*(e^{it}) \} = 0,$$

nous avons $\int_0^{2\pi} a(e^{it})df^*(e^{it}) = 0$ et

$$4\pi i z\,[\overline{f_{\bar z}(z)} - a(z)f_z(z)] = \int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}-1\right)[a(z)df^*(e^{it}) - \overline{df^*(e^{it})}]$$

$$= 2z\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{it}-z}[a(z)df^*(e^{it}) - \overline{df^*(e^{it})}]$$

ou

(3.5.3) $\overline{f_{\bar z}(z)} - a(z)f_z(z) =$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{a(e^{it})-a(z)}{e^{it}-z}df^*(e^{it}) + \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{it}-z}[a(e^{it})df^*(e^{it}) - \overline{df^*(e^{it})}]$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{a(e^{it})-a(z)}{e^{it}-z}df^*(e^{it}).$$

Nous déduisons que $\overline{f_{\bar z}(z)} - a(z)f_z(z)$ est une fonction analytique sur $\overline{U}$ et elle est identiquement zéro si et seulement si f^* satisfait (3.4.3). Puisque $|a| < 1$ sur U, nous avons $f(U) = \Omega$ et le principe d'argument nous montre que f est p-valente.

3§6 Procédure constructive des transformations harmoniques p-valentes.

Puisque a(z) est une fonction rationnelle de degré N, la condition (3.5.1) peut être remplacée par un système de [N/2] (la partie entière.de N/2) équations. Posons

$$a(z) = e^{i\gamma}\prod_{k=1}^{m}\left[\frac{z-p_k}{1-z\overline{p_k}}\right]^{n_k},\quad \sum_{k=0}^{m} n_k = N,\ |p_k| < 1,\ 1 \le k \le m,$$

$$p(z) = \prod_{k=1}^{m}(z-p_k)^{n_k},$$

$$q(z) = \prod_{k=1}^{m}(1 - z\overline{p_k})^{n_k}, \text{ et}$$

$$t(z) = e^{-i\gamma/2} zq(z) \int_0^{2\pi} \frac{a(e^{it}) - a(z)}{e^{it} - z} df^*(e^{it})$$

$$= z \int_0^{2\pi} e^{-i\gamma/2} \frac{q(z)a(e^{it})}{e^{it} - z} df^*(e^{it}) - z \int_0^{2\pi} e^{i\gamma/2} \frac{p(z)}{e^{it} - z} df^*(e^{it})$$

$$= z \int_0^{2\pi} e^{-i\gamma/2} \frac{q(z)}{e^{it} - z} \overline{df^*(e^{it})} - z \int_0^{2\pi} e^{i\gamma/2} \frac{p(z)}{e^{it} - z} df^*(e^{it}) .$$

Notons que $t(z)$ est un polyôme de degrée N et que la condition (3.5.1) est équivalente à la condition

$$t(z) \equiv 0, \ z \in U.$$

Donc, on peut remplacer (3.4.3) par N + 1 equations de la forme $L_k(t) = 0$, $1 \leq k \leq N$, où les L_k sont N + 1 fonctionnelles linéaires continues qui sont linéairement indépendantes. Nous avons

$$q(z) = z^N \ \overline{p(\tfrac{1}{\bar{z}})},$$

$$p(z) = z^N \overline{q(\tfrac{1}{\bar{z}})},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} - z} df^*(e^{it}) = \int_0^{2\pi} \frac{z}{e^{it} - z} df^*(e^{it}) \text{ et}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} - z} \overline{df^*(e^{it})} = \int_0^{2\pi} \frac{z}{e^{it} - z} \overline{df^*(e^{it})}$$

et donc

$$z^N \ \overline{t(\tfrac{1}{\bar{z}})} \equiv t(z).$$

Finalement, la condition $t(0) = 0$ est automatiquement.satisfaite Donc, nous sommes amenés à résoudre $[N/2]$ équations.

En résumé, nous avons démontré le théorème suivant:

Théorème 3.6.1. La condition nécessaire et suffisante (3.5.1) peut être remplacée par un ensemble de $[N/2]$ équations de la forme:

$$(3.6.1) \qquad L_{kj}(t) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ijt} df^*(e^{it})}{(1 - z\overline{p^k})^j}, \; 1 \le j \le n_k, \; 1 \le k \le m,$$

où

$$a(z) = e^{i\gamma} \prod_{k=1}^{m} \left[\frac{z - p_k}{1 - z\overline{p_k}} \right]^{n_k}, \quad \sum_{k=0}^{m} n_k = N, \; |p_k| < 1, \; 1 \le k \le m,$$

Application 3.6.2. Posons $a(z) = z^2$ et $p = 2$. Alors $\partial\Omega$ a exactement $2p + N = 6$ points de repos complet comptés avec l'ordre, car le nombre de points de convexité de $\partial\Omega$ est au moins 3 et au plus $2 + N/2 = 3$. On peut conclure que $\partial\Omega$ a exactement 3 points de convexité w_1, w_2 et w_3. Posons $w_4 = w_1$ et choisissons un t_k de $f^{-1}(w_k)$. Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution 2-valente de (2.1.5), sont les relations (3.2.5) et (3.5.1). (3.2.5) détermine la correspondence des frontières quand (3.5.1) peut être exprimée par la seule équation

$$(3.6.2) \qquad \int_0^{2\pi} e^{it} df^*(e^{it}) = 0$$

Avec (3.2.5), on a $\operatorname{Im} [e^{it} df^*(e^{it})] = \operatorname{Im} [\sqrt{a(e^{it})} df^*(e^{it})] = 0$. Donc nous obtenons

$$\int_0^{2\pi} e^{it} df^*(e^{it}) = \sum_{k=1}^{3} \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{it} df^*(e^{it}) = \pm \sum_{k=1}^{3} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (-1)^k \left| df^*(e^{it}) \right| =$$

$$= \pm[l_1 - l_2 + l_3 - l_1 + l_2 - l_3] = 0$$

où l_k désigne la longueur euclidienne de l'arc de $\partial\Omega$ muni de l'orientation positive qui joint w_k à w_{k+1}. Donc, pour chaque domaine de Jordan $\partial\Omega$ dont la frontière contient exactement trois points de convexité, il existe une correspondence $f^*(e^{it})$ unique entre ∂U et $\partial\Omega$ qui satisfait (3.2.5). D'autre part, (3.6.3) montre que la condition nécessaire et suffisante (3.6.2) est toujours satisfaite. Alors la solution du problème de Dirichlet est automatiquement une solution 2-valente de (2.1.5) de U sur Ω.

Finalement, remarquons que f peut être obtenu par la relation $f(z) = f_1(z^2)$ où f_1 est une solution univalente de (2.1.5) de U sur $\partial\Omega$ avec $a(z) = z$.

3§7 Décomposition des transformations harmoniques p-valentes.

Soit f une transformation harmonique p-valente de U sur un domaine Ω préservant l'orientation. Si la dilatation $a(z) \equiv 0$, c.à.d., si f est analytique, alors f est de la forme

(3.7.1) $\qquad f(z) = F(\omega(z)),$

où ω est un produit de Blaschke de degré p de U sur U et F est une transformation conforme (analytique et injective) de U sur Ω. On peut se demander s'il y a des résultats analogues pour d'autres dilatations.

P.Duren et W.Hengartner ont démontré dans [DH] le résultat suivant:

Théorème 3.7.3 . Soit f une transformation harmonique définie sur U et soit a(z) sa dilatation. Alors on a la décomposition

$$f(z) = F(\phi(z))$$

où ϕ est une fonction analytique sur U et F est harmonique et univalente sur $\phi(U)$ si et seulement si

(i) $|a| \neq 1$ sur U et

(ii) $f(z_1) = f(z_2)$ implique $a(z_1) = a(z_2)$.

Bibliographie

[AL] Y.Abu-Muhanna et A.Lyzzaik, *The Boundary Behavior of harmonic univalent maps*, Pacific J.Math. 141 (1990), 1-20.

[BH] D.Bshouty et W.Hengartner, *Boundary values versus dilatation of harmonic mappings*, J.d'Analyse Math., 72 (1997), 141-164.

[BHS] D.Bshouty , W.Hengartner et T.Suez, *The exact bound on the number of zeros harmonic polynomials*, J.Anal.Math., 67 (1995), 207-218.

[C] G.Choquet, *Sur un type de transformation analytique généralisant la représentation conforme et définie au moyen de fonctions harmoniques*, Bull.Sci.Math.(2) 69 (1945), 156-165.

[CS] J.Clunie et T.Sheil-Small, *Harmonic univalent fonctions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I, 9 (1984), 3-25.

[DH] P.Duren et W.Hengartner, *Harmonic mappings of multiply connected domains*, Pacific J.Math.,180, No.2 (1997), 201-220.

[GH] P.M.Gauthier et W.Hengartner, *Approximation uniforme qualitative sur des ensemles non bornés*,Séminaire de Mathématiques supérieures, Presse de l'Université de Montréal,(1982), 88 pp.

[HS] W.Hengartner et G.Schober, *Harmonic mappings with given dilatation*, J.Math. Soc.,33 (1986), 473-483.

[K] H.Kneser, *Lösung der Aufgabe 41*, Jahresber.Deutsch.Math. Verein 35 (1926), 123-124.

[L1] A.Lyzzaik, *Local properties of light harmonic mappings*, Canad.J.Math. 44 (1992),135-153.

[L2] R.Laugesen, *Planer harmonic maps with inner and Blacshke dilatation*, J.London Math. Soc.(2), 56 (1997), 37-48.

[P] C.Pommerenke, *Boundary Behavior of Conformal Maps*, Grundlehren der mathematischen wissesenschaften No.29 (1991), Springer-Verlag, Berlin.

[W] A.S.Wilmshurst, *The valence of harmonic polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc., 126 (1998), No.7, 2077-2081.