

**UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE**

**Faculté des sciences appliquées**

**Département de génie mécanique**

**ÉTUDE NUMÉRIQUE DE L'ÉCOULEMENT TRANSITOIRE DANS  
UNE ZONE FLOTTANTE - LA TRANSITION  
AXISYMÉTRIQUE / OSCILLATOIRE**

**Thèse de doctorat (Ph.D.)**

**Spécialité: génie mécanique**

**Hussein BAZZI**

**Sherbrooke, (Québec), CANADA**

**Janvier 1999**

*IV - 1135*



**National Library  
of Canada**

**Acquisitions and  
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

**Bibliothèque nationale  
du Canada**

**Acquisitions et  
services bibliographiques**

**395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

**The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.**

**The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.**

**L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.**

**L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.**

0-612-67092-9

**Canada**

*À mon père et à ma mère au Liban*

## **REMERCIEMENTS**

**Je tiens à remercier chaleureusement mes directeurs de thèse les professeurs Nicolas GALANIS et Cong Tam NGUYEN pour leur patience, leur bienveillance et leurs précieux conseils, sans qui ce travail n'aurait pu être mené à terme .**

**Je désire remercier les membres du jury pour avoir accepté de lire ce manuscrit.**

**Par ailleurs, je tiens à remercier l'administration de l'École de Génie de l'Université de Moncton pour avoir mis à ma disposition un équipement informatique adéquat.**

**Un remerciement particulier à Monsieur Mustapha KEBICHE, professeur à la Faculté des Arts de l'Université de Moncton, pour avoir corrigé le texte.**

**Ce travail a été rendu possible grâce aux soutiens financiers accordés par le Conseil de Recherche en Sciences Naturelle et Génie du Canada (CRSNG), la Faculté des Études Supérieures et de la Recherche de l'Université de Moncton (FESR) et les Ministères des Affaires Intergouvernementales du Nouveau-Brunswick et du Québec, qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.**

## **RÉSUMÉ**

**Le présent travail porte sur l'étude numérique de l'écoulement thermocapillaire en régime transitoire à l'intérieur d'une zone flottante de matière fondue. On s'est intéressé en particulier à la transition axisymétrique / oscillatoire. Le système d'équations de conservation complétées avec leurs conditions aux limites et conditions initiales appropriées a été résolu directement par la méthode SIMPLE modifiée. Ce travail est divisé en deux grandes parties.**

**Dans la première partie, on présente le comportement transitoire de l'écoulement thermocapillaire au sein d'une zone flottante axisymétrique opérant en  $\mu$ -g et en 1-g. Les fluides testés sont le NaNO<sub>3</sub> et le Silicone. Pour les cas simulés sur terre, on a considéré que la surface libre est déformable et dont la forme dynamique est déterminée à l'aide d'une approche numérique spéciale. En  $\mu$ -g, cette surface libre est parfaitement cylindrique. Les résultats obtenus ont permis, d'une part, d'établir d'une manière précise la complexité de la structure de l'écoulement et du champ thermique ainsi que leurs comportements transitoires pour différents nombres de Marangoni. D'autre part, on a étudié les effets du rapport géométrique et du nombre de Marangoni sur les champs hydrodynamique et thermique.**

**Dans la deuxième partie, la transition axisymétrique / oscillatoire a été étudiée en détails. Pour le cas d'une zone flottante de NaNO<sub>3</sub> et à l'aide d'un modèle mathématique de calcul en 3D, on a déterminé le nombre de Marangoni critique qui correspond à la transition axisymétrique / oscillatoire et on a étudié le phénomène de l'hystérésis. L'instabilité observée pour le NaNO<sub>3</sub> est de nature thermique. Par contre, pour le Silicone, les instabilités qui correspondent à la transition axisymétrique / 3D permanent et à celle 3D stationnaire / oscillatoire sont d'origine hydrodynamique.**

# TABLE DES MATIÈRES

<b>CHAPITRE 1 INTRODUCTION .....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 2 REVUE DE LA LITTÉRATURE .....</b>	<b>3</b>
<b>2.1 LA CONVECTION THERMOCAPILLAIRE DANS LA ZONE FLOTTANTE: LES TRAVAUX ANALYTIQUES / NUMÉRIQUES ( MODÈLE 2D AXISYMETRIQUE) .....</b>	<b>3</b>
<b>2.2 LA CONVECTION THERMOCAPILLAIRE DANS LA ZONE FLOTTANTE: LES TRAVAUX EXPÉRIMENTAUX.....</b>	<b>7</b>
<b>2.3 TRAVAUX EXPÉRIMENTAUX / ANALYTIQUES RELATIFS AUX OSCILLATIONS .....</b>	<b>9</b>
<b>2.4 ÉTUDES NUMÉRIQUES RELATIFS AUX OSCILLATIONS.....</b>	<b>11</b>
<b>2.5 ÉTUDES THÉORIQUES DE LA STABILITÉ HYDRODYNAMIQUE .....</b>	<b>13</b>
<b>2.6 OBJECTIFS DE LA PRÉSENTE ÉTUDE.....</b>	<b>16</b>
<b>CHAPITRE 3 MODÉLISATION MATHÉMATIQUE.....</b>	<b>17</b>
<b>3.1 CONFIGURATIONS GÉOMÉTRIQUES.....</b>	<b>17</b>
<b>3.2 HYPOTHÈSES SIMPLIFICATRICES.....</b>	<b>19</b>
<b>3.3 ÉQUATIONS DE CONSERVATION.....</b>	<b>20</b>
<b>3.3.1 Cas 3D.....</b>	<b>20</b>
<b>3.3.2 Cas 2D axisymétrique.....</b>	<b>21</b>
<b>3.4 CONDITIONS AUX LIMITES .....</b>	<b>22</b>
<b>3.4.1 Conditions aux limites pour l'écoulement tridimensionnel avec une surface libre cylindrique (Fig. 3.1 a): .....</b>	<b>22</b>
<b>3.4.2 Conditions aux limites pour l'écoulement axisymétrique avec une surface libre déformable (Fig. 3.1 b):.....</b>	<b>24</b>
<b>3.4.3 Conditions aux limites pour l'écoulement axisymétrique avec une surface libre cylindrique (Fig. 3.1 c): .....</b>	<b>25</b>

<b>3.5 CONDITIONS INITIALES .....</b>	<b>26</b>
<b>3.6 MODIFICATIONS DANS L 'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES SELON Z .....</b>	<b>27</b>
<b>3.7 FORME ADIMENSIONNELLE DES ÉQUATIONS DE CONSERVATION .....</b>	<b>27</b>
<b>3.7.1 Cas 3D .....</b>	<b>29</b>
<b>3.7.2 Cas 2D axisymétrique .....</b>	<b>30</b>
<b>3.8 FORME ADIMENSIONNELLE DES CONDITIONS AUX LIMITES ET DES CONDITIONS INITIALES .....</b>	<b>31</b>
<b>3.8.1 Cas 3D avec une surface libre cylindrique .....</b>	<b>31</b>
<b>3.8.2 Cas 2D avec une surface libre déformable .....</b>	<b>32</b>
<b>3.8.3 Cas 2D axisymétrique avec une surface libre cylindrique .....</b>	<b>34</b>
<b>3.8.4 Conditions initiales adimensionnelles .....</b>	<b>35</b>
<b>3.9 PARAMÈTRES CARACTÉRISTIQUES ADIMENSIONNELS .....</b>	<b>35</b>
<b>CHAPITRE 4 MÉTHODE NUMÉRIQUE ET VALIDATION DU MODÈLE .....</b>	<b>37</b>
<b>4.1 MÉTHODE DE RÉOLUTION .....</b>	<b>37</b>
<b>4.2 APERÇU SUR LA MÉTHODE SIMPLE MODIFIÉE .....</b>	<b>38</b>
<b>4.2.1 Discrétisation des équations de conservation pour le cas 3D .....</b>	<b>41</b>
<b>4.2.2 Discrétisation des équations de conservation pour le cas 2D axisymétrique .....</b>	<b>45</b>
<b>4.2.3 Notes sur le traitement du couplage vitesse-pression .....</b>	<b>46</b>
<b>4.2.4 Algorithme SIMPLE modifiée .....</b>	<b>47</b>
<b>4.3 TRAITEMENT NUMÉRIQUE SPÉCIAL POUR LE CAS 2D AXISYMÉTRIQUE AVEC UNE SURFACE LIBRE DÉFORMABLE .....</b>	<b>48</b>
<b>4.3.1 Résolution numérique de la forme de la surface libre à l'aide de la méthode SIMPLE modifiée .....</b>	<b>49</b>
<b>4.3.2 Étapes de calcul pour résoudre F(Z) .....</b>	<b>51</b>
<b>4.3.3 Approche numérique utilisé pour imposer les conditions aux limites sur la surface libre .....</b>	<b>52</b>
<b>4.4 PROCÉDURES DE CALCUL .....</b>	<b>54</b>
<b>4.5 CRITÈRE DE CONVERGENCE ET SOUS RELAXATION DES VARIABLES .....</b>	<b>54</b>

<b>4.6. CHOIX DU MAILLAGE.....</b>	<b>58</b>
<b>4.6.1 Cas 2D axisymétrique avec une surface libre déformable pour les cas simulés en 1-g .....</b>	<b>58</b>
<b>4.6.2 Cas 2D axisymétrique avec une surface libre parfaitement cylindrique pour les cas simulés en <math>\mu</math>-g.....</b>	<b>59</b>
<b>4.6.3 Cas 3D avec une surface libre cylindrique pour les cas simulés en <math>\mu</math>-g.....</b>	<b>59</b>
<b>4.7 VALIDATION DU MODÈLE.....</b>	<b>65</b>
<b>4.7.1 Validation du modèle 2D avec une surface libre déformable.....</b>	<b>65</b>
<b>4.7.2 Validation du modèle 2D avec une surface libre cylindrique.....</b>	<b>71</b>
<b>4.7.3 Validation du modèle 3D avec une surface libre cylindrique en environnement microgravitationnel .....</b>	<b>71</b>
<b>4.8 PROPRIÉTÉS DES MATÉRIAUX UTILISÉS .....</b>	<b>74</b>
<b>CHAPITRE 5 RÉSULTATS OBTENUS EN 2D POUR LE <math>\text{NaNO}_3</math>.....</b>	<b>77</b>
<b>5.1 VARIATION TEMPORELLE DE LA TEMPÉRATURE DU DISQUE CHAUD ET LE CHOIX DU PAS DE TEMPS.....</b>	<b>77</b>
<b>5.2 COMPORTEMENT TRANSITOIRE D'UNE ZONE FLOTTANTE DE <math>\text{NaNO}_3</math> OPÉRANT EN <math>\mu</math>-G .....</b>	<b>80</b>
<b>5.2.1 Évolution temporelle de la structure des lignes de courant en <math>\mu</math>-g .....</b>	<b>80</b>
<b>5.2.2 Évolution temporelle des isothermes en <math>\mu</math>-g.....</b>	<b>82</b>
<b>5.2.3 Évolution transitoire des profils de température et de <math>V_z</math> sur la surface libre en <math>\mu</math>-g ..</b>	<b>84</b>
<b>5.3 DISCUSSIONS SUR LA STABILITÉ DE L'ÉCOULEMENT POUR <math>\text{Ma} = 20000</math>.....</b>	<b>87</b>
<b>5.4 COMPORTEMENT TRANSITOIRE D'UNE ZONE FLOTTANTE DE <math>\text{NaNO}_3</math> OPÉRANT SUR TERRE .....</b>	<b>89</b>
<b>5.4.1 Évolution temporelle de la structure des lignes de courant en 1-g.....</b>	<b>89</b>
<b>5.4.2 Évolution temporelle des isothermes en 1-g.....</b>	<b>95</b>
<b>5.4.3 Évolution temporelle des profils de température et de <math>V_z</math> sur la surface libre en 1-g .....</b>	<b>95</b>
<b>5.5 EFFET DU NOMBRE DE MARANGONI.....</b>	<b>101</b>



5.5.1 Effet du nombre de Marangoni sur les profils de température et de $V_z$ sur la surface libre en $\mu$ -g .....	101
5.5.2 Effet du nombre de Marangoni sur la structure des lignes de courant et des isothermes en $\mu$ -g .....	104
5.5.3 Effet du nombre de Marangoni sur les profils de température et de $V_z$ sur la surface libre en 1-g.....	106
5.5.4 Effet du nombre de Marangoni sur la structure des isothermes et des lignes de courant en 1-g .....	108
5.6 INFLUENCE DE LA GRAVITÉ.....	111
5.7 CONCLUSION .....	113
<b>CHAPITRE 6 RÉSULTATS OBTENUS EN 2D POUR LE SILICONE .....</b>	<b>114</b>
6.1 VARIATION TEMPORELLE DE LA TEMPÉRATURE DU DISQUE CHAUD.....	114
6.2 COMPORTEMENT TRANSITOIRE D'UNE ZONE FLOTTANTE DE SILICONE ...	114
6.2.1 Évolution temporelle des profils de température et de $V_z$ sur la surface libre.....	116
6.2.2 Évolution temporelle de la structure des lignes de courant .....	119
6.2.3 Évolution transitoire du champ thermique.....	121
6.3 EFFET DU NOMBRE DE MARANGONI.....	121
6.3.1 Effet du $Ma$ sur les profils de température et de vitesse axiale sur la surface libre ....	123
6.3.2 Effet du nombre de Marangoni sur la structure des champs thermique et hydrodynamique.....	125
6.4 EFFET DU RAPPORT GÉOMÉTRIQUE $A$ .....	127
6.5 CONCLUSION .....	131
<b>CHAPITRE 7 RÉSULTATS OBTENUS EN 3D POUR LE <math>\text{NANO}_3</math> - LA TRANSITION AXISYMÉTRIQUE / OSCILLATOIRE .....</b>	<b>133</b>
7.1 ÉVOLUTION TEMPORELLE DE LA TEMPÉRATURE DU DISQUE CHAUD ET LE CHOIX DU PAS DE TEMPS.....	133
7.2 STRUCTURE AXISYMÉTRIQUE POUR $Ma \leq 12000$ .....	135

<b>7.3 STRUCTURE OSCILLATOIRE DES CHAMPS THERMIQUE ET HYDRODYNAMIQUE POUR <math>Ma = 12500</math>, CAS IV .....</b>	<b>136</b>
7.3.1 Évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre .....	138
7.3.2 Structure du champ de l'écoulement et du champ thermique, cas IV .....	140
7.3.4 Évolution temporelle de la structure des isothermes et des iso-contours de $V_z$ dans le plan $R-\theta$ à $Z = 0.5$ , cas IV .....	145
7.3.5 Évolution temporelle de la structure de la vitesse transversale à $Z = 0.5$ , cas IV .....	148
7.3.6 Mode des instabilités .....	150
7.3.7 Évolution temporelle de la distribution de la température et des lignes de courant sur la surface libre pour $Ma = 12500$ .....	151
<b>7.4 ÉVOLUTION TEMPORELLE DE LA TEMPÉRATURE D'UN POINT SITUÉ SUR LA SURFACE LIBRE POUR LES CAS IV ET VII, <math>Ma = 12500</math> .....</b>	<b>154</b>
<b>7.5 STRUCTURE DE L'ÉCOULEMENT ET DU CHAMP THERMIQUE POUR <math>Ma = 15000</math> .....</b>	<b>156</b>
7.5.1 Évolution temporelle de la température de trois points particuliers sur la surface libre, $Ma = 15000$ (cas V) .....	156
7.5.2 Structure des isothermes et de la vitesse transversale dans le plan $R-\theta$ à $Z = 0.5$ et la structure des isothermes sur la surface libre pour $Ma = 15000$ (cas V) .....	158
<b>7.6 ORIGINE DES INSTABILITÉS .....</b>	<b>160</b>
<b>7.7 COMPARAISON AVEC LES RÉSULTATS ANTÉRIEURS .....</b>	<b>161</b>
<b>7.8 TRANSITION OSCILLATOIRE / AXISYMETRIQUE, LE PHÉNOMÈNE DE L'HYSTÉRÉSIS .....</b>	<b>163</b>
7.8.1 Évolution temporelle de la température du disque chaud durant son refroidissement .....	163
7.8.2 Évolution temporelle de la distribution de la température de trois points situés sur la surface libre .....	165
7.8.3 Comparaison avec les données expérimentales .....	169

7.9 CONCLUSION .....	170
<b>CHAPITRE 8 RÉSULTATS OBTENUS EN 3D POUR LE SILICONE .....</b>	<b>172</b>
8.1 ÉVOLUTION TEMPORELLE DE LA TEMPÉRATURE DU DISQUE CHAUD.....	172
8.2 STRUCTURE AXISYMÉTRIQUE POUR $Ma < 48$ .....	174
8.3 LA TRANSITION AXISYMÉTRIQUE / 3D PERMANENT POUR $Ma_{cr}^1 = 48$ .....	174
8.3.1 Évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre.....	176
8.3.2 Structure du champ de l'écoulement et du champ thermique pour $Ma = 64$ .....	176
8.3.3 Structure des isothermes, des iso-contours de $V_z$ et de la vitesse transversale dans le plan $R-\theta$ pour $Ma = 64$ .....	183
8.4 TRANSITION 3D STATIONNAIRE / OSCILLATOIRE.....	185
8.4.1 Évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre de la zone .....	187
8.4.2 Structure du champ de vitesse pour $Ma = 128$ .....	187
8.4.3 Évolution temporelle de la structure des isothermes et de la vitesse transversale à $Z = 0.5$ , $Ma = 128$ .....	192
8.4.4 Évolution temporelle de la distribution de la température sur la surface libre pour $Ma = 128$ .....	195
8.5 ORIGINE DES INSTABILITÉS .....	197
8.6 COMPARAISON AVEC LES TRAVAUX ANTÉRIEURS.....	198
8.6 CONCLUSION .....	199
<b>CONCLUSION .....</b>	<b>201</b>
<b>ANNEXE A LISTE DES SYMBOLES.....</b>	<b>205</b>
<b>ANNEXE B ANALYSE ADIMENSIONNELLE DE L'ÉQUATION D'ÉNERGIE ...</b>	<b>209</b>
<b>ANNEXE C DÉRIVATION DES CONDITIONS AUX LIMITES SUR LA SURFACE             LIBRE POUR LE CAS 2D AXISYMÉTRIQUE .....</b>	<b>211</b>
<b>ANNEXE D ORDRE DE GRANDEUR DE <math>(\partial F / \partial Z)^2</math> .....</b>	<b>216</b>
<b>ANNEXE E RÉSULTATS OBTENUS EN 2D POUR UNE ZONE FLOTTANTE DE</b>	

<b>NaNO<sub>3</sub> OPÉRANT EN <math>\mu</math>-g (Ma = 7500, 20000) .....</b>	<b>218</b>
<b>ANNEXE F ÉVOLUTION TRANSITOIRE DU CHAMP THERMIQUE POUR UNE ZONE FLOTTANTE DE NaNO<sub>3</sub> OPÉRANT EN 1-g (Ma = 2500, 7500 ET 20000).....</b>	<b>225</b>
<b>ANNEXE G RÉSULTATS OBTENUS EN 2D POUR LE SILICONE, Ma = 64.....</b>	<b>229</b>
<b>RÉFÉRENCES .....</b>	<b>232</b>

## LISTE DES FIGURES

	<b>Page</b>
Figure 3.1a Configuration géométrique du problème pour le cas 3D avec une surface libre cylindrique.....	18
Figure 3.1b Configuration géométrique du problème pour le cas 2D avec une surface libre déformable.....	18
Figure 3.1 c Configuration géométrique du problème pour le cas 2D avec une surface libre cylindrique.....	18
Figure 4.1 Volume de contrôle typique pour le cas 3D.....	39
Figure 4.2 Volume de contrôle typique pour le cas 2D.....	40
Figure 4.3 Maillage pour le calcul de $F(Z)$ .....	50
Figure 4.4 Domaine de calcul pour le cas 2D avec une surface libre déformable.....	53
Figure 4.5 Domaine de calcul (vue explicative).....	53
Figure 4.6 Organigramme de la procédure de calcul.....	55
Figure 4.7 Profil de la vitesse axiale et de la température sur la surface libre pour 5 différents maillages (Cas 2D avec une surface libre déformable).....	60
Figure 4.8 a Maillage 42 x 50 adopté pour le cas 2D avec une surface libre déformable...	61
Figure 4.8 b Maillage 42 x 40 adopté pour le cas 2D avec une surface libre cylindrique...	61
Figure 4.9 Profil de la vitesse axiale et de la température sur la surface libre parfaitement cylindrique.....	63
Figure 4.10 Profil de la vitesse axiale et de la température sur la surface libre selon $\theta$ à $Z = 0.5$ .....	64
Figure 4.11 Validation des résultats avec les corrélations de Okano et al. (1989).....	66
Figure 4.12 Comparaison numérique / expérimentale de la variation de $V_z$ en fonction de $\Delta T$ pour une zone de $\text{NaNO}_2$ .....	66
Figure 4.13 Évolution temporelle de la température des deux disques telle qu'imposée par Saghir et al. (1992).....	68
Figure 4.14 Comparaison numérique / expérimentale pour les profils de température et de la vitesse axiale sur la surface libre ( $\Delta T = 5^\circ \text{C}$ , huile de Silicone).....	69
Figure 4.15 Comparaison numérique / expérimentale pour les profils de température et de la vitesse axiale sur la surface libre ( $\Delta T = 10^\circ \text{C}$ , huile de Silicone).....	70
Figure 4.16 Variation de la vitesse axiale maximale sur la surface libre en fonction de $\Delta T$ pour $\text{NaNO}_2$ .....	72
Figure 4.17 Profil de la température et de la vitesse axiale sur la surface libre pour 2D et 3D.....	73
Figure 5.1 Évolution temporelle de la température du disque chaud pour le $\text{NaNO}_2$ .....	78
Figure 5.2 Évolution temporelle de la structure des lignes de courant pour $\text{Ma} = 2500$ , $\mu\text{-g}$ .....	81
Figure 5.3 Évolution temporelle du champ thermique pour $\text{Ma} = 2500$ , $\mu\text{-g}$ .....	83
Figure 5.4 Évolution temporelle de la température et de la vitesse axiale le long de la	

	surface libre pour $Ma = 2500$ , $\mu$ -g.....	85
Figure 5.5	Évolution temporelle de la température d'un point situé au milieu de la surface libre pour $Ma = 20000$ , $\mu$ -g.....	88
Figure 5.6	Évolution temporelle de la structure des lignes de courant pour $Ma = 2500$ , 1-g.....	90
Figure 5.7	Évolution temporelle de la structure des lignes de courant pour $Ma = 7500$ , 1-g.....	91
Figure 5.8	Évolution temporelle de la structure des lignes de courant pour $Ma = 20000$ , 1-g.....	92
Figure 5.9	Évolution temporelle de la température et de la vitesse axiale le long de la surface libre pour $Ma = 2500$ , 1-g.....	96
Figure 5.10	Évolution temporelle de la température et de la vitesse axiale le long de la surface libre pour $Ma = 7500$ , 1-g.....	97
Figure 5.11	Évolution temporelle de la température et de la vitesse axiale le long de la surface libre pour $Ma = 20000$ , 1-g.....	98
Figure 5.12	Effet du nombre de Marangoni sur la distribution de la température et de la vitesse axiale sur la surface libre en $\mu$ -g.....	102
Figure 5.13	Effet du nombre de Marangoni sur la structure des isothermes en $\mu$ -g.....	105
Figure 5.14	Effet du nombre de Marangoni sur la distribution de la température et de la vitesse axiale sur la surface libre en 1-g.....	107
Figure 5.15	Effet du nombre de Marangoni sur la structure des isothermes en 1-g.....	109
Figure 5.16	Effet de gravité sur la structure des lignes de courant et sur le champ thermique pour $Ma = 20000$ .....	112
Figure 6.1	Évolution temporelle de la température du disque chaud pour le Silicone.....	115
Figure 6.2	Évolution temporelle de la température et de la vitesse axiale le long de la surface libre pour $Ma = 64$ , $\mu$ -g.....	117
Figure 6.3	Évolution temporelle de la structure des lignes de courant pour $Ma = 64$ , $\mu$ -g.....	120
Figure 6.4	Évolution temporelle du champ thermique pour $Ma = 64$ , $\mu$ -g.....	122
Figure 6.5	Effet du nombre de Marangoni sur la distribution de la température et de la vitesse axiale sur la surface libre.....	124
Figure 6.6	Effet du nombre de Marangoni sur le champ thermique.....	126
Figure 6.7	Effet du rapport géométrique sur la structure des lignes de courant pour $Ma = 128$ .....	128
Figure 6.8	Effet du rapport géométrique sur les profils de température et de $V_z$ sur la surface libre de la zone.....	130
Figure 7.1	Évolution temporelle de la température du disque chaud pour une zone de $NaNO_3$ en 3D.....	134
Figure 7.2a	Évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre pour $Ma = 12000$ .....	137
Figure 7.2b	Structure des isothermes à $Z = 0.5$ pour $Ma = 12000$ et $\tau = 198$ s.....	137
Figure 7.3	Évolution temporelle de la température des différents points situés sur la surface libre pour le cas IV.....	139

Figure 7.4	Structure de l'écoulement pour quatre plans R-Z (cas IV, $Ma = 12500$ ).....	141
Figure 7.5	Structure du champ thermique pour quatre plans R-Z (cas IV, $Ma = 12500$ ).....	142
Figure 7.6	Position du centre du vortex pour deux temps différents $\tau$ et $\tau + \tau_0 / 2$ (cas IV).....	144
Figure 7.7	Évolution temporelle de la structure des isothermes à $Z = 0.5$ pour le cas IV et aux temps $\tau$ , $\tau + \tau_0 / 4$ , $\tau + \tau_0 / 2$ et $\tau + 3 \tau_0 / 4$ respectivement.....	146
Figure 7.8	Évolution temporelle de la structure des iso-contours de $V_z$ à $Z = 0.5$ pour le cas IV et aux temps $\tau$ , $\tau + \tau_0 / 4$ , $\tau + \tau_0 / 2$ et $\tau + 3 \tau_0 / 4$ respectivement.....	147
Figure 7.9	Évolution temporelle de la structure de la vitesse transversale à $Z = 0.5$ pour le cas IV et aux temps $\tau$ , $\tau + \tau_0 / 4$ , $\tau + \tau_0 / 2$ et $\tau + 3 \tau_0 / 4$ respectivement.....	149
Figure 7.10	Évolution temporelle de la distribution de la température sur la surface libre pour le cas IV et aux temps $\tau$ , $\tau + \tau_0 / 4$ , $\tau + \tau_0 / 2$ et $\tau + 3 \tau_0 / 4$ respectivement.....	152
Figure 7.11	a et b) Structure des isothermes et des lignes de courant sur la surface libre de la zone telle que schématisée par Schwabe et Scharmann (1983), c) Solution numérique des lignes de courant pour le cas IV et au temps $\tau$ ....	152
Figure 7.12	Évolution temporelle de la température d'un point particulier situé sur la surface libre pour les cas IV et VII.....	155
Figure 7.13	Évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre pour les cas V.....	157
Figure 7.14	a) Structure des isothermes à $Z = 0.5$ , b) Structure de la vitesse transversale à $Z = 0.5$ , c) Structure des isothermes sur la surface libre pour $Ma = 15000$ .....	159
Figure 7.15	Évolution temporelle de la température du disque no.1 pour deux chemins de refroidissement.....	164
Figure 7.16	Évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre (cas A, B et C).....	166
Figure 7.17	Évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre (cas D, E, F et G).....	167
Figure 8.1	Évolution temporelle de la température du disque chaud pour une zone de Silicone en 3D.....	173
Figure 8.2a	Évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre pour $Ma = 32$ .....	175
Figure 8.2b	Structure du champ de l'écoulement pour $Ma = 32$ .....	175
Figure 8.3	Évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre pour $Ma = 64$ .....	177
Figure 8.4	Structure de l'écoulement pour quatre plans R-Z, $Ma = 64$ .....	178
Figure 8.5	Position du centre du vortex pour $Ma = 64$ .....	180
Figure 8.5c	Vue tridimensionnelle de la position du centre du vortex, $Ma = 64$ .....	181
Figure 8.6	Structure du champ thermique pour quatre plans R-Z, $Ma = 64$ .....	182

Figure 8.7 a)	Structure des isothermes à $Z = 0.5$ , b) Structure des iso-contours de $V_z$	
	c) Structure de la vitesse transversale pour $Ma = 64$ .....	184
Figure 8.8	Structure des isothermes sur la surface libre pour $Ma = 64$ .....	186
Figure 8.9	Évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre pour $Ma = 128$ .....	188
Figure 8.10	Structure de l'écoulement pour quatre plans R-Z, $Ma = 128$ .....	189
Figure 8.11	Position du centre du vortex pour deux temps différents $\tau$ et $\tau + \tau_0 / 2$ , $Ma = 128$ .....	191
Figure 8.12	Évolution temporelle de la structure des isothermes durant une période des oscillations à $Z = 0.5$ , $Ma = 128$ .....	193
Figure 8.13	Évolution temporelle de la structure de la vitesse transversale durant une période des oscillations à $Z = 0.5$ , $Ma = 128$ .....	194
Figure 8.14	Évolution temporelle de la distribution de la température sur la surface libre durant une période des oscillations à $Z = 0.5$ , $Ma = 128$ .....	196
Figure C.1	Relation entre $(r, z)$ et $(r', z')$ .....	211
Figure E.1	Évolution temporelle de la structure des lignes de courant pour $Ma = 7500$ , $\mu$ -g.....	219
Figure E.2	Évolution temporelle du champ thermique pour $Ma = 7500$ , $\mu$ -g.....	220
Figure E.3	Évolution temporelle de la température et de la vitesse axiale le long de la surface libre pour $Ma = 7500$ , $\mu$ -g.....	221
Figure E.4	Évolution temporelle de la structure des lignes de courant pour $Ma = 20000$ , $\mu$ -g.....	222
Figure E.5	Évolution temporelle du champ thermique pour $Ma = 20000$ , $\mu$ -g.....	223
Figure E.6	Évolution temporelle de la température et de la vitesse axiale le long de la surface libre pour $Ma = 20000$ , $\mu$ -g.....	224
Figure F.1	Évolution temporelle du champ thermique pour $Ma = 2500$ , 1-g.....	226
Figure F.2	Évolution temporelle du champ thermique pour $Ma = 7500$ , 1-g.....	227
Figure F.3	Évolution temporelle du champ thermique pour $Ma = 20000$ , 1-g.....	228
Figure G.1	Évolution temporelle de la température et de la vitesse axiale le long de la surface libre pour $Ma = 256$ , $\mu$ -g.....	229
Figure G.2	Évolution temporelle de la structure des lignes de courant pour $Ma = 256$ , $\mu$ -g.....	230
Figure G.3	Évolution temporelle du champ thermique pour $Ma = 256$ , $\mu$ -g.....	231



## LISTE DES TABLEAUX

	<b>Page</b>
Tableau 4.1 Propriétés du NaNO <sub>3</sub> .....	74
Tableau 4.2 Propriétés du Silicone.....	75
Tableau 5.1 Évolution temporelle de $\psi_{max}$ pour Ma = 2500, $\mu$ -g.....	82
Tableau 5.2 Évolution temporelle de la température d'un point situé à Z = 0.5 sur la surface libre, Ma = 2500 ( $\mu$ -g).....	86
Tableau 5.3 Évolution temporelle de $\psi_{max}$ pour Ma = 20000, 1-g.....	95
Tableau 5.4 Évolution temporelle de la température d'un point situé à Z = 0.5 sur la surface libre, Ma = 2500 (1-g).....	99
Tableau 5.5 Influence du nombre de Marangoni sur la température d'un point situé sur la surface libre à Z = 0.6 en $\mu$ -g.....	103
Tableau 5.6 Effet du nombre de Marangoni sur la valeur de $\psi_{max}$ en $\mu$ -g.....	104
Tableau 5.7 Influence du nombre de Marangoni sur la température d'un point situé sur la surface libre à Z = 0.6 en 1-g.....	106
Tableau 5.8 Influence du nombre de Marangoni sur la vitesse axiale d'un point situé sur la surface libre à Z = 0.6 en 1-g.....	108
Tableau 5.9 Influence du nombre de Marangoni sur les valeurs de $\psi_{max}$ en 1-g.....	110
Tableau 5.10 Valeurs de $V_z$ d'un point situé sur la surface libre à Z = 0.6 pour différents nombres de Marangoni en 1-g et en $\mu$ -g.....	111
Tableau 6.1 Évolution temporelle de la température d'un point situé sur la surface libre à Z = 0.5, Ma = 64 .....	116
Tableau 6.2 Évolution temporelle de la vitesse axiale d'un point situé sur la surface libre à Z = 0.5, Ma = 64.....	118
Tableau 6.3 Évolution temporelle de $\psi_{max}$ pour Ma = 64.....	119
Tableau 6.4 Effet du nombre de Marangoni sur la valeur de $V_z$ d'un point situé à Z = 0.5 sur la surface libre.....	125
Tableau 6.5 Effet du paramètre A sur $\psi_{max}$ et $V_{z,max}$ pour Ma = 128.....	129
Tableau 7.1 Cas simulés pour le chauffage du disque no.1.....	135
Tableau 7.2 Coordonnées du centre du vortex.....	143
Tableau 7.3 Comparaison avec les résultats antérieurs pour le NaNO <sub>3</sub> .....	163
Tableau 7.4 Cas simulés pour le refroidissement du disque no. 1 (A = 0.732).....	165
Tableau 7.5 Amplitude crête à crête pour deux chemins différents de refroidissement du disque no.1.....	168
Tableau 8.1 Coordonnées de la position du centre du vortex.....	190
Tableau 8.2 Comparaison avec les résultats antérieurs pour le Silicone.....	199

# **CHAPITRE 1**

## **INTRODUCTION**

Une des techniques utilisées en industrie pour la production des cristaux hautement homogènes et purs est celle de la zone flottante. Cette pratique a l'avantage d'éviter le contact direct de la zone flottante du cristal produit avec d'autres matériaux en éliminant la nécessité d'un contenant et en évitant par conséquent toute contamination. Il s'agit en fait d'une tige polycristalline du matériau en considération tirée lentement à travers un anneau chauffant qui fait fondre une partie de la tige. Celle-ci est maintenue par la tension de surface lorsque sa hauteur est faible dans un environnement où l'attraction gravitationnelle est normale (1-g). En s'éloignant de l'élément chauffant, la partie fondue se refroidit et commence à se solidifier. Lors de la solidification, on espère avoir un mono-cristal.

En raison de la gravité, les cristaux produits sur terre, à l'aide de la technique de la zone flottante, sont de petites dimensions. Par contre, en milieu microgravitationnel (lors des lancements des fusées ou lors des vols des navettes spatiales), les dimensions des cristaux produits sont beaucoup plus grandes (quelque centimètres).

Expérimentalement, les chercheurs effectuent leurs essais dans une zone flottante supportée par deux disques coaxiaux parallèles et dont les températures varient selon le temps. La zone-liquide de matière en fusion est maintenue entre les deux disques par effet de tension superficielle. Dans cette étude, on a adopté cette dernière configuration de la zone flottante. La zone est chauffée par le haut afin de réduire les effets de la convection naturelle. Cependant, il faut tenir compte d'un phénomène physique fort intéressant et complexe appelé la convection thermocapillaire ou la convection de Marangoni. Aussitôt qu'il existe un gradient de température à la surface libre du fluide, une variation de la tension superficielle y

résulte (le fluide chaud se déplace alors vers celui qui est moins chaud) qui, à son tour, engendre une circulation du fluide à cette même surface affectant grandement le champ thermique interne.

Il a été démontré expérimentalement, que lorsque l'écart de température entre les deux disques dépasse un certain seuil critique, l'écoulement dû à l'action thermocapillaire à l'intérieur de la zone flottante et également le champ thermique passent à un état oscillatoire. Ces fluctuations de température causent des rayures sur la surface du cristal et par conséquent, elles peuvent affecter drastiquement la qualité du cristal produit.

Notre étude s'inscrit dans le cadre des investigations théoriques du comportement transitoire des champs thermique et hydrodynamique au sein d'une zone flottante. Ce travail est divisé en deux grandes parties. Dans la première, on s'est intéressé à l'étude de l'évolution transitoire de l'écoulement axisymétrique dans une zone flottante de  $\text{NaNO}_3$ , opérant en  $\mu\text{-g}$  et en  $1\text{-g}$ . On a étudié également le comportement instationnaire de l'écoulement axisymétrique dans une zone flottante de Silicone opérant en milieu microgravitationnel. L'effet de certains paramètres tels que le nombre de Marangoni et le rapport géométrique sur la structure de l'écoulement a été évalué. Dans la seconde partie, en tenant compte du caractère tridimensionnel de l'écoulement, on a étudié la transition axisymétrique / oscillatoire pour une zone flottante de  $\text{NaNO}_3$ , opérant en  $\mu\text{-g}$  et la transition inverse (phénomène de l'hystérésis). On a également étudié la transition axisymétrique / 3D stationnaire et celle 3D stationnaire / oscillatoire à l'intérieur d'une zone de Silicone opérant en  $\mu\text{-g}$ .

## **CHAPITRE 2**

### **REVUE DE LA LITTÉRATURE**

Il est bien établi que la convection thermocapillaire induite par l'existence d'un gradient de température à la surface libre d'une zone flottante telle qu'inventée par Pfann (1966), affecte considérablement les caractéristiques thermique et hydrodynamique. En effet, plusieurs travaux théoriques et expérimentaux ont été consacrés à l'étude de ce problème. Dans ce chapitre, une revue des principales études antérieures sur le sujet est présentée. Une attention particulière est portée sur la transition axisymétrique / oscillatoire au sein d'une zone flottante.

#### **2.1 LA CONVECTION THERMOCAPILLAIRE DANS LA ZONE FLOTTANTE: LES TRAVAUX ANALYTIQUES / NUMÉRIQUES (MODÈLE 2D AXISYMETRIQUE)**

Sur le plan théorique / analytique, depuis les études pionnières de Chang et Wilcox (1975, 1976) sur les effets de la convection thermocapillaire au sein d'une zone flottante, beaucoup d'ouvrages dans le domaine ont suivi. Les premiers calculs des auteurs cités ont d'ailleurs amené à des solutions pour la convection de Marangoni dans une zone flottante cylindrique de Silicone en fusion moyennant une méthode de différences finies. Ces auteurs ont prouvé que la convection thermocapillaire dans une zone flottante de Silicone domine non seulement en  $\mu$ -g mais aussi sur terre.

- **L'écoulement stationnaire**

Clark et Wilcox (1980) ont étudié numériquement l'écoulement thermocapillaire au sein d'une zone flottante de Silicone. Une structure d'écoulement caractérisée par des zones

de recirculation près de la surface libre, dues aux courants de Marangoni, a été obtenue.

Les travaux ultérieurs, réalisés par d'autres chercheurs, couvraient les deux configurations de base, à savoir la configuration "zone entière" ("full-zone") et celle de "zone-moitié" ("half-zone"). La première considère en fait la totalité de la zone flottante avec un chauffage au centre (par anneau chauffant, par exemple). Les températures des disques sont maintenues constantes. La deuxième, quant à elle, simule uniquement la moitié de la zone où on chauffe le disque du haut. De plus, diverses conditions thermiques et hydrodynamiques ont été adoptées. Ainsi, on peut citer en particulier:

\* Kozhoukharova et Slavchev (1986) ont étudié numériquement l'écoulement axisymétrique à l'intérieur d'une zone-entière de Silicone et de  $\text{NaNO}_3$ , en tenant compte de la déformabilité de la surface libre. Ils ont calculé la forme statique de la surface libre et ont effectué un changement de coordonnées pour pouvoir passer d'un domaine physique non rectangulaire à un domaine de calcul rectangulaire. La structure de l'écoulement est caractérisée par la présence de deux bulbes de recirculation dont le centre est situé près de la surface libre. Ces zones de recirculation ne sont pas symétriques par rapport au plan médian de la zone.

\* Duranceau et Brown (1986) ont utilisé la méthode des éléments finis pour simuler l'écoulement axisymétrique au sein d'une zone-entière de Silicone. À l'aide de la méthode de Newton-Raphson, ces auteurs ont déterminé la forme statique de la surface libre. Ensuite, ils ont effectué un changement de coordonnées afin d'avoir un domaine de calcul rectangulaire.

\* Saghir et Rosenblat (1990) ont simulé, à l'aide de la méthode des éléments finis, l'écoulement axisymétrique au sein d'une zone-moitié de  $\text{NaNO}_3$ , opérant sur terre. Ils ont considéré que la surface libre est déformable. La structure de l'écoulement est unicellulaire et dont le centre du vortex est localisé près de la surface libre du côté du disque chaud. En

deuxième partie, ces chercheurs ont étudié le problème de la convection de Marangoni dans une cavité rectangulaire bidimensionnelle de Tetracosane opérant en  $\mu$ -g. En raison de la contamination de la surface libre durant la mission D1, il a été difficile d'effectuer une comparaison entre les données expérimentales et les résultats numériques obtenus pour la configuration rectangulaire. Cependant, la structure de l'écoulement obtenue numériquement est unicellulaire et le centre de tourbillon se déplace vers le centre de la cavité en augmentant le nombre de Marangoni.

\* Hyer et al. (1991) se sont intéressés à étudier l'écoulement thermocapillaire au sein d'une zone-moitié de  $\text{NaNO}_3$ , en utilisant la méthode des éléments finis. Pour les cas simulés sur terre, ils ont tenu compte de la déformabilité de la surface libre. En  $\mu$ -g, ils ont considéré que la surface libre est parfaitement cylindrique. La structure de l'écoulement observée est unicellulaire. Pour des valeurs élevées du nombre de Reynolds, Hyer et al. (1991) ont éprouvé des difficultés numériques.

Ces travaux, entre autres, qui traitent de l'écoulement stationnaire et axisymétrique, ont démontré clairement que:

- i) Les effets de la convection thermocapillaire sont importants non seulement en  $\mu$ -g, mais également dans l'environnement normal de gravité sur terre (surtout lorsque la hauteur de la zone est faible;
- ii) Pour la configuration zone-moitié, la structure de l'écoulement consiste en une grande zone de recirculation dont le centre est situé près de la surface libre;
- iii) Pour la configuration zone-entière, la structure de l'écoulement en  $\mu$ -g est caractérisée par la présence de deux zones de recirculation symétriques par rapport au plan médian, alors que sur terre, l'écoulement perd cette symétrie par rapport au plan médian;

iv) En milieu microgravitationnel, l'intensité des courants thermocapillaires est plus vigoureuse que celle sur terre.

- L'écoulement instationnaire

Jordan et al. (1980) et Takao (1985) ont démontré que le processus dynamique de cristallisation dépend fortement de l'évolution temporelle du champ thermique de la zone flottante. Il est donc nécessaire de suivre cette évolution temporelle durant le processus de chauffage de la zone. Saghir et al. (1992) ont étudié numériquement, à l'aide de la méthode des éléments finis, le comportement transitoire d'une zone-moitié des huiles de Silicone ( $Pr = 196.5$ ) opérant sur terre, en tenant compte de la déformabilité de la surface libre. La température des disques varie linéairement au cours du temps, puis elle demeure constante afin d'atteindre le régime pseudo-permanent pour chaque palier étudié. Les résultats numériques obtenus en régime pseudo-permanent (quand l'écart de température entre les deux disques devient constant), en termes des lignes de courant et de profils de température sur la surface libre, concordent d'une manière satisfaisante avec leurs propres travaux expérimentaux.

Tout récemment, Nguyen et al. (1994), dans le cadre d'un projet effectué pour le compte de l'Agence Spatiale Canadienne, ont étudié numériquement le comportement transitoire d'une zone flottante de  $NaNO_3$ , opérant dans les conditions critiques (i.e. aux valeurs élevées du nombre de Marangoni). Ces auteurs ont adopté la méthode numérique SIMPLE-modifiée pour la résolution des équations de conservation, et ont supposé la surface libre parfaitement cylindrique. En outre du comportement transitoire de la zone elle-même, ils ont déterminé, d'une part l'influence des conditions thermiques imposées, et d'autre part les effets du schéma temporel dictant la variation de la température de l'élément chauffant. Il convient de noter que ces chercheurs ont observé que l'écoulement demeure stable et aucune

fluctuation de température n'a été détectée même pour des valeurs du nombre de Marangoni très élevées de l'ordre de 400000.

## **2.2 LA CONVECTION THERMOCAPILLAIRE DANS LA ZONE FLOTTANTE: LES TRAVAUX EXPÉRIMENTAUX**

Des expériences ont été effectuées sur plusieurs matériaux transparents afin de vérifier les prédictions théoriques concernant la convection au sein d'une zone flottante, particulièrement celle thermocapillaire.

Les expériences en micro-gravité ont été effectuées lors des missions de TEXUS et SPACELAB (Napolitano et Monti, 1987) ou lors des lancements des fusées (" Sounding Rockets", Eyer et al., 1985). Cependant, la simulation de la micro-gravité sur terre a été rendue possible en utilisant de petites dimensions de la zone flottante, permettant ainsi la prédominance de la convection thermocapillaire sur celle de la convection naturelle.

Les courants de Marangoni ont probablement été observés expérimentalement pour la première fois en Allemagne vers la fin de l'année 1976 par les chercheurs Chun et Wuest. Les résultats ont été dévoilés en février 1977 lors d'une présentation à la réunion du Ministère Fédéral Allemand de Recherche et de Technologie, accompagnés d'un film montrant le déroulement de l'expérience. Une zone-moitié de Silicone opérant sur terre a été considérée. Une poudre fine de dioxyde de Titane a été introduite dans le fluide et illuminée par une lame de rayons de laser de 0.1 mm d'épaisseur. Ceci a rendu possible la visualisation de l'écoulement et a permis de prendre des photos et de suivre le déroulement de l'expérience sur des moniteurs. La structure de l'écoulement observée correspondait alors aux prédictions théoriques. De plus, les vitesses de courant ont été estimées par les longueurs des traces des particules illuminées et photographiées, en sachant le temps d'exposition.



Divers travaux expérimentaux ont succédé ces essais. Preisser et al. (1983) par exemple, grâce à une technique expérimentale semblable utilisant des particules traceuses très fines combinées à un procédé d'illumination à laser, ont réussi à observer l'écoulement thermocapillaire à l'intérieur d'une minuscule zone flottante de 6 mm de diamètre et 4 mm de hauteur de Nitrate de Sodium ( $\text{NaNO}_3$ ) opérant sur terre. La zone liquide est maintenue par effet de tension superficielle entre deux disques coaxiaux de graphite. Pour minimiser la perte de chaleur avec le milieu ambiant, Preisser et al. (1983) ont enrobé la zone flottante de  $\text{NaNO}_3$  par un tube de quartz dont le diamètre est légèrement plus grand que celui de la zone flottante. Il convient de noter que la structure de l'écoulement observée pour  $\text{Ma} = 4800$  est toroïdale et le centre du vortex est situé près de la surface libre du côté du disque chaud.

On peut citer par ailleurs les contributions remarquables de Schwabe et ses collègues (Schwabe et al. 1978, 1982, 1989; Schwabe et Scharmann, 1979, 1983, 1984) en plus de celles de Chun et ses collaborateurs (entre autres, Chun, 1980; Chun et Wuest, 1979, 1981, 1982, 1983). En plus de la vérification expérimentale des courants thermocapillaires, ces auteurs se sont aussi penchés sur des études expérimentales des oscillations (comme on va voir plus loin) correspondant aux conditions critiques d'opération et sur leurs conséquences.

À partir de travaux expérimentaux, Okano et al. (1989), par une étude intéressante de l'ordre de grandeur des paramètres caractéristiques adimensionnels, ont proposé plusieurs corrélations permettant d'estimer la vitesse axiale de circulation du fluide sur la surface libre de la zone flottante. En effet, Preisser et al. (1983) et McNeil et al. (1985) ont mesuré expérimentalement cette vitesse induite par la convection de Marangoni dans des zones flottantes de  $\text{NaNO}_3$ , des huiles de Silicone et de Borate de Sodium en fusion. Okano et al. (1989) ont compilé ces données et les ont comparées à leur étude théorique. Une bonne

concordance a été remarquée. Ceci leur a permis de formuler des corrélations expérimentales pour des zones-moitiés.

### **2.3. TRAVAUX EXPÉRIMENTAUX / ANALYTIQUES RELATIFS AUX OSCILLATIONS**

Les observations effectuées sur terre et dans l'espace ont confirmé éloquemment que l'écoulement dû à l'action thermocapillaire à l'intérieur de la zone flottante passe à un état oscillatoire quand il devient suffisamment vigoureux (voir en particulier Chun et Schwabe, 1982; Schwabe, Scharmann et Preisser, 1979; Chun, 1980; et Preisser, Schwabe et Scharmann, 1983). On peut remarquer en toute évidence que la plupart de ces travaux ont été accomplis par les chercheurs D. Schwabe et Ch. H. Chun et leurs collègues en Allemagne. Ces derniers ont opté pour des liquides transparents ayant un nombre de Prandtl relativement élevé comme le  $\text{NaNO}_3$ , par exemple ( $\text{Pr} \approx 8.9$ ). En inventant une technique expérimentale innovatrice utilisant des particules traceuses très fines combinées à une illumination précise à laser, la structure de l'écoulement oscillatoire a été bel et bien observée visuellement pour la première fois; alors que les fluctuations en température ont été enregistrées par un thermocouple miniature inséré directement dans le liquide. La circulation du fluide à la surface libre a été déterminée optiquement. Deux modes distincts d'oscillation ont pu être déterminés: le mode symétrique observé pour le rapport géométrique  $R_0 / H < 0.77$  et le mode asymétrique alors détecté pour  $0.71 < R_0 / H < 1.43$  ( $R_0$  et  $H$  étant respectivement le rayon et la hauteur de la zone). Dans ce dernier mode, il est intéressant de mentionner que l'axe des tourbillons est incliné par rapport à l'axe principal de la zone et tout le champ de l'écoulement tourne autour de ce dernier. Par contre, pour le mode symétrique, le lieu de la position du centre du vortex dans le plan  $R-\theta$  est symétrique par rapport au point de la singularité de la section.

Le mécanisme physique qui régit ce comportement oscillatoire fascinant reste encore obscur. Chun (1984) et Preisser et al. (1983), par exemple, croient que la convection thermocapillaire devient instable (i.e. oscillatoire) quand le nombre de Marangoni, qui est défini comme étant le rapport des effets de transfert de chaleur par convection à ceux dus à la diffusion, dépasse une certaine valeur critique, soit  $Ma_g \approx 10^4$ . Cette valeur critique, qui reste sensiblement la même sur terre et dans l'espace, semble être proportionnelle à  $Pr^{-0.75}$  (Velten et al., 1990 et Schwabe et al., 1990) et augmenter linéairement selon le rapport  $R_o / H$ .

Schwabe et Scharmann (1983) ont placé trois thermocouples à trois positions angulaires différentes sur la surface libre d'une zone-moitié de  $NaNO_2$  opérant sur terre. Le rapport géométrique de la zone est supérieur à 1.5. Ces chercheurs ont prouvé que l'écoulement oscillatoire est une distorsion de l'état laminaire sous forme d'une onde thermique qui se propage sur la surface libre de la zone, selon la direction circonférentielle.

D'un autre côté, Vargas et al. (1982) et Kamotani et al. (1984) ont préconisé que le nombre de Marangoni ne serait pas le seul et unique paramètre-clé dictant la transition axisymétrique / oscillatoire. Ils ont conclu à partir de leurs observations expérimentales que la flexibilité de la surface libre de la zone constitue un facteur important dans la cause des oscillations. Ostrach, Kamotani et Lai (1985) ont d'ailleurs proposé un modèle physique fort intéressant pour expliquer ce phénomène. Selon eux, la transition axisymétrique / oscillatoire serait causée par le retard en réponse entre l'écoulement thermocapillaire surfacique et celui de retour provenant de l'intérieur de la zone. Sous certaines conditions critiques, ce retard qui est caractérisé par un paramètre adimensionnel de la forme  $\{1 / Pr\} |\partial\sigma / \partial T| \{\Delta T / \sigma\}$  pour  $Pr \geq 1$  ou  $Pr |\partial\sigma / \partial T| \{\Delta T / \sigma\}$  pour  $Pr \ll 1$ , pourrait engendrer une déviation périodique dans l'équilibre des forces visqueuses causant ainsi des oscillations. Ce modèle semble être bien vérifié contre leurs propres mesures expérimentales.

Kamotani et Lee (1989) ont étudié expérimentalement l'écoulement oscillatoire au sein d'une zone-entière de l'huile de Silicone ( $Pr = 27$ ) opérant sur terre. La zone est chauffée au centre à l'aide d'un anneau chauffant. Un thermocouple très fin (0.005 mm de diamètre) est inséré dans la zone liquide pour détecter les fluctuations de température. En augmentant le chauffage de la zone, ces chercheurs ont observé que la structure du champ thermique devient oscillatoire. L'existence d'une très mince couche limite thermique, le long de la surface libre de la zone, pourrait être une cause possible d'un tel écoulement oscillatoire.

Napolitano et Monti (1987) sont aussi du même avis qu'Ostrach et ses collègues stipulant que le nombre de Marangoni ne serait pas le seul et unique paramètre caractérisant la transition axisymétrique / oscillatoire. Selon ces chercheurs, cette transition se produit lorsque le nombre de Weber dynamique  $We_d$  (défini comme étant le rapport de la pression dynamique  $\rho V^2 / 2$  sur la rigidité due à la tension superficielle  $\sigma / L$  à la surface libre de la zone) dépasse un certain seuil critique. Supportés par une validation plutôt limitée cependant contre des données expérimentales, ils ont proposé un nouveau paramètre adimensionnel  $S = (2 We_d)^{1/2}$  pour caractériser le passage aux oscillations.

D'autre part, il est intéressant de mentionner les travaux expérimentaux d'Eyer et ses collègues (1985) qui ont prouvé que les oscillations des courants thermocapillaires causent des rayures sur la surface d'un cristal de Silicone. Ces chercheurs ont couvert la surface libre de la zone par un gaz inerte afin de supprimer les courants de Marangoni et n'ont pas, en effet, remarqué de rayures.

## **2.4 ÉTUDES NUMÉRIQUES RELATIFS AUX OSCILLATIONS**

Les observations expérimentales montrant les oscillations ont suscité depuis plusieurs études numériques de la part des chercheurs. Rupp, Müller et Neumann (1989) sont

probablement les premiers à simuler numériquement un écoulement oscillatoire à l'intérieur d'une zone-moitié, en supposant que la surface libre de la zone est radialement non-déformable. Ils ont utilisé une méthode numérique basée sur l'approche de volumes de contrôle finis. Les fréquences d'oscillation obtenues numériquement diffèrent de 25% des mesures expérimentales. On remarque, en plus, que les valeurs prédites pour le nombre de Marangoni critique  $Ma_c$  (correspondant à des fluides semi-conducteurs) sont presque le double de celles expérimentales. Il convient de noter que Rupp et ses collègues (1989) ont observé pour les fluides à faible nombre de Prandtl, la rotation du tore déformé de la structure de l'écoulement, dans le plan  $R-\theta$ , autour de l'axe principal de la zone.

Kazarinoff et Wilkowski (1989, 1990a, b et c) ont modélisé numériquement une zone-entière de Silicone en considérant que la surface libre est déformable, mais conservent par contre l'axisymétrie. Ces auteurs ont réussi à obtenir le comportement oscillatoire de l'écoulement, et ont même étudié le phénomène de bifurcation. Ayant rencontré des problèmes de divergence en essayant le cas de la surface libre non-déformable, ils ont stipulé que l'existence d'une surface libre déformable est nécessaire pour avoir un écoulement réaliste. Les structures oscillatoires obtenues pour le champ hydrodynamique interne sont cependant différentes de celles observées expérimentalement. D'après Kazarinoff et Wilkowski, ces structures peuvent correspondre probablement à des états instables de l'écoulement subissant alors des conditions d'opérations critiques. Ils ont exprimé, par contre, une certaine réserve quant à l'influence des approximations numériques induites par la méthode de calcul sur les solutions oscillatoires obtenues (Kazarinoff et Wilkowski, 1990b).

Levenstam et Amberg (1995) ont analysé numériquement la stabilité de l'écoulement thermocapillaire dans une zone-moitié d'un fluide à faible nombre de Prandtl ( $Pr = 0.01$ ) en utilisant la méthode des éléments finis. Le rapport géométrique de la zone est fixé 1. Ces chercheurs ont considéré que la surface libre de la zone flottante est parfaitement cylindrique

et adiabatique. Ils ont trouvé deux nombres de Reynolds critiques. Pour  $Re = 1960$  (selon leur notation), l'écoulement thermocapillaire axisymétrique devient tridimensionnel mais en demeurant stationnaire. Sur la surface libre de la zone et selon la direction circonférentielle, le fluide circule du côté froid vers le côté chaud, ce qui est contraire au mécanisme de la convection thermocapillaire. Pour  $Re = 6250$ , l'écoulement tridimensionnel stationnaire passe à un état oscillatoire. Ces deux instabilités sont de nature hydrodynamique et elles s'expliquent à l'aide de la théorie de l'anneau du vortex.

Tout récemment, Savino et Monti (1996) ont étudié numériquement l'écoulement thermocapillaire au sein d'une zone-moitié des huiles de Silicone ( $Pr = 30$  et  $Pr = 74$ ) en utilisant la méthode des différences finies. Ils ont considéré que la surface libre est non-déformable, selon la direction radiale, et parfaitement adiabatique. Ces chercheurs ont déterminé deux modes distincts des instabilités à savoir le mode "onde fixe" (standing-wave) et le mode d'une "onde mobile" (traveling-wave). Au début des oscillations, le mode "onde fixe", caractérisé par la pulsation du champ thermique, domine. Lorsque les perturbations deviennent de plus en plus importantes, une onde se propage selon la direction circonférentielle et cause la rotation des poches de température "temperature spots" autour de l'axe principal de la zone. Il importe de noter que l'instabilité observée par Savino et Monti (1996) est de nature thermique. En effet, la circulation du fluide sur la surface libre, selon la direction circonférentielle, se fait de la région chaude vers celle froide conformément au mécanisme de la convection thermocapillaire.

## **2.5 ÉTUDES THÉORIQUES DE LA STABILITÉ HYDRODYNAMIQUE**

Dans le cadre de la théorie de la stabilité hydrodynamique, plusieurs chercheurs ont étudié le problème de l'écoulement oscillatoire en tenant compte des conditions de stabilité et d'instabilité pour différentes géométries. Plusieurs mécanismes d'instabilité ont été proposés.

L'un d'entre eux est l'instabilité d'une onde de surface étudiée par Smith et Davis (1983a). Celle-ci résulte de l'interaction des perturbations des vitesses, induites par une perturbation à la surface libre, accompagnée par un cisaillement de l'état de base (base-state shear). L'effet thermocapillaire ne sert ici qu'à maintenir l'état de base de ce mécanisme d'instabilité. Selon Smith et Davis (1983a), l'instabilité d'une onde de surface peut se trouver aussi bien dans une configuration d'une cavité rectangulaire que dans celle d'une zone flottante.

Smith et Davis (1983b), Smith (1986) et Smith(1988) stipulent que les instabilités peuvent être générées par des ondes hydrothermiques. Le comportement de ce type d'instabilité dépend des profils de vitesse correspondant à l'état de base. Il dépend aussi fortement de la valeur du nombre de Prandtl. En effet, pour une zone flottante, les ondes hydrothermiques se manifestent sous forme des rouleaux qui circulent presque perpendiculairement aux courants de surface pour  $Pr < 1$ . Dans le cas où  $Pr > 1$ , ces ondes sont caractérisées par des rouleaux bidimensionnelles dont le sens de circulation est opposé à celui du courant de surface.

Chen et Roux (1992) et Kuhlmann et Rath (1993) ont étudié la stabilité linéaire de l'écoulement axisymétrique et stationnaire d'une zone flottante. Ils ont résolu les équations de Navier-Stokes pour obtenir l'état de base. Afin de résoudre le problème aux valeurs propres, correspondant aux perturbations tridimensionnelles, ils ont utilisé diverses méthodes spectrales. Leurs résultats ont démontré que pour des faibles nombres de Prandtl, on assiste tout d'abord à une perte de symétrie de révolution de la structure de l'écoulement avant que ce dernier devient dépendant du temps. Par contre, pour des valeurs élevées du nombre de Prandtl, le mode neutre apparaît comme étant une combinaison de deux ondes, de sens opposés, qui se propagent au niveau de la surface libre selon la direction circonférentielle.

Shen et al. (1990) ont déterminé numériquement, à l'aide de la méthode SLOR (Successive Line Over-Relaxation), l'état de base de l'écoulement thermocapillaire dans une zone flottante. La surface libre de la zone est considérée comme parfaitement cylindrique. Ces chercheurs ont appliqué la théorie de la stabilité de l'énergie afin d'obtenir les nombres de Marangoni critiques, au dessous desquels la structure de l'écoulement est stable aux perturbations axisymétriques. Ayant rencontré des difficultés numériques lors du calcul de l'état de base de l'écoulement pour les fluides dont le nombre de Prandtl est relativement élevé, Shen et al. (1990) n'ont pas réussi à déterminer le nombre de Marangoni critique pour  $Pr > 1.6$ .

Neitzel et al. (1991) ont étendu l'analyse de la stabilité d'énergie au cas d'une zone flottante soumise à des perturbations non-axisymétriques. Ils ont testé deux fluides: le  $\text{NaNO}_3$  ( $Pr = 7$ ) et le KCL ( $Pr = 1$ ). Le nombre de Marangoni critique obtenu est plus faible que celui correspondant aux données expérimentales de Preisser et al. (1983). Neitzel et al. (1991) ont attribué cette différence au fait que les propriétés thermophysiques des matériaux utilisées ne sont pas bien connues et à la supposition d'une surface libre non-déformable selon la direction radiale.

En dépit des résultats intéressants obtenus par la théorie de la stabilité hydrodynamique, la valeur du nombre de Marangoni critique diffère généralement de celle obtenue expérimentalement. Cette différence peut être expliquée par le fait que la théorie de la stabilité linéaire considère le cas idéal de l'état de base stationnaire, tandis que lors des expériences effectuées en milieu microgravitationnel, le développement de l'écoulement au cours du temps est dynamique. Vu que le temps disponible en  $\mu\text{-g}$  est limité, le chauffage de la zone flottante doit se faire dans une période assez courte. Par conséquent, il est impératif de tenir compte du caractère instationnaire de l'écoulement.



## **2.6 OBJECTIFS DE LA PRÉSENTE ÉTUDE**

**Malgré tous les travaux présentés, que ce soit sur le plan théorique / numérique et expérimental, le comportement oscillatoire de l'écoulement au sein d'une zone flottante n'est pas encore très bien expliqué à ce jour et le présent travail vise donc à élucider ce phénomène physique fascinant. L'accent a été mis sur la transition axisymétrique / oscillatoire pour deux fluides différents: le Silicone ( $Pr = 0.016$ ) et le  $NaNO_3$  ( $Pr = 8.9$ ). De plus, on s'est intéressé à tenir compte de la déformabilité de la surface libre pour l'écoulement axisymétrique et instationnaire au sein d'une zone flottante de  $NaNO_3$ , opérant sur terre.**

**Le présent travail se divise en huit chapitres, incluant l'introduction. Ainsi, après la présentation de la revue de littérature au chapitre deux, la modélisation mathématique (2D axisymétrique et 3D) du phénomène fait l'objet du chapitre trois. Les configurations géométriques (correspondant aux cas suivants: cas 2D axisymétrique avec une surface libre déformable, cas 2D axisymétrique avec une surface libre parfaitement cylindrique et cas 3D) sont présentées, les équations de conservation avec leurs conditions initiales appropriées qui en découlent sont alors mis en évidence au troisième chapitre. Le chapitre quatre donne un aperçu sur la méthode numérique SIMPLE-modifiée et sur l'approche numérique spécial adopté pour déterminer la forme de la surface libre. Les résultats des calculs concernant l'évolution temporelle des champs thermique et hydrodynamique d'une zone flottante axisymétrique de  $NaNO_3$ , opérant en  $\mu$ -g et en 1-g sont montrés au chapitre cinq. Le chapitre six aborde le comportement transitoire de l'écoulement axisymétrique dans une zone flottante de Silicone opérant en milieu microgravitationnel. Le chapitre sept traite la transition axisymétrique / oscillatoire et le phénomène de l'hystérésis au sein d'une zone flottante de  $NaNO_3$ . Finalement, la transition axisymétrique / 3D permanent et celle 3D stationnaire / oscillatoire dans une zone flottante de Silicone font l'objet du chapitre huit.**

## **CHAPITRE 3**

### **MODÉLISATION MATHÉMATIQUE**

Ce chapitre sera consacré à la formulation mathématique du problème considéré. On présentera les équations de conservation et leurs conditions aux limites et conditions initiales appropriées sous forme dimensionnelle et adimensionnelle. La liste des paramètres caractéristiques gouvernant le problème sera aussi présentée.

#### **3.1 CONFIGURATIONS GÉOMÉTRIQUES**

Dans la première partie de ce travail, on a étudié numériquement l'écoulement axisymétrique et le transfert de chaleur au sein d'une zone flottante opérant en 1-g et en  $\mu$ -g. En deuxième partie, on s'est intéressé au caractère tridimensionnel de l'écoulement dans une zone flottante opérant en  $\mu$ -g. Par conséquent, on présentera dans cette section les trois configurations géométriques du problème étudié.

Les figures 3.1 a, b et c illustrent respectivement la configuration géométrique d'une zone flottante pour le cas 3D avec une surface libre cylindrique ( $\mu$ -g), celle pour le cas 2D axisymétrique avec une surface libre déformable (1-g) et celle pour le cas 2D avec une surface libre cylindrique ( $\mu$ -g).

Pour les trois configurations, on considère une zone flottante supportée par deux disques coaxiaux parallèles de rayon  $R_0$  (Fig. 3.1). La zone est chauffée par le haut afin de réduire les effets dus à la convection naturelle. Le matériau en fusion est maintenu entre les deux disques par l'effet de la tension superficielle. La hauteur de la zone-liquide de la matière en fusion est  $H$ . Les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  constituent le système de

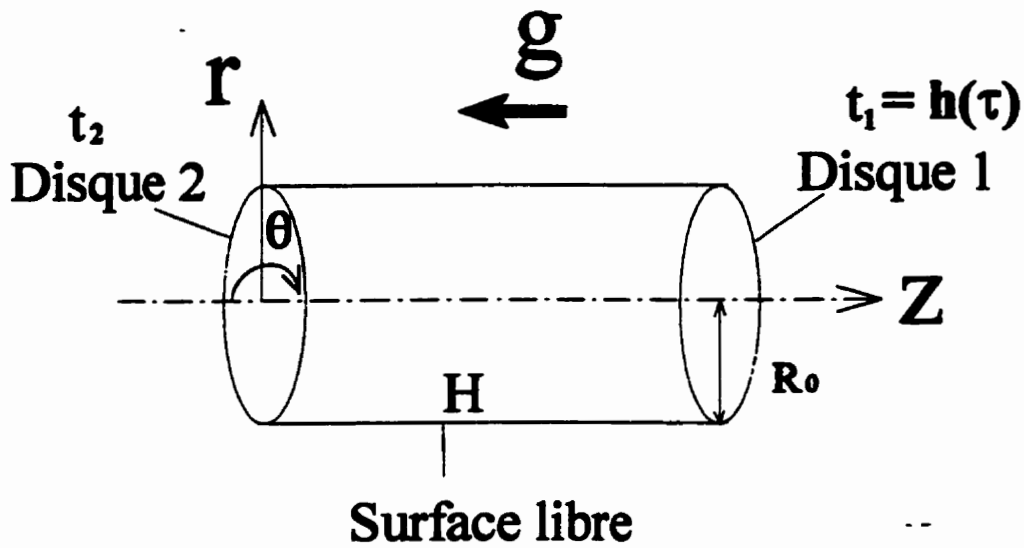


Figure 3.1 a Configuration géométrique du problème pour le cas 3 D avec une surface libre cylindrique

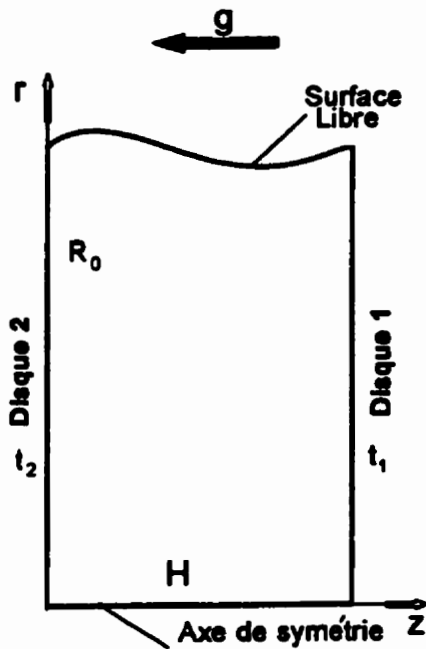


Figure 3.1 b Configuration géométrique du problème pour le cas 2D avec une surface libre déformable

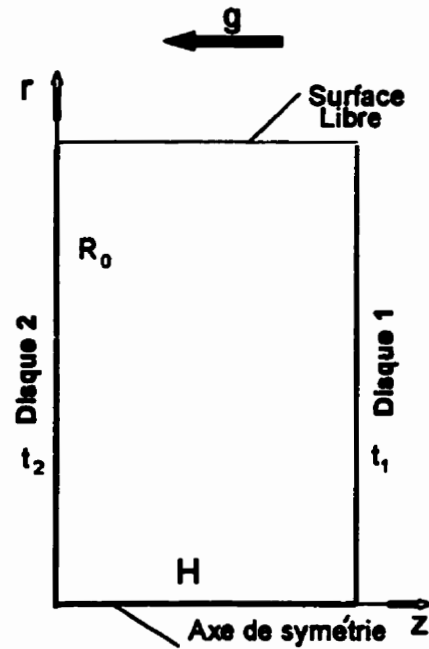


Figure 3.1 c Configuration géométrique du problème pour le cas 2D avec une surface libre cylindrique

référence choisi où l'axe  $z$  coïncide avec la direction de la force gravitationnelle  $g$ . Les températures des disques sont respectivement  $t_1$  et  $t_2$ . Ces dernières sont a priori fonction du temps.

### 3.2 HYPOTHÈSES SIMPLIFICATRICES

En raison de la complexité que peut présenter une telle étude, les hypothèses simplificatrices suivantes ont été adoptées:

(H1) Le fluide est visqueux, incompressible et possède des propriétés physiques qui sont considérées comme constantes. Ces propriétés sont évaluées à la température de fusion  $t_m$  du matériau à l'exception de la densité qui apparaît dans le terme des forces de gravité;

(H2) La dissipation d'énergie due aux forces visqueuses et le travail dû à la force de compression sont négligeables;

(H3) Pour les cas simulés en milieu microgravitationnel ( $10^{-4}$  g), la surface libre est considérée comme étant parfaitement cylindrique, alors que sur terre, la surface libre est déformable;

(H4) La surface libre de la zone est considérée adiabatique

- L'hypothèse H1 est en fait l'hypothèse de Boussinesq. Elle est valide pour les fluides dont les propriétés thermophysiques ne varient pas beaucoup avec la température (et / ou la pression).
- L'hypothèse H2 est justifiée par le fait que nous considérons un écoulement laminaire (nombre de Reynolds = nombre de Marangoni / nombre de Prandtl relativement faible et

le nombre d'Eckert extrêmement petit). L'analyse de l'ordre de grandeur de ces nombres présentée dans l'Annexe B justifiera cette hypothèse.

- À propos de l'hypothèse H3, la déformation de la surface libre en  $\mu$ -g est très faible. En effet, cette déformation ne dépasse pas le seuil de 0.08% de la valeur du rayon nominal de la zone. Notons que cette hypothèse a été retenue par plusieurs chercheurs dont Rupp et al. (1989), Levenstam et Amberg (1995) et Savino et Monti (1996).
- L'hypothèse H4 stipule que la perte de chaleur entre la surface libre et le milieu ambiant est négligeable. Cette hypothèse approxime d'une manière réaliste la convection thermique le long de la surface libre rencontrée dans les installations expérimentales. En effet, on cherche dans la plupart des cas à minimiser les pertes par convection et par rayonnement entre la surface libre et le milieu ambiant. Preisser et al. (1983) , par exemple, ont enrobé la zone flottante de NaNO<sub>3</sub> par un tube de quartz dont le diamètre est légèrement plus grand que celui de la zone flottante.

### 3.3 ÉQUATIONS DE CONSERVATION

#### 3.3.1 Cas 3D

En utilisant les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  comme système de référence et en tenant compte des hypothèses précitées, l'équation de continuité, les équations de Navier-Stokes et l'équation d'énergie, pour la configuration générale 3D de la zone flottante (Fig. 3.1a), s'écrivent de la manière suivante (Yuan 1967; Schlichting, 1979):

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho_M \left( \frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu_M \left( \nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (3.2)$$

$$\rho_M \left( \frac{Dv_\theta}{D\tau} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu_M \left( \nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \quad (3.3)$$

$$\rho_M \left( \frac{Dv_z}{D\tau} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu_M \nabla^2 v_z - \rho g \quad (3.4)$$

$$\rho_M C_p \left( \frac{Dt}{D\tau} \right) = k_M \nabla^2 t \quad (3.5)$$

où

$$\frac{D}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad \dots \quad (3.6 a)$$

et

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.6 b)$$

### 3.3.2 Cas 2D axisymétrique

Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie s'écrivent, dans le système (r- z) pour un écoulement axisymétrique (Fig. 3.1 b et c), comme suit:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (3.7)$$

$$\rho_M \left( \frac{Dv_r}{D\tau} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu_M \left( \nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} \right) \quad (3.8)$$

$$\rho_M \left( \frac{Dv_z}{Dt} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu_M \nabla^2 v_z - \rho g \quad (3.9)$$

$$\rho_M C_p \left( \frac{Dt}{Dt} \right) = k_M \nabla^2 t \quad (3.10)$$

où

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.11 a)$$

et

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.11 b)$$

### 3.4 CONDITIONS AUX LIMITES

Pour définir complètement le problème étudié, il est impératif d'introduire les conditions aux limites qui sont propres à celui-ci. Les conditions aux limites seront données séparément pour l'écoulement tridimensionnel avec une surface libre cylindrique, l'écoulement axisymétrique avec une surface libre déformable et finalement l'écoulement axisymétrique avec une surface libre parfaitement cylindrique.

#### 3.4.1 Conditions aux limites pour l'écoulement tridimensionnel avec une surface libre cylindrique (Fig. 3.1 a):

Les conditions aux limites peuvent être établies comme suit:

- sur le disque no. 2:

$$* z=0: \quad v_r = v_\theta = v_z = 0, \quad t = t_2 = t_M \quad (3.12)$$

- sur le disque no. 1:

$$* z = 1: \quad v_r = v_\theta = v_z = 0, \quad t = t_1 = h(\tau) \quad (3.13)$$

où  $h(\tau)$  est une fonction de temps connue

- sur la surface libre de la zone:

\*  $r = R_o$ :

$$v_r = 0 \quad (3.14a)$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial t}{\partial z} \left| \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right| = -\mu_M \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (3.14 b)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} \left| \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right| = -\mu_M \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \quad (3.14 c)$$

$$\frac{\partial t}{\partial r} = 0 \quad (3.14 d)$$

Les équations (3.12) et (3.13) expriment les conditions d'adhérence et d'imperméabilité habituellement rencontrées sur les surfaces solides. Notons que la température du disque 1,  $t_1$ , est fonction du temps alors que celle du disque 2,  $t_2$ , est égale à la température de fusion  $t_M$  du matériau considéré. Quant aux équations (3.14 a, b, c et d), elles spécifient les conditions hydrodynamiques et thermiques régissant la surface libre de la zone. On suppose tout d'abord qu'il n'y a pas de fluide sortant ou entrant à travers la surface libre de la zone (Eqn. 3.14 a). Les équations (3.14 b et c) expriment respectivement l'équilibre des contraintes de cisaillement dans la direction axiale et celle circonférentielle. L'équation (3.14d) stipule que la surface libre est considérée adiabatique, telle que discutée au paragraphe 3.2.



**3.4.2 Conditions aux limites pour l'écoulement axisymétrique avec une surface libre déformable (Fig. 3.1 b):**

Sur les deux disques, on retrouve les mêmes conditions d'adhérence et d'imperméabilité (Eqn. 3.12 et 3.13). Sur la ligne de centre, on retrouve la condition de symétrie:

$$r = 0: \quad v_r = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial t}{\partial r} = 0 \quad (3.15)$$

En ce qui concerne la surface libre, on retrouve:

$$r = R_0:$$

$$\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}} \left( v_r - \frac{\partial f}{\partial z} v_z \right) = 0 \quad (3.16a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} 2 \mu_M \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \mu_M \left[ 1 - \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \right] \left[ \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] = \\ - \frac{|\partial \sigma|}{\partial t} \left[ 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \right]^{1/2} \left[ \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial t}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (3.16 b)$$

$$\begin{aligned} p - p_\infty - \frac{2 \mu_M}{\left[ 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \right]} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) \right] = \\ \frac{\sigma_M}{\left[ 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \right]^{3/2}} \left[ \frac{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}{f} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (3.16 c)$$

$$\frac{\partial t}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial t}{\partial z} = 0 \quad (3.16d)$$

où  $f = f(z)$  est le rayon déformé.

L'équation 3.16 a stipule que le flux massique est nulle à travers la surface libre de la zone. Les équations 3.16 b et c expriment respectivement l'équilibre des contraintes dans la direction tangentielle et la direction normale. Dans l'équation 3.16 d, on considère que la surface libre est adiabatique. Les détails de la dérivation conduisant à l'obtention des équations 3.16 a, b, c et d se trouvent dans l'Annexe C. Les conditions aux limites pour la fonction  $f(z)$  sont:

$$\text{pour } z=0 \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\tan \gamma \quad (3.17)$$

$$\text{pour } z=H \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \tan \gamma \quad (3.18)$$

$$f(0) = f(H) = R_0 \quad (3.19)$$

$$\int_0^H [f(z)]^2 dz = R_0^2 H \quad (3.20)$$

où  $\gamma$  est l'angle de contact entre le liquide et la paroi solide ( $\gamma \approx 2.5^\circ$  pour  $\text{NaNO}_3$ , en particulier, voir Lan et Kou 1990). L'équation (3.20) exprime la conservation du volume total du liquide.

### 3.4.3 Conditions aux limites pour l'écoulement axisymétrique avec une surface libre cylindrique (Fig. 3.1 c):

Les conditions aux limites le long de la surface libre s'écrivent comme suit:

\*  $r = R_0$ :

$$v_r = 0 \quad (3.21a)$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial t}{\partial z} \left| \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right| = -\mu_M \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (3.21 b)$$

$$\frac{\partial t}{\partial r} = 0 \quad (3.21 c)$$

L'équation 3.21a exprime qu'il n'y a pas de fluide qui entre ou qui sort à travers la surface libre de la zone. Quant à l'équation (3.21b), elle exprime l'équilibre des contraintes de cisaillement dans la direction axiale. L'équation (3.21c) indique que la surface libre est isolée thermiquement.

### 3.5 CONDITIONS INITIALES

En plus des conditions aux limites précédentes, il nous faut spécifier les conditions initiales pour pouvoir résoudre d'une manière adéquate le problème transitoire. Dans le cadre de cette étude, nous avons adopté les conditions initiales suivantes:

$$\tau = 0: \quad v_r = v_\theta = v_z = 0, \quad t = t_M \quad (3.22)$$

Elles correspondent effectivement à l'état de repos total de la zone où le liquide est à sa température de fusion  $t_M$ . Le choix de ces conditions a été motivé principalement par le fait que nous désirons simuler le plus fidèlement possible les conditions réelles alors imposées sur une zone flottante. On voulait s'assurer également que le champ de température et de vitesse est bel et bien symétrique au début du processus du calcul.

### 3.6 MODIFICATIONS DE L'ÉQUATION DE NAVIER-STOKES SELON Z

Selon l'hypothèse de Boussinesq, toutes les propriétés thermophysiques du fluide sont considérées constantes à l'exception de la densité  $\rho$  qui apparaît dans le terme de la force d'Archimède (Eqns. 3.4 et 3.9). Cette densité peut être linéarisée comme suit:

$$\rho = \rho_M [1 - \beta_M (t - t_M)] \quad (3.23)$$

où  $\beta_M$  est le coefficient d'expansion volumique du matériau considéré.

Ainsi, il est possible d'introduire une nouvelle définition de la pression, appelée pression modifiée  $p_1$ , qui comprend à la fois la pression thermodynamique  $p$ , la pression ambiante  $p_\infty$  et celle hydrostatique ( $\rho_M g z$ ):

$$p_1 = p - p_\infty + \rho_M g z \quad (3.24)$$

Cette nouvelle définition de la pression nous permet alors d'écrire:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = -\frac{\partial p_1}{\partial z} + \rho_M \beta_M (t - t_M) g \quad (3.25)$$

Cette modification est donc à tenir compte lors de la considération des équations de Navier-Stokes.

### 3.7 FORME ADIMENSIONNELLE DES ÉQUATIONS DE CONSERVATION

Avant de procéder à la résolution des équations de conservation, il est avantageux d'écrire ces équations avec leurs conditions aux limites et initiales appropriées sous une forme adimensionnelle afin de faire apparaître les paramètres adimensionnels qui

caractérisent le problème étudié. Pour cela, il nous faut choisir une longueur, une vitesse, une pression, un temps et une différence de température de référence.

On a adopté les grandeurs de référence suivantes:

$H$ : comme longueur de référence

$|\partial\sigma / \partial t| (\Delta t / \mu_M)$ : comme vitesse de référence

$\rho_M [|\partial\sigma / \partial t| (\Delta t / \mu_M)]^2$ : comme pression de référence

$\mu_M H / |\partial\sigma / \partial t| \Delta t$ : comme temps de référence,

et  $\Delta t = t_1 - t_M$ : comme une différence de température de référence

où  $t_1$  est la température du disque 1 sur chaque palier (c.a.d. quand la température imposée au disque 1 atteint une de ses valeurs asymptotiques, voir plus loin, Fig. 5.1).

Les variables adimensionnelles sont alors définies comme suit:

$$R = \frac{r}{H}, \quad Z = \frac{z}{H}, \quad F(Z) = \frac{f(z)}{H} \quad (3.26a)$$

$$V_z = \frac{v_z \mu_M}{|\frac{\partial\sigma}{\partial t}| \Delta t}, \quad V_r = \frac{v_r \mu_M}{|\frac{\partial\sigma}{\partial t}| \Delta t}, \quad V_\theta = \frac{v_\theta \mu_M}{|\frac{\partial\sigma}{\partial t}| \Delta t} \quad (3.26b)$$

$$P_1 = \frac{p_1 \mu_M^2}{\rho_M \left( \left| \frac{\partial\sigma}{\partial t} \right| \Delta t \right)^2} \quad (3.26c)$$

$$\tau^* = \frac{\tau \left( \left| \frac{\partial\sigma}{\partial t} \right| \Delta t \right)}{\mu_M H} \quad (3.26d)$$

$$T = \frac{t - t_M}{\Delta t} \quad (3.26e)$$

- Commentaires sur le choix de la vitesse de référence

Plusieurs chercheurs dont Rupp et al. (1989) Savino et Monti (1996) ont adopté  $\alpha / H$  comme vitesse de référence. À notre avis, il est nécessaire que le choix de la vitesse de référence reflète le mécanisme de la convection thermocapillaire qui est le moteur du mouvement dans cette étude. On a donc considéré l'équation 3.14 b qui décrit la condition de l'équilibre des contraintes de cisaillement dans la direction axiale. Cette dernière équation s'écrit sous forme adimensionnelle comme suit:

$$\frac{\Delta t |\partial \sigma| \partial T}{H |\partial t| \partial Z} = -\mu_M v_{ref} \frac{\partial V_z}{\partial R} \quad \dots \quad (3.27)$$

En supposant que les différents termes de l'équation (3.27) sont du même ordre de grandeur, la vitesse de référence,  $v_{ref}$ , sera donc donnée par l'expression suivante:  $|\partial \sigma / \partial t| (\Delta t / \mu_M)$ . Signalons que Levenstam et Amberg (1995) ont également adopté  $|\partial \sigma / \partial t| (\Delta t / \mu_M)$  comme vitesse de référence .

### 3.7.1 Cas 3D

En substituant les variables adimensionnelles dans les équations de conservation (3.1 - 3.5), on obtient:

$$\frac{\partial V_r}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial Z} + \frac{V_r}{R} = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{DV_r}{Dt^*} - \frac{V_\theta^2}{R} = -\frac{\partial P_1}{\partial R} + \frac{Pr}{Ma} (\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}) \quad (3.29)$$

$$\frac{DV_\theta}{D\tau^*} + \frac{V_r V_\theta}{R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial P_i}{\partial \theta} + \frac{Pr}{Ma} (\nabla^2 V_\theta - \frac{V_\theta}{R^2} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta}) \quad (3.30)$$

$$\frac{DV_z}{D\tau^*} = -\frac{\partial P_i}{\partial Z} + \frac{Pr}{Ma} \nabla^2 V_z + \frac{Pr Bd}{Ma} T \quad (3.31)$$

$$\frac{DT}{D\tau^*} = \frac{1}{Ma} \nabla^2 T \quad (3.32)$$

où

$$\frac{D}{D\tau^*} = \frac{\partial}{\partial \tau^*} + V_r \frac{\partial}{\partial R} + \frac{V_\theta}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + V_z \frac{\partial}{\partial Z} \quad (3.33 a)$$

et

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \quad (3.33 b)$$

Notons que la définition des nombres adimensionnels caractéristiques sera donnée au paragraphe 3.9 .

### 3.7.2 Cas 2D axisymétrique

Les équations de conservation (3.7) à (3.10), pour le cas 2D axisymétrique, s'écrivent sous forme adimensionnelle comme suit:

$$\frac{\partial V_r}{\partial R} + \frac{\partial V_z}{\partial Z} + \frac{V_r}{R} = 0 \quad (3.34)$$

$$\frac{DV_r}{D\tau^*} = -\frac{\partial P_i}{\partial R} + \frac{Pr}{Ma} (\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{R^2}) \quad (3.35)$$

$$\frac{DV_z}{D\tau^*} = -\frac{\partial P_1}{\partial Z} + \frac{Pr}{Ma} \nabla^2 V_z + \frac{Pr Bd}{Ma} T \quad (3.36)$$

$$\frac{DT}{D\tau^*} = \frac{1}{Ma} \nabla^2 T \quad (3.37)$$

### 3.8 FORME ADIMENSIONNELLE DES CONDITIONS AUX LIMITES ET DES CONDITIONS INITIALES

#### 3.8.1 Cas 3D avec une surface libre cylindrique

Pour les conditions aux limites (3.12) à (3.14), elles s'écrivent sous forme adimensionnelle comme suit:

- sur le disque no. 2:

$$* Z = 0: \quad V_r = V_\theta = V_z = 0, \quad T = T_2 = 0 \quad (3.38)$$

- sur le disque no. 1:

$$* Z = 1: \quad V_r = V_\theta = V_z = 0, \quad T = T_1 = h(\tau^*) \quad (3.39)$$

- sur la surface libre de la zone:

\*  $R = A$  :

$$V_r = 0 \quad (3.40a)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial R} = -\frac{\partial T}{\partial Z} \quad (3.40 b)$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial R} - \frac{V_\theta}{A}\right) \quad (3.40 c)$$



$$\frac{\partial \Gamma}{\partial R} = 0 \quad (3.40 d)$$

### 3.8.2 Cas 2D avec une surface libre déformable

Sur les deux disques, les équations (3.38) et (3.39) restent applicables. Sur les autres frontières, les conditions aux limites sous forme adimensionnelle sont comme suit:

- sur la ligne de centre:

$$R = 0: \quad V_r = 0, \quad \frac{\partial V_z}{\partial R} = \frac{\partial \Gamma}{\partial R} = 0 \quad (3.41)$$

- sur la surface libre déformable:

Les équations 3.16 a, b, c et d s'écrivent sous la forme adimensionnelle comme suit:

R = A:

$$\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2\right]^{1/2}} \left( V_r - \frac{\partial F}{\partial Z} V_z \right) = 0 \quad (3.42a)$$

$$2 \frac{\partial F}{\partial Z} \left[ \frac{\partial V_r}{\partial R} - \frac{\partial V_z}{\partial Z} \right] + \left[ 1 - \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2 \right] \left[ \frac{\partial V_z}{\partial R} + \frac{\partial V_r}{\partial Z} \right] =$$

$$- \left[ 1 + \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2 \right]^{1/2} \left[ \frac{\partial F}{\partial Z} \frac{\partial \Gamma}{\partial R} + \frac{\partial \Gamma}{\partial Z} \right] \quad (3.42 b)$$

$$\frac{Ca Ma}{Pr} P_1 - B_s Z - \frac{Ca}{\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2\right]} \left[ \frac{\partial V_r}{\partial R} + \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2 \left(\frac{\partial V_z}{\partial Z}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right) \left(\frac{\partial V_z}{\partial R} + \frac{\partial V_r}{\partial Z}\right) \right] =$$

$$\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2\right]^{3/2}} \left[ \frac{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2}{F} - \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} \right] \quad (3.42c)$$

$$\frac{\partial T}{\partial R} - \frac{\partial F}{\partial Z} \frac{\partial T}{\partial Z} = 0 \quad (3.42d)$$

• Simplifications des équations 3.42

Il est à noter que le nombre capillaire,  $Ca = (|\partial\sigma / \partial t| \Delta t) / \sigma_m$  (qui exprime le changement relatif de la tension superficielle due aux variations de température) est, dans cette étude, de l'ordre de  $10^3 \ll 1$ , de même  $(\partial F / \partial Z)^2 \ll 1$  (voir Annexe D). Ces deux hypothèses ont été adoptées par plusieurs chercheurs dont Lai (1984) et Kozhoukharova et Slavechev (1986) pour simplifier les équations 3.42. En tenant compte de ces dernières hypothèses, les équations 3.42 a, b et c s'écrivent sous forme adimensionnelle comme suit:

$$V_r - \frac{\partial F}{\partial Z} V_z = 0 \quad (3.43a)$$

$$2 \frac{\partial F}{\partial Z} \left[ \frac{\partial V_r}{\partial R} - \frac{\partial V_z}{\partial Z} \right] + \left[ \frac{\partial V_z}{\partial R} + \frac{\partial V_r}{\partial Z} \right] = - \left[ \frac{\partial F}{\partial Z} \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{\partial T}{\partial Z} \right] \quad (3.43 b)$$

$$\frac{Ca Ma}{Pr} P_1 - B_s Z = \left[ \frac{1}{F} - \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} \right] \quad (3.43 c)$$

Notons que la forme de la surface libre est déterminée à partir de l'équation (3.43 c). La forme statique de la surface libre, correspondant à une zone isotherme ( $Ma = 0$ ), est donnée par l'équation suivante:

$$-B_s Z = \left[ \frac{1}{F} - \frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} \right] \quad (3.44)$$

Dans le cadre de cette étude, les équations 3.43 a et b sont résolues afin de déterminer  $V_r$  et  $V_z$  le long de la surface libre. A chaque pas de temps, la forme de cette surface libre est générée à partir de l'équation 3.43 c.

Les conditions aux limites pour la fonction  $F(Z)$ , écrites sous forme adimensionnelle, sont comme suit:

$$\text{pour } Z = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial Z} = -\tan \gamma \quad (3.45)$$

$$\text{pour } Z = 1 \quad \frac{\partial F}{\partial Z} = \tan \gamma \quad (3.46)$$

$$F(0) = F(1) = A \quad (3.47)$$

$$\int_0^1 [F(Z)]^2 dZ = A^2 \quad (3.48)$$

### 3.8.3 Cas 2D axisymétrique avec une surface libre cylindrique

Les équations 3.21 a, b et c le long de la surface libre s'écrivent sous forme adimensionnelle comme suit:

$$R = A: \quad V_r = 0 \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial R} = -\frac{\partial T}{\partial Z} \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial T}{\partial R} = 0 \quad (3.51)$$

Sur les deux disques, les équations (3.38) et (3.39) restent applicables.

### 3.8.4 Conditions initiales adimensionnelles

Quant aux conditions initiales (Éqn. 3.22), elles s'écrivent sous forme adimensionnelle comme suit:

$$\tau^* = 0: \quad V_r = V_\theta = V_z = T = 0 \quad (3.52)$$

## 3.9 PARAMÈTRES CARACTÉRISTIQUES ADIMENSIONNELS

À partir des équations de conservation et des conditions aux limites des cas 3D et 2D avec une surface libre cylindrique, on peut voir que le problème considéré peut être caractérisé par un ensemble de quatre paramètres adimensionnels, qui sont définis comme suit:

\* le rapport géométrique:

$$A = \frac{R_0}{H} \quad (3.53)$$

\* le nombre de Prandtl

$$Pr = \frac{C_{PM} \mu_M}{k_M} \quad (3.54)$$

\* le nombre de Marangoni

$$Ma = \frac{\left| \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right| \Delta T H}{\mu_M \alpha_M} \quad (3.55)$$

\* le nombre de Bond dynamique

$$Bd = \frac{\rho_M g \beta H^2}{\left| \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right|} \quad (3.56)$$

Cependant, le problème 2D axisymétrique avec une surface libre déformable est caractérisé par un ensemble de six paramètres adimensionnels notamment: A, Pr, Ma, Bd, le nombre de Bond statique Bs et le nombre capillaire Ca. Les nombres Bs et Ca sont définis comme suit:

$$Bs = \frac{\rho_M g H^2}{\sigma_M} \quad (3.57)$$

et

$$Ca = \frac{\left| \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right| \Delta T}{\sigma_M} \quad (3.58)$$

## CHAPITRE 4

### MÉTHODE NUMÉRIQUE ET VALIDATION DU MODÈLE

Au chapitre III, les équations de conservation ont été exprimées mathématiquement sous forme d'équations aux dérivées partielles. Le présent chapitre donne un aperçu sur la méthode numérique, SIMPLE-modifiée, adoptée pour la résolution de ces équations. Ensuite, on présentera les résultats qui ont servi pour valider le programme de calcul et également pour étudier l'effet du maillage.

#### 4.1 MÉTHODE DE RÉOLUTION

La méthode SIMPLE proposée par Patankar dans les années 70, a été développée spécialement pour l'analyse des écoulements du fluide, dont les équations de conservation suivent la forme générale suivante:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial\tau} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S \quad (4.1)$$

où  $\phi$ , la variable dépendante,  $\Gamma$  est le coefficient de diffusion et  $\mathbf{V}$  est le vecteur de vitesse. Les quatre termes de l'équation (4.1) représentent respectivement la variation temporelle de  $\phi$ , la convection, la diffusion et le terme de source. Dépendamment de la nature de  $\phi$  qui peut être une composante de vitesse, une température, une concentration etc..., le coefficient  $\Gamma$  peut représenter certaines propriétés physiques comme la viscosité, la conductivité etc.... Quant au terme de source  $S$ , il peut être vu comme étant le terme sous lequel on regroupe toutes les autres quantités qui ne peuvent se mettre sous l'une des trois formes précédentes. Ainsi, si  $\phi = 1$  et  $S = 0$ , on obtient l'équation de continuité qui s'écrit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (4.2)$$

C'est ce concept de l'équation générale de  $\phi$  qui a amené Patankar à formuler une méthode numérique générale pour l'analyse des écoulements des fluides. Cette méthode, nommée SIMPLE ("Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equations") a été suivie de nombreuses versions améliorées dont une des plus récentes, SIMPLE-modifiée, a été adoptée comme méthode de résolution du modèle mathématique établi au chapitre précédent.

## 4.2 APERÇU SUR LA MÉTHODE SIMPLE-MODIFIÉE

La méthode SIMPLE-modifiée utilise l'approche du "volume de contrôle" où le domaine de calcul est subdivisé en plusieurs éléments de volume. La figure 4.1 illustre un exemple typique de volume de contrôle pour un cas tridimensionnel en coordonnées cylindriques ( $r, z, \theta$ ). Ce volume de contrôle est délimité par six interfaces: n et s selon la direction radiale, e et w selon la direction circonférentielle et t, b selon la direction axiale. Les noeuds P, N, S, E, W, T et B sont effectivement les centres géométriques du volume de contrôle considéré et des six volumes de contrôle avoisinants. Quant à la figure 4.2, elle représente un volume de contrôle typique pour un cas de symétrie de révolution en coordonnées cylindriques.

Notons que la pression et la température sont calculées aux noeuds primaires (centres géométriques du volume de contrôle), alors que les trois composantes de vitesse sont évaluées aux noeuds secondaires qui sont des points d'intersection entre les interfaces et le segment reliant deux noeuds primaires adjacents (voir figures 4.1 et 4.2).





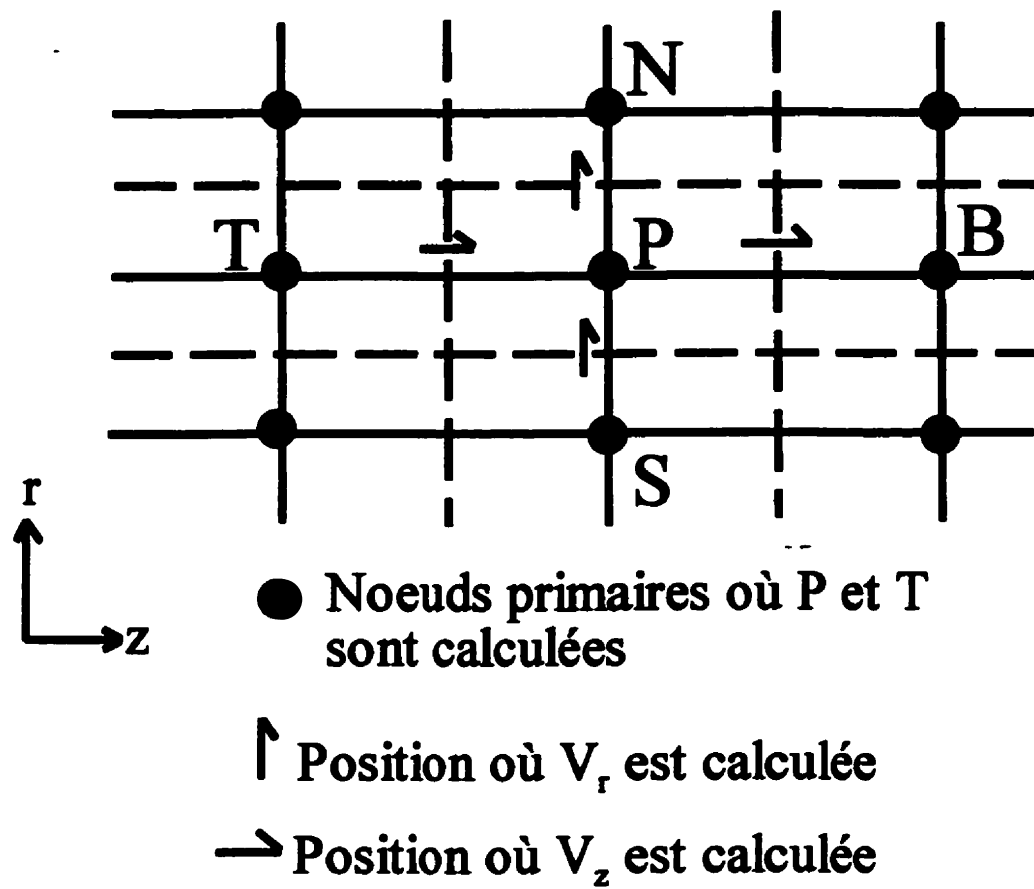


Figure 4.2 Volume de contrôle typique pour le cas 2D

#### 4. 2. 1 Discrétisation des équations de conservation pour le cas 3D

En utilisant un schéma numérique de type exponentiel pour le traitement combiné des termes de convection et de diffusion ainsi que la linéarisation du terme des sources et en suivant la procédure suggérée par Patankar (1980), on obtient les équations discrétisées suivantes:

\* L'équation de Navier-Stokes selon la direction radiale

$$a_p(V_r)_p = a_E(V_r)_E + a_W(V_r)_W + a_N(V_r)_N + a_S(V_r)_S + a_B(V_r)_B + a_T(V_r)_T + \quad (4.3)$$

$$A_r(P_s - P_n) + b$$

$$\text{avec } a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B + a_p^0 - S_p \Delta V \quad (4.4)$$

$$a_p^0 = \frac{\Delta V}{\Delta \tau} \quad (4.5)$$

$$b = S_c \Delta V + a_p^0 (V_r)_p^0 \quad (4.6)$$

$$A_r = R_p \Delta \theta \Delta z \quad (4.7)$$

$$\text{et } S = S_c + S_p (V_r)_p \quad (4.8)$$

où  $\Delta V$  est le volume du volume de contrôle considéré et  $(V_r)_p^0$  est la vitesse radiale calculée à l'instant précédent.

Les termes de sources  $S_c$  et  $S_p$  sont donnés comme suit:

$$S_p = \left( \frac{-Pr}{Ma} \right) \frac{1}{R_m^2} \quad (4.9)$$

$$S_c = \frac{(V_\theta)_m}{R_m} - \frac{2}{R_m^2} \left( \frac{Pr}{Ma} \right) \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right)_{\text{moyen}} \quad (4.10)$$

où  $(V_\theta)_m$  est la vitesse circonférentielle moyenne calculée pour le volume de contrôle considéré:

$$(V_\theta)_m = 0.5((V_\theta)_e + (V_\theta)_w) \quad (4.11)$$

et 
$$\left( \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right)_{\text{moyen}} \approx \frac{(V_\theta)_e - (V_\theta)_w}{\Delta \theta} \quad (4.12)$$

$$R_m = 0.5(R_s + R_n) \quad (4.13)$$

\* L'équation de Navier-Stokes selon  $\theta$

$$a_p(V_\theta)_p = a_E(V_\theta)_E + a_W(V_\theta)_W + a_N(V_\theta)_N + a_S(V_\theta)_S + a_B(V_\theta)_B + a_T(V_\theta)_T + A_\theta(P_w - P_e) + b \quad (4.14)$$

avec 
$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B + a_p^0 - S_p \Delta V \quad (4.15)$$

$$a_p^0 = \frac{\Delta V}{\Delta \tau} \quad (4.16)$$

$$b = S_c \Delta V + a_p^0 (V_\theta)_p^0 \quad (4.17)$$

$$A_\theta = A_e = A_w = \Delta r \Delta z \quad (4.18)$$

Les termes de sources sont comme suit:

$$S_c = \text{Max} \left[ 0, -\frac{(V_r)_m}{R_m} \right] (V_\theta)_p + \frac{2}{R_m^2} \left( \frac{\text{Pr}}{\text{Ma}} \right) \left( \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)_m \quad (4.19)$$

$$S_p = -\text{Max} \left[ 0, \frac{(V_r)_m}{R_m} \right] - \frac{1}{R_m^2} \frac{\text{Pr}}{\text{Ma}} \quad (4.20)$$

où

$$\left( \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)_m \approx \frac{(V_r)_e - (V_r)_w}{\Delta \theta} \quad (4.21)$$

$$(V_r)_m = 0.5((V_r)_n + (V_r)_s) \quad (4.22)$$

\* L'équation de Navier-Stokes selon z

$$a_p (V_z)_p = a_e (V_z)_e + a_w (V_z)_w + a_n (V_z)_n + a_s (V_z)_s + a_b (V_z)_b + a_T (V_z)_T + A_z (P_i - P_b) + b \quad (4.23)$$

$$\text{avec } a_p = a_E + a_w + a_N + a_s + a_T + a_B + a_p^0 - S_p \Delta V \quad (4.24)$$

$$b = S_c \Delta V + a_p^0 (V_z)_p^0 \quad (4.25)$$

où la valeur de  $a_p^0$  est donnée par l'équation (4. 16)

$$A_z = A_t = A_b = R_p \Delta \theta \Delta r \quad (4.26)$$

Les termes de sources sont donnés comme suit:

$$S_c = \frac{\text{Pr Bd}}{\text{Ma}} T_m = \frac{\text{Pr Bd}}{\text{Ma}} \left( \frac{T_T + T_B}{2} \right) \quad (4.27)$$

où  $T_m$  est la température moyenne du volume de contrôle, et

$$S_p = 0 \quad (4.28)$$

\* L'équation d'énergie

$$a_p(T)_p = a_E(T)_E + a_w(T)_w + a_N(T)_N + a_s(T)_s + a_B(T)_B + a_T(T)_T + b \quad (4.29)$$

$$\text{avec } a_p = a_E + a_w + a_N + a_s + a_T + a_B + a_p^0 \quad (4.30)$$

$$\text{et } b = a_p^0 (T)_p^0 \quad (4.31)$$

Dans les équations discrétisées (4.3), (4.14), (4.23) et (4.29), les coefficients  $a_e$ ,  $a_w$ ,  $a_n$ ,  $a_s$ ,  $a_t$  et  $a_b$  représentent, en effet, l'influence combinée de la convection et diffusion provenant des noeuds avoisinant le noeud considéré. Ces coefficients sont évalués en se basant sur la solution théorique du problème de convection-diffusion unidimensionnel (Patankar, 1980), en connaissant le débit massique FF et la conductance D à chaque interface du volume de contrôle. L'expression mathématique suivante donne en général les formules nécessaires pour le calcul de ces coefficients:

$$a_{E,W,N,S,T,B} = D_{e,w,n,s,t,b} \text{Max}\left(0, 1 - 0.5 \left| \frac{FF_{e,w,n,s,t,b}}{D_{e,w,n,s,t,b}} \right| \right) + \text{Max}(\mp FF_{e,w,n,s,t,b}, 0) \quad (4.32)$$

Le signe  $\pm$  précédant le coefficient FF dans l'équation (4.32) est prise en alternance: -, +, ....

Il est à noter que les équations algébriques ainsi obtenues à partir des équations discrétisées, sont résolues par la méthode " ligne par ligne" en utilisant un algorithme standard TDMA (" TriDiagonal Matrix Algorithm").

#### 4.2.2 Discrétisation des équations de conservation pour le cas 2D axisymétrique

Dans ce cas, il n'y a pas une variation des variables selon  $\theta$  (i.e.  $\partial / \partial \theta = 0$ ) et la composante circonférentielle de vitesse  $V_\theta$  est nulle.

##### \* L'équation de Navier-Stokes selon la direction r

On utilise les équations (4.3) et (4.4) en annulant les coefficients  $a_e$  et  $a_w$ . Les termes de sources  $S_c$  et  $S_p$  s'écrivent comme suit:

$$S_p = \left( \frac{-Pr}{Ma} \right) \frac{1}{R_m^2} \quad (4.33)$$

$$S_c = 0 \quad (4.34)$$

Selon la pratique habituelle, on prend  $\Delta\theta = 1$  radian dans les calculs pour l'évaluation des aires de surface.

**\*L'équation de Navier-Stokes selon la direction z**

On prend les équations (4.23) et (4.24) en annulant les coefficients  $a_x$  et  $a_w$ . Les termes de sources  $S_c$  et  $S_p$  données par les équations (4.27) et (4.28) restent valables.

**\*L'équation d'énergie**

Dans les deux équations (4.29) et (4.30), il faut annuler les coefficients  $a_x$  et  $a_w$ .

**4.2.3 Notes sur le traitement du couplage vitesse-pression**

Les équations de Navier-Stokes discrétisées sont résolues numériquement pour déterminer le champ de vitesse en partant d'un champ de pression  $P^*$  arbitraire. Évidemment, la solution obtenue à partir d'un tel champ ne satisfait pas nécessairement l'équation de continuité. Des équations de correction de pression et de vitesse, développées par Patankar (1980), servent à corriger le champ de vitesse afin de satisfaire progressivement et d'une façon itérative l'équation de continuité. Cette procédure fait appel à:

- l'équation de correction de pression (ou l'équation  $P'$ ):

$$a_p(P')_p = a_e(P')_e + a_w(P')_w + a_n(P')_n + a_s(P')_s + a_b(P')_b + a_t(P')_t + b \quad (4.35)$$

avec  $b$  la masse résiduelle, est donnée par:

$$b = (\rho V^*)_w A_w - (\rho V^*)_e A_e + (\rho V^*)_s A_s - (\rho V^*)_n A_n + (\rho V^*)_b A_b - (\rho V^*)_t A_t \quad (4.36)$$

où  $V^*$  est le champ de vitesse qui correspond à la pression  $P^*$ .

Notons que l'équation (4.35) est obtenue par une combinaison judicieuse de l'équation de continuité et des équations de Navier-Stokes. En général, l'équation  $P'$  est utilisée pour la correction du champ de vitesse et de pression. Une description complète de la procédure de dérivation et de résolution de l'équation  $P'$  est présentée, de façon détaillée, dans Patankar (1980).

#### 4.2.4 Algorithme SIMPLE-modifiée

Il a été connu que l'algorithme SIMPLE original (Patankar, 1980) peut engendrer des problèmes de convergence. Une version améliorée, appelée SIMPLE-modifiée a été proposée par Patankar et incorporée à l'intérieur d'un logiciel appelé COMPACT Version 4.1. La différence essentielle entre la méthode SIMPLE-modifiée et la méthode SIMPLE originale réside dans le fait que dans la dernière, on résout l'équation  $P'$  et on corrige les champs de vitesse une seule fois, tandis que dans SIMPLE-modifiée, l'équation  $P'$  est résolue deux fois et les champs de vitesse sont corrigés deux fois afin d'améliorer la convergence de la solution numérique. La méthode SIMPLE-modifiée a été utilisée dans le cadre de ce travail et dont les différentes étapes sont résumées comme suit:

- (1) Donner un estimé initial de toutes les variables dépendantes
- (2) Calculer les coefficients "a" des équations de Navier-Stokes et ensuite par substitution, calculer les pseudo-vitesses  $\hat{V}$
- (3) Évaluer le résidu massique b (Éqn. 4.36) et résoudre l'équation  $P'$  (Éqn. 4.35) comme étant une première équation de correction de pression  $P'$
- (4) Corriger les champs de vitesse radiale, axiale et circonférentielle et le champ de pression en utilisant les valeurs de  $P'$
- (5) Résoudre les équations de Navier-Stokes pour obtenir le champ de vitesse correspondant en prenant le champ de pression déjà obtenu à l'étape (4)
- (6) Calculer de nouveau le résidu massique b (Éqn. 4.36) et résoudre l'équation  $P'$  comme une deuxième équation de correction de pression



- (7) Corriger de nouveau les champs de vitesse radiale, axiale et circonférentielle en utilisant les valeurs de  $P$  trouvées à l'étape (6), mais ne pas corriger la pression
- (8) Résoudre les autres équations discrétisées (exemple: température, concentration, turbulence....)
- (9) Retourner à l'étape (2) jusqu'à la convergence totale
- (10) La résolution des autres équations discrétisées se fait à l'extérieur de la boucle globale (Étape 1 à 9), si la variable  $\phi$  est indépendante du champ de vitesse. Par exemple, pour le problème de conduction pure, on ne détermine pas les vitesses et on passe directement à l'étape 10.

#### **4.3 TRAITEMENT NUMÉRIQUE SPÉCIAL POUR LE CAS 2D AXISYMETRIQUE AVEC UNE SURFACE LIBRE DÉFORMABLE**

Due à la présence de la surface libre déformable, le domaine physique n'est pas rectangulaire. Plusieurs chercheurs dont Lan et Kou (1990) et Duranceau et Brown (1986), ont utilisé la méthode de Newton Raphson pour déterminer la forme statique de la surface libre. Une fois  $F(Z)$  connue, ils ont effectué un changement de coordonnées ( $R^* = R / F(Z)$ ) pour pouvoir passer d'un domaine physique non rectangulaire à un domaine de calcul rectangulaire. Ce changement de coordonnées introduit inévitablement des termes de sources très compliqués au niveau des équations de Navier-Stokes. D'autre part, en utilisant la procédure de transformation des coordonnées, on ne peut calculer que la forme statique de la surface libre. Comme dans ce travail, on s'est intéressé à déterminer la forme dynamique de la surface libre, il faut donc adopter une approche différente de celle du changement de coordonnées.

Dans le texte qui suit, on va présenter la méthode numérique utilisée pour obtenir la forme de la surface libre et ainsi l'approche numérique spéciale adoptée afin de pouvoir imposer les conditions aux limites appropriées le long de la surface libre.

### **4.3.1 Résolution numérique de la forme de la surface libre à l'aide de la méthode SIMPLE-modifiée**

L'équation 3.43c, qui exprime l'équilibre des contraintes sur la surface libre selon la direction normale, nous permet de déterminer la forme dynamique de la surface libre. Il consiste donc à résoudre cette équation pour obtenir les valeurs de  $F(Z)$ .

Notons que l'équation 3.43 c suit à peu près la forme générale de l'équation de conservation (Éqn 4.1) avec  $\Gamma = 1$  et  $\rho = 0$ . La méthode SIMPLE-modifiée a été retenue pour la résolution de  $F(Z)$  pour sa simplicité en programmation. D'autre part, cette dernière méthode nous permet de déterminer la forme dynamique de  $F(Z)$  comme étant une partie de la solution générale des équations de conservation. Ainsi, on a déclaré  $F(Z)$  comme étant une variable dépendante.

Notons que l'équation 3.43 c est une équation unidimensionnelle. D'où la nécessité de résoudre  $F(Z)$  dans une seule rangée de volumes de contrôle selon la direction axiale. En effet, les volumes de contrôle marqués par les cercles vides, tels que montrés à la figure 4.3, constituent le domaine de calcul de  $F(Z)$ . Pour ces derniers volumes de contrôle, les termes de sources de  $F(Z)$  sont donnés comme suit:

$$S=S_c = \frac{1}{F} + BsZ - \frac{Ca Ma}{Pr} P_1 \quad (4.37)$$

Cependant, il faut rendre inactive (durant le processus de calcul de  $F(Z)$ ) les volumes de contrôle marqués par les symboles x dans la figure 4.3 en utilisant l'approche des termes de sources très grands (Patankar 1980).

x	x	x	x	x volume inactive o volume active
x	x	x	x	
o	o	o	o	
x	x	x	x	

Figure 4.3 Maillage pour le calcul de  $F(Z)$

\* Approche des termes de sources très grands

La forme discrétisée de  $F(Z)$  est donnée par:

$$a_p(F)_p = a_N(F)_N + a_s(F)_s + a_B(F)_B + a_T(F)_T + b \quad (4.38)$$

$$\text{avec } a_p = a_N + a_s + a_T + a_B - S_p \Delta V \quad (4.39)$$

$$\text{et } b = S_c \Delta V \quad (4.40)$$

En considérant les termes de sources très grands (i.e.  $S_c = 10^{30} F_{\text{max}}$  et  $S_p = -10^{30}$ ), pour tous les volumes de contrôle marqués par le symbole x (voir Fig. 4.3), on peut imposer la valeur voulue de  $F(Z)$  pour ces dernières volumes. Ainsi, l'équation (4.39) s'écrit comme suit:

$$a_p = 10^{30} \Delta V \quad \text{car } a_T + a_B + a_N + a_s \ll 10^{30} \quad (4.41)$$

et l'équation (4.38) devient:

$$F_p = \frac{-S_c}{S_p} = F_{stat}. \quad (4.42)$$

Notons que  $F_{stat}$  est nulle pour tous les volumes inactives.

#### 4.3.2 Étapes de calcul pour résoudre $F(Z)$

Pour éviter les difficultés numériques, à  $\tau = 0$  s, on a commencé par déterminer la forme statique de la surface libre ( $Ma = 0$ ) dont les étapes de calcul se résument comme suit:

- i) Estimé initial:  $F(Z) = 0$
- ii) Spécifier  $\rho = 0$  et  $\Gamma = 1$
- iii) Imposer  $S_c = 0$  et  $S_p = -10^{30}$  pour les volumes de contrôle inactives
- iv) Spécifier les termes de sources  $S_c = (1/F + B_s Z)$  et  $S_p = 0$  pour la rangée des volumes de contrôle où on calcule  $F(Z)$
- v) Résoudre la forme discrétisée de  $F(Z)$  en suivant l'étape 10 de l'algorithme SIMPLE-modifiée (Voir paragraphe 4.2.4)
- vi) Corriger la forme de la surface libre à l'aide de l'équation 3.48 pour s'assurer que le volume total du liquide est conservé
- vii) Retourner à l'étape ii jusqu'à la convergence totale

- **Remarque**

En ce qui concerne la procédure de résolution de la forme dynamique de  $F(Z)$ , on suit les étapes de calcul de la forme statique avec les différences suivantes:

Étape i) L'estimé initial de la forme dynamique correspond à la forme statique de  $F(Z)$

Étape iv) En introduisant le terme de pression  $(C_a M_a P_i) / Pr$ , les termes de sources  $S_c$  et  $S_p$  pour les volumes de contrôle où on calcule  $F(Z)$  sont exprimés par l'équation 4.37.

### 4.3.3 Approche numérique utilisé pour imposer les conditions aux limites sur la surface libre

Le domaine de calcul de la méthode SIMPLE-modifiée est rectangulaire et les conditions aux limites sont imposées sur les frontières nominales du rectangle. Par conséquent, il faut avoir recours à une approche numérique spéciale pour pouvoir introduire la surface libre comme une frontière. Selon cette approche, on considère une zone liquide et une zone inactive (Fig. 4.4). La surface libre approximée par "escalier ou zig-zag" est la frontière entre la zone liquide et celle inactive. Il est intéressant de noter que dans la zone inactive, les variables dépendantes ne sont pas calculées mais plutôt imposées à l'aide de l'approche des termes de sources très grands.

Dans le but d'alléger le texte, on va présenter seulement la procédure de calcul adoptée pour imposer la température le long de la surface libre. Les étapes de calcul se résument comme suit:

1. Mettre les valeurs de la température des derniers volumes de la zone liquide (TL(1), TL(2), TL(3) et TL(4), voir figure 4.5) dans un tableau TL(N).
2. Discrétiser l'équation 3.42 d à l'aide de la méthode de différences finies. Ainsi, cette dernière équation s'écrit comme suit:

$$\frac{Td(I) - TL(I)}{\Delta R} - \left[ \frac{F(I) - F(I-1)}{\Delta Z} \right] \left[ \frac{Td(I) - Td(I-1)}{\Delta Z} \right] = 0 \quad (4.43)$$

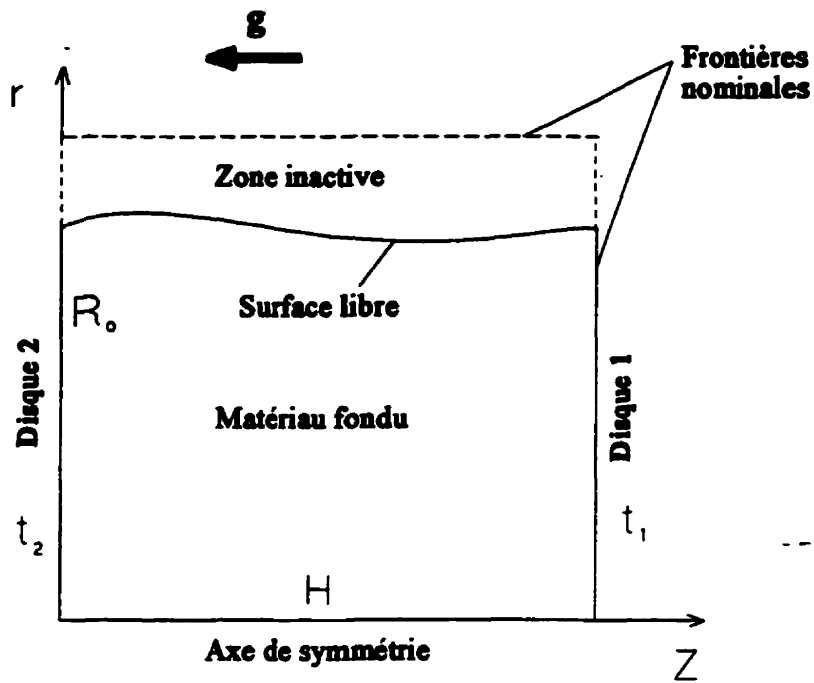


Figure 4.4 Domaine de calcul pour le cas 2D avec une surface libre déformable

Td(1)	X	Td(2)	X	Td(3)	X	Td(4)	X
Td(1)	X	Td(2)	X	Td(3)	X	Td(4)	X
Td(1)	X	TL(2)	O	TL(3)	O	Td(4)	X
TL(1)	O					TL(4)	O

X Volume de contrôle inactive O Dernière rangée des volumes de contrôle de la zone liquide

Figure 4.5 Domaine de calcul (vue explicative)

où  $T_d(I)$  est la température désirée le long de la surface libre.

3. Pour pouvoir imposer  $T_d(I)$  sur la surface libre, on a recours à l'approche des termes des sources très grands. En effet, en spécifiant  $S_c = 10^{30} \times T_d(I)$  et  $S_p = -10^{30}$ , on impose  $T_d(I)$  (i.e.  $T_d(1)$ ,  $T_d(2)$ ,  $T_d(3)$  et  $T_d(4)$ , voir figure 4.5) dans tous les volumes de contrôle de la zone inactive.

- Remarques concernant les valeurs de  $V_r$  et  $V_z$  sur la surface libre

Pour imposer les vitesses radiales et axiales désirées sur la surface libre, on discrétise respectivement à l'aide de la méthode des différences finies les équations 3.43a et 3.43b. Ensuite, on suit la même démarche de calcul telle que décrite pour imposer la température sur la surface libre.

#### 4.4 PROCÉDURES DE CALCUL

Pour le cas 2D axisymétrique avec une surface libre déformable, les principales opérations de calcul pour la résolution des équations de conservation sont résumées dans l'organigramme de la figure 4.6.

Pour les cas 3D et 2D axisymétrique avec une surface libre parfaitement cylindrique, on ne considère que la zone liquide et pour chaque pas de temps, on suit les différentes étapes de l'algorithme SIMPLE-modifiée (voir paragraphe 4.2.4).

#### 4.5 CRITÈRE DE CONVERGENCE ET SOUS RELAXATION DES VARIABLES

Afin de s'assurer de la convergence de la solution lors d'une simulation, deux critères basés sur les paramètres RSMAX et SSUM ont été vérifiés. Le premier paramètre SSUM représente effectivement la somme algébrique de la masse résiduelle à travers tout le domaine. L'équation de SSUM est la suivante:

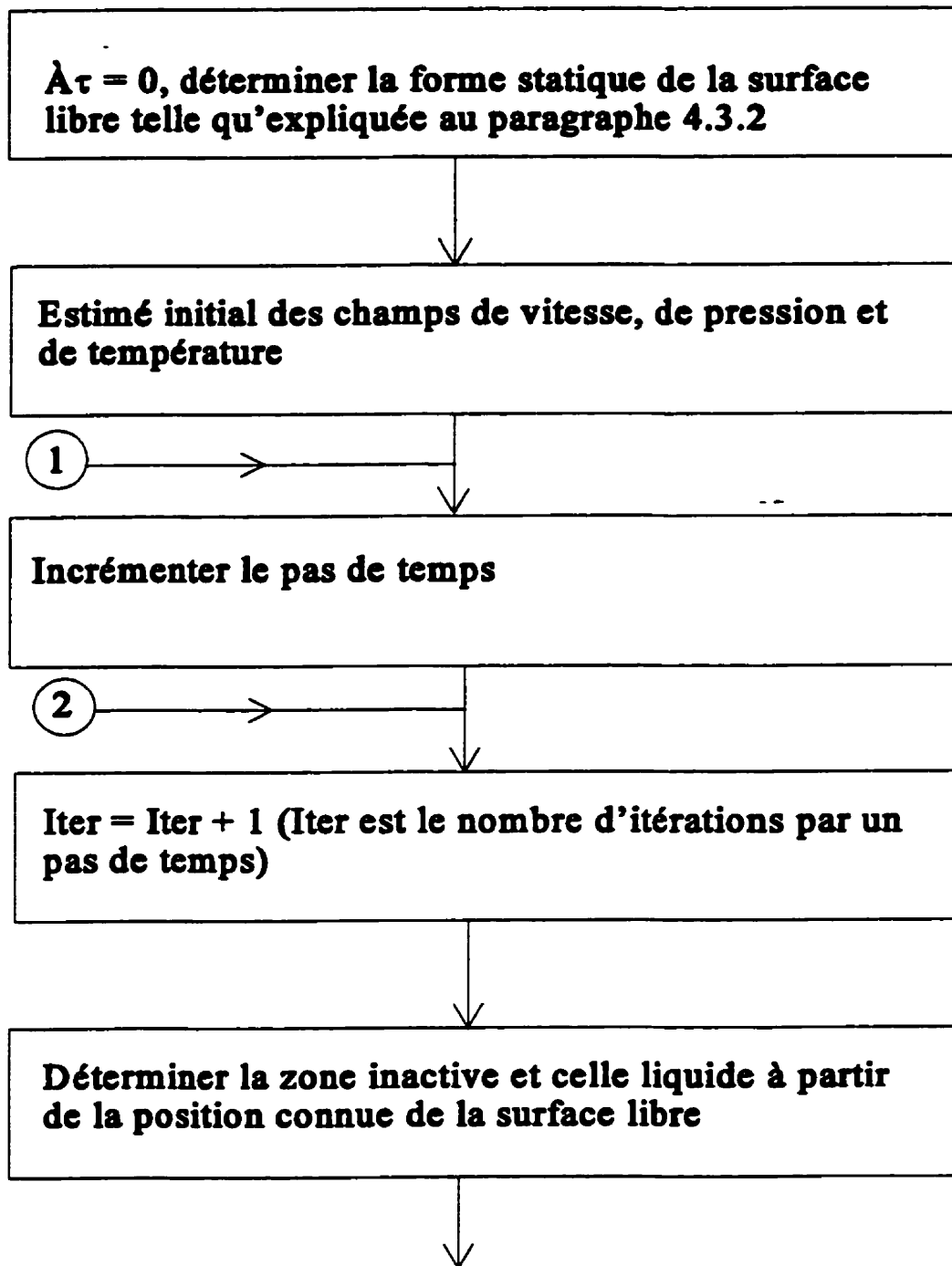


Figure 4.6 Organigramme de la procédure de calcul



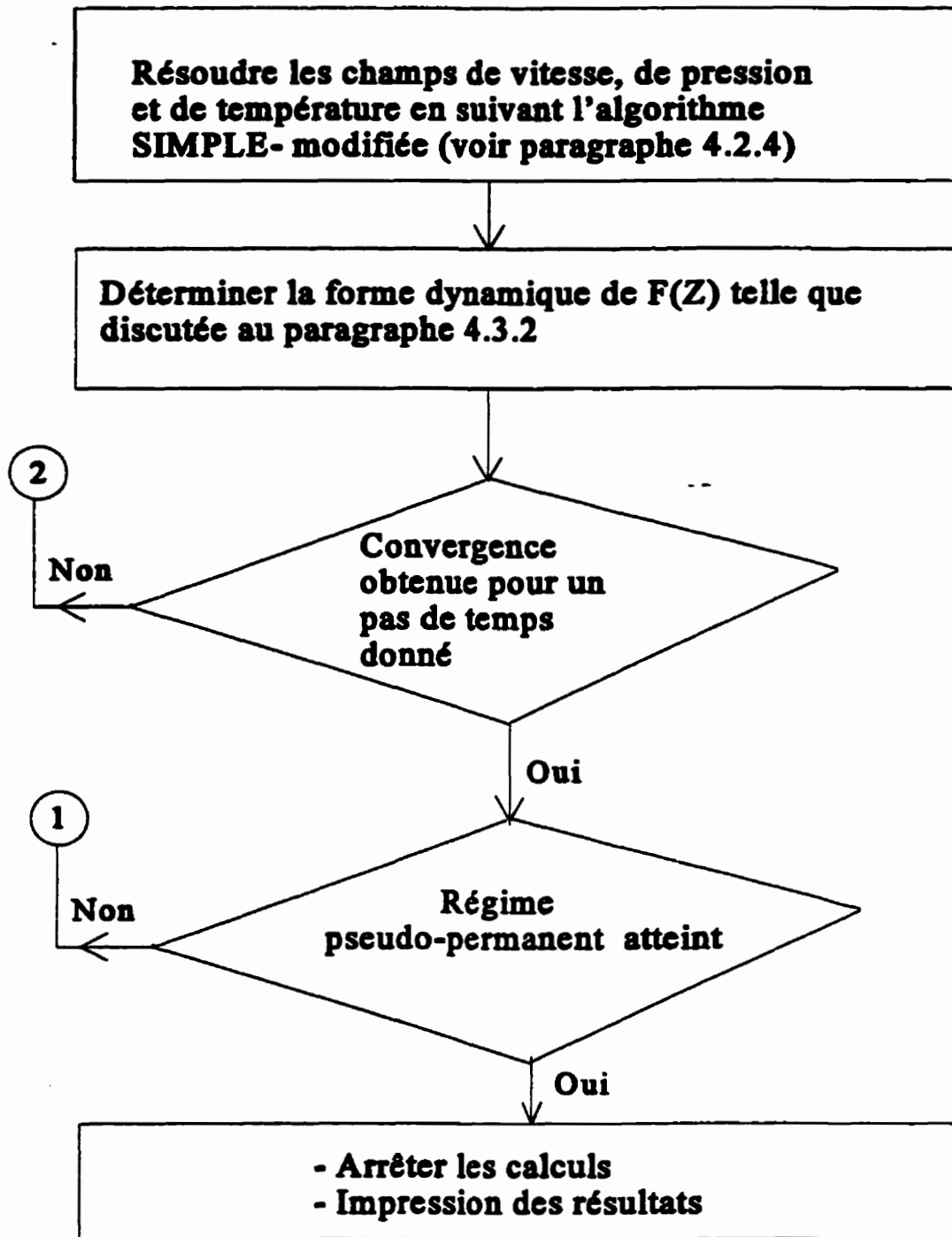


Figure 4.6 (suite) Organigramme de la procédure de calcul

$$SSUM = \sum b_i \quad (4.44)$$

où  $b_i$  est la masse résiduelle (Éqn. 4.36) au niveau de chaque volume de contrôle. Le deuxième paramètre RSMAX est défini comme étant la plus grande valeur normalisée de la masse résiduelle  $b_i$  à travers tout le domaine.

La convergence de la solution numérique est jugée bonne si SSUM et RSMAX atteignent, respectivement, des valeurs suffisamment petites, soient d'environ  $10^{-9}$  et  $10^{-5}$ . Ainsi, pour un cas typique, ces critères de convergence nécessitent environ 20 à 30 itérations par pas de temps.

Étant donné le caractère itératif de la méthode de résolution et le couplage des équations ainsi que leur forte non-linéarité, une sous-relaxation des variables est nécessaire. La relation suivante est utilisée à cet effet:

$$\phi^n = \phi^{n-1} + \alpha(\phi^n - \phi^{n-1}) \quad (4.45)$$

où  $n$  désigne la présente itération et  $n-1$  l'itération précédente;

$\alpha$  est le facteur de sous-relaxation

- Pour le cas 2D

$\alpha = 0.4$  pour les deux composantes de vitesse

$\alpha = 0.6$  pour la température

- Pour le cas 3D

$\alpha = 0.2$  pour les trois composantes de vitesse

$\alpha = 0.5$  pour la température

Notons qu'aucune sous-relaxation n'est requise pour la pression.

## 4.6. CHOIX DU MAILLAGE

Afin de nous assurer que la solution numérique éventuellement obtenue serait indépendante du nombre de noeuds qui forment la grille de calcul, on a procédé à une série de tests du maillage .

### 4.6.1 Cas 2D axisymétrique avec une surface libre déformable pour les cas simulés en 1-g

En raison de la présence de la surface libre déformable qu'on approxime par une courbe de type "zig-zag escalier" et vu que le maillage utilisé est fixe, le choix du maillage est très important. En effet, on a considéré un cas caractérisé par les paramètres adimensionnels suivants:  $Ma = 4800$ ,  $Pr = 8.9$ ,  $A = 0.732$ ,  $Bd = 2.16$ ,  $Bs = 2.66$  et  $Ca = 0.0023$ . Le fluide utilisé correspond à  $NaNO_3$  liquide.

Les différents maillages non-uniformes qui ont été essayés sont respectivement  $30 \times 50$ ,  $36 \times 50$ ,  $42 \times 50$ ,  $48 \times 44$  et  $52 \times 40$ . On a mis l'accent sur le maillage non-uniforme car on sait a priori que dû à la nature de l'écoulement, les gradients de température et de vitesse seront importants près de deux disques et le long de la surface libre. Pour les vingt premiers noeuds qui se trouvent autour de la surface libre de la zone dans la direction radiale,  $\Delta r$  est réduit à 0.005 pour tous les maillages testés. Le maillage non-uniforme est adopté dans la direction axiale et dans la direction radiale (à partir du 21<sup>ème</sup> noeud de la frontière de la zone inactive selon r). Ce maillage est généré par l'expression suivante:

$$Y_i = y_2 + L \left( \frac{i-2}{N-2} \right)^{1.2} \quad (4.46)$$

où  $Y_i$  = l'emplacement du point du maillage à déterminer

L = longueur du domaine

i = l'ordre du point considéré

N = le nombre maximum des lignes comprises à l'intérieur du domaine L.

Les figures 4.7 a et b illustrent une comparaison des résultats obtenus avec les différents maillages testés respectivement pour la composante axiale de vitesse  $V_z$  et la température le long de la surface libre de la zone.

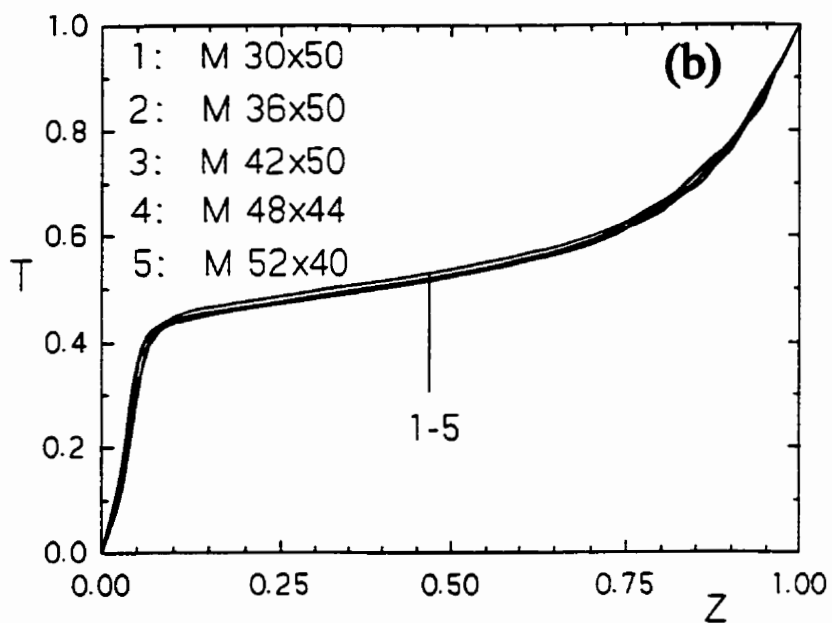
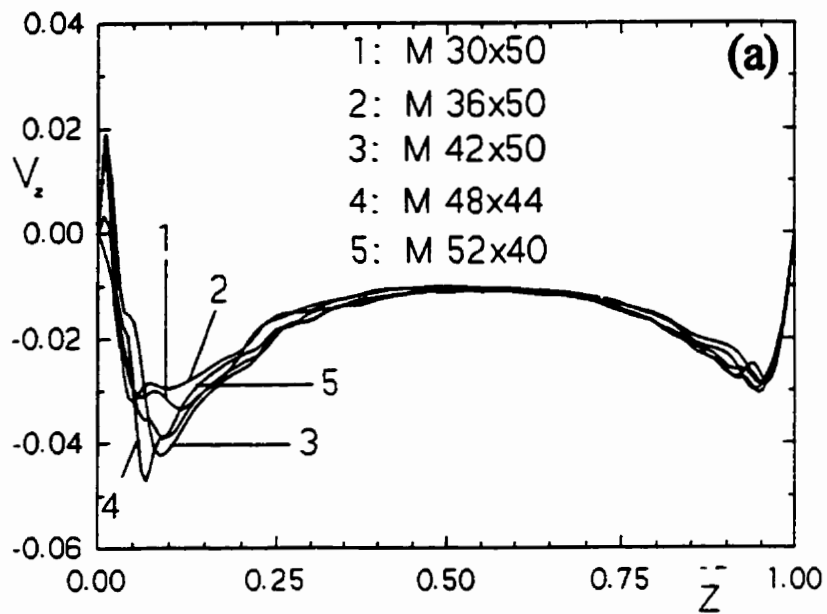
Il faudra souligner que le maillage le plus fin, que le programme de calcul 2D nous permet, comporte environ 2100 noeuds. En examinant la figure 4.7 a, on remarque que les solutions correspondantes aux maillages 42 x 50, 48 x 44 et 52 x 40 sont proches les unes des autres. Le maillage 42 x 50 présente un profil moyen de  $V_z$ , sur la plus grande partie de la surface libre, qui se situe entre ceux obtenus par les maillages 48 x 44 et 52 x 40. Ainsi, le système de grillage 42 x 50 (42 noeuds selon z, 50 noeuds selon r, voir figure 4.8 a) a été retenu pour les simulations ultérieures en présence de la surface libre déformable.

#### **4.6.2 Cas 2D axisymétrique avec une surface libre parfaitement cylindrique pour les cas simulés en $\mu$ -g**

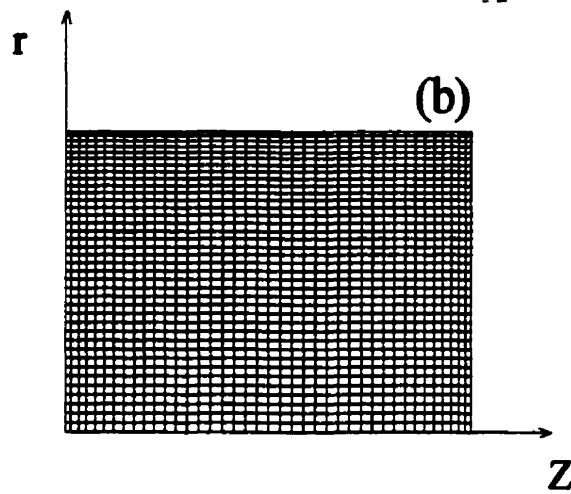
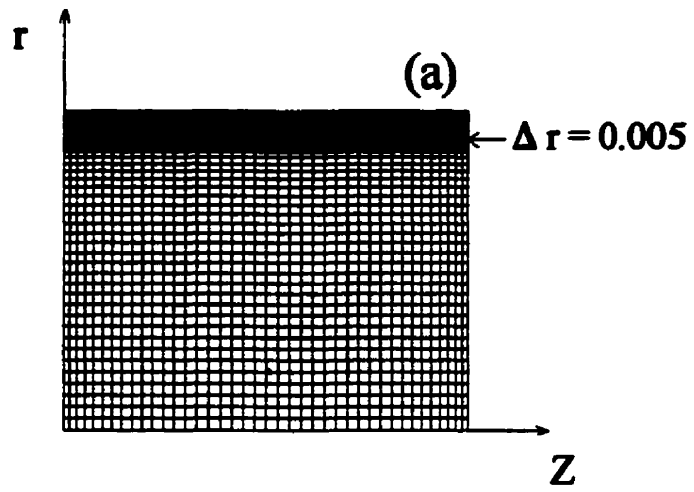
Vue que la surface libre est cylindrique, on n'a pas recours à la zone inactive, d'où le maillage adopté est 42 x 40 (42 noeuds selon la direction axiale et 40 noeuds selon la direction radiale, voir figure 4.8 b).

#### **4.6.3 Cas 3D avec une surface libre cylindrique pour les cas simulés en $\mu$ -g**

Pour le test du maillage en 3D, on a procédé en deux étapes. En premier lieu, on détermine le système de grillage dans le plan r-z et ensuite on fait des tests pour étudier



**Figure 4.7 Profil de la vitesse axiale et de la température sur la surface libre pour 5 différents maillages (Cas 2D avec une surface libre déformable)**



**Figure 4.8 a) Maillage 42 x 50 adopté pour les cas 2D avec une surface libre déformable  
b) Maillage 42 x 40 adopté pour les cas 2D avec une surface libre cylindrique**

l'influence du nombre de noeuds selon  $\theta$  sur la précision des résultats numériques pour un cas 3D.

- Selon r - z

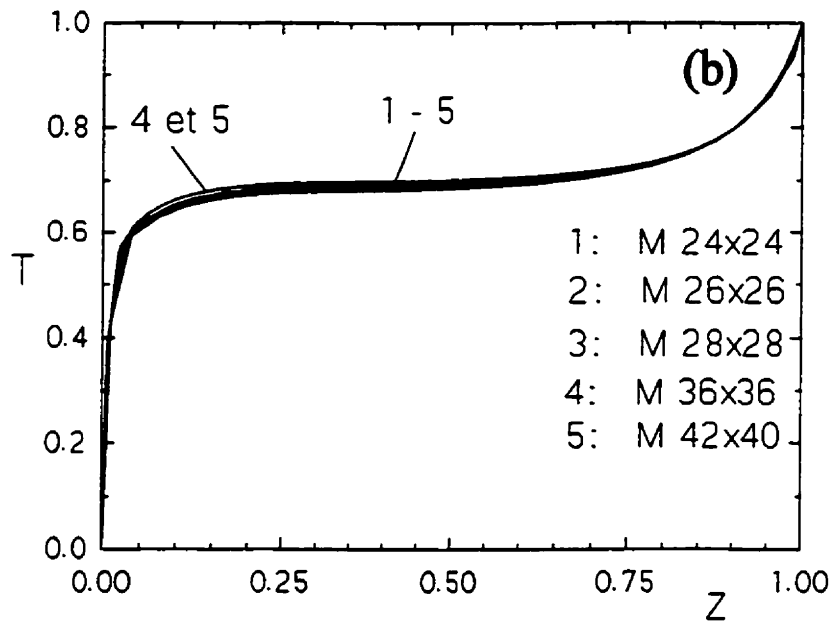
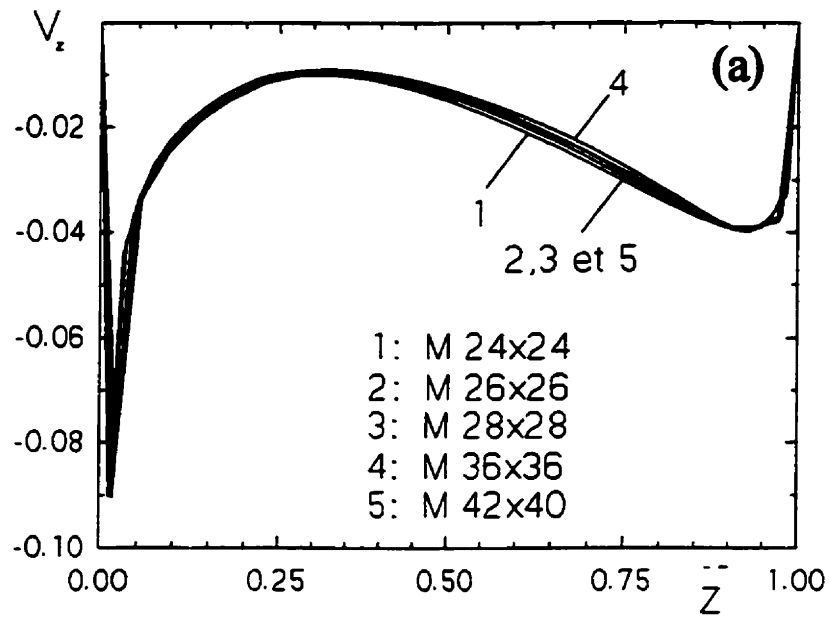
Les figures 4.9 a et b montrent la vitesse axiale et la température le long de la surface libre pour cinq différents maillages non-uniformes dans le plan z - r: 24 x 24, 26 x 26, 28 x 28, 36 x 36 et 42 x 40 obtenus pour le cas où  $A = 0.732$ ,  $Ma = 10000$ ,  $Pr = 8.9$  et  $Bd = 2.16 \cdot 10^4$ . Le paramètre  $Bd = 2.16 \cdot 10^4$  correspond en tout fin pratique à un environnement  $10^4$  g.

En examinant les figures 4.9 a et b, on remarque que les résultats sont presque indépendants du nombre des noeuds. Étant donné le nombre important d'équations à résoudre en régime transitoire et sachant qu'une grille de calcul très fine augmente le nombre d'opérations lors d'une simulation et nécessite par conséquent un temps de calcul considérable, nous avons décidé d'opter pour un maillage 26 x 26 dans le plan r- z.

- Test du maillage selon  $\theta$

Pour avoir un écoulement vraiment tridimensionnel, on a procédé à imposer artificiellement une température  $T = 0.5$  sur une moitié du disque chaud et  $T = 1$  sur l'autre moitié. Sur le disque froid, la température adimensionnelle est nulle. Les paramètres adimensionnels sont donnés comme suit:  $Ma = 10000$ ,  $Pr = 8.9$ ,  $A = 0.732$  et  $Bd = 2.16 \cdot 10^4$

Les figures 4.10 a et b illustrent respectivement la distribution de la vitesse axiale  $V_z$  et la température  $T$  sur la surface libre de la zone en fonction de  $\theta$  à  $Z = 0.5$  pour les trois maillages suivants: 26 x 26 x 20, 26 x 26 x 24 et 26 x 26 x 28. En examinant ces dernières figures, on peut constater que les solutions correspondantes aux maillages 26 x 26 x 24 et 26 x 26 x 28 sont très proches. En effet, la déviation relative maximale entre la valeur de  $V_{z_{max}}$  obtenue avec un maillage 26 x 26 x 24 et 26 x 26 x 28 est inférieure à 1%. Le maillage 26 x 26 x 24 (24 noeuds selon  $\theta$ ) a été adopté pour les cas simulés en 3D.



**Figure 4.9 Profil de la vitesse axiale et de la température sur la surface libre parfaitement cylindrique**



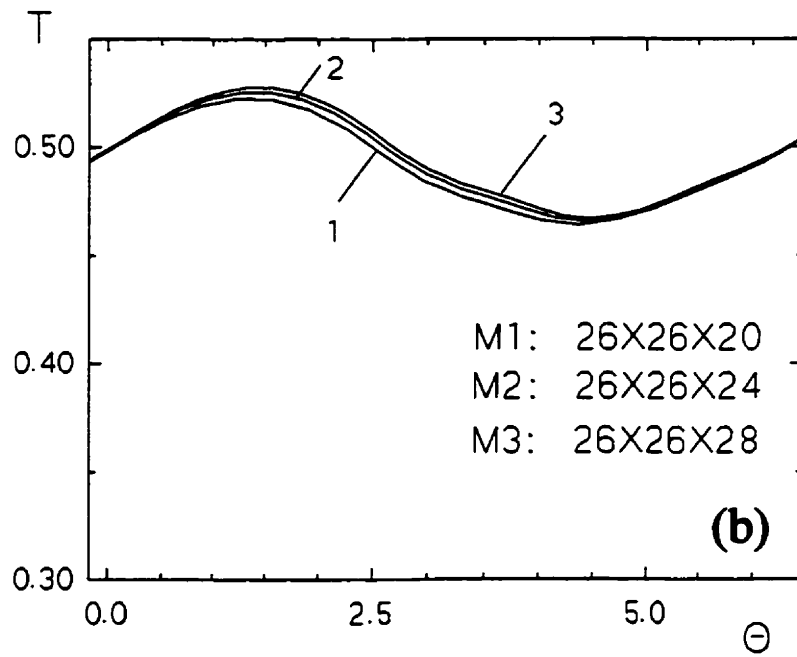
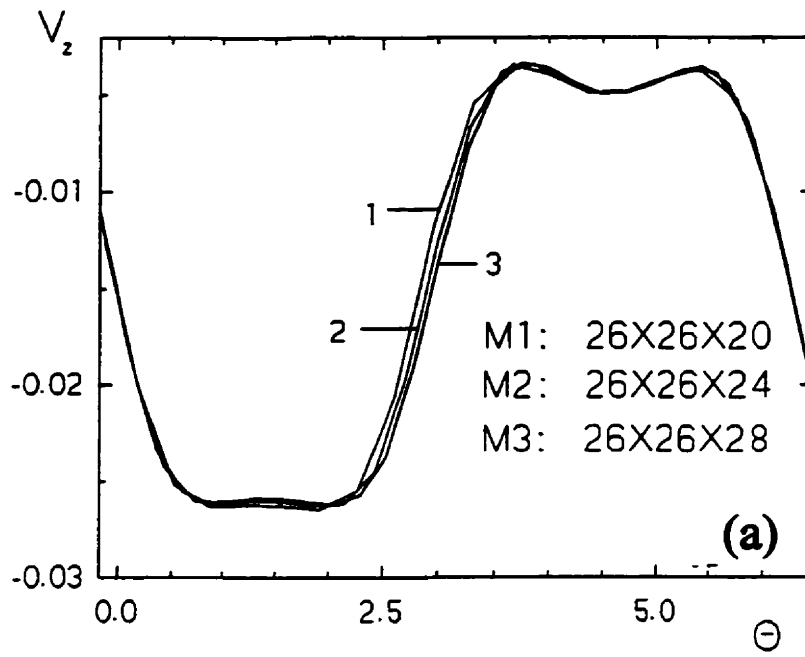


Figure 4.10 Profil de la vitesse axiale et de la température sur la surface libre selon  $\theta$  à  $Z = 0.5$

## 4.7 VALIDATION DU MODÈLE

Le maillage étant choisi, on procède à valider le programme de calcul en comparant les résultats numériques avec les mesures expérimentales.

### 4.7.1 Validation du modèle 2D avec une surface libre déformable

#### a) Comparaison avec Okano et al. / régime permanent

Okano et al. (1989) ont effectué une étude théorique en se basant sur les ordres de grandeur du nombre de Marangoni, du nombre de Grashof et celui de Prandtl. Ils ont compilé, par la suite, les mesures expérimentales sur terre de Preisser et al. (1983) et McNeil et al. (1985) et les ont comparées à leurs résultats. Ils ont déterminé les trois corrélations telles qu'illustrées à la figure 4.11.

La première corrélation est valide pour des faibles circulations du courant thermocapillaire alors que les autres ont été proposées pour des valeurs importantes de  $Re_{zs}$ .  $Re_{zs}$  désigne le nombre de Reynolds de la convection thermocapillaire et est défini, selon les auteurs et, après modification pour correspondre à notre notation, par:

$$Re_{zs} = \frac{Ma V_{zMAX}}{2 Pr} \quad (4.47)$$

où  $V_{zMAX}$  est la vitesse axiale maximale sur la surface libre.

Les cercles vides sur la figure 4.11 correspondent aux différentes valeurs numériques obtenues par la présente étude, en régime permanent, pour diverses valeurs de Ma, pour le NaNO<sub>3</sub> (Pr = 8.9). Alors, les symboles x correspondent à l'huile de Silicone (Pr = 196.5). La concordance entre les résultats numériques et les corrélations peut être qualifiée de très satisfaisante.

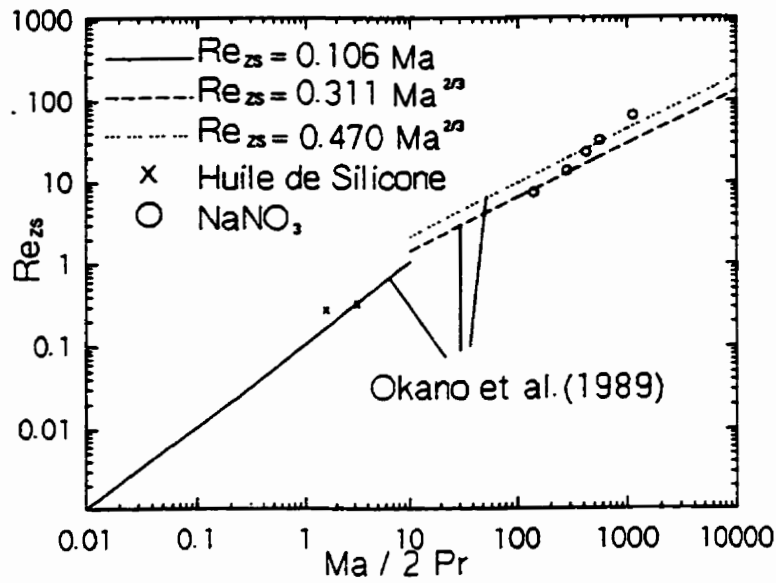


Figure 4.11 Validation des résultats avec les corrélations de Okano et al. (1989)

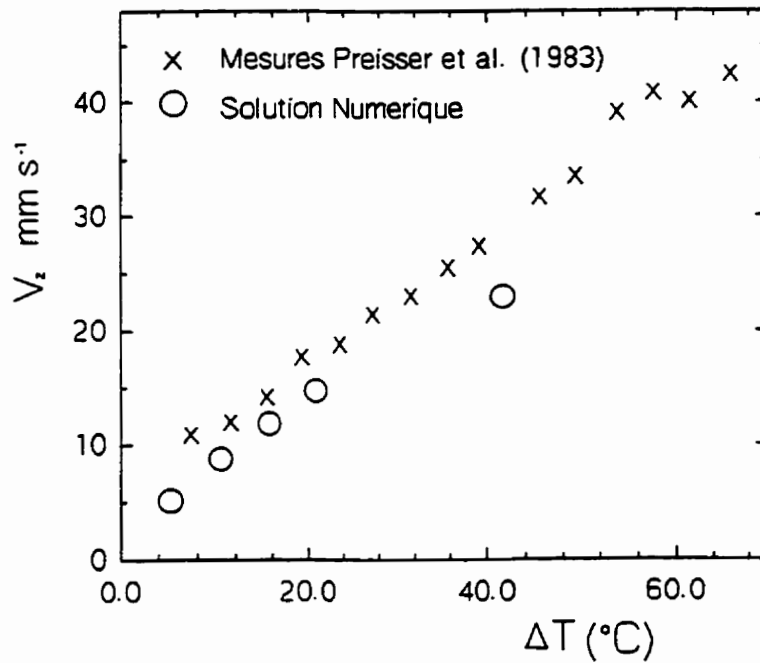


Figure 4.12 Comparaison numérique / expérimentale de la variation de  $V_z$  en fonction de  $\Delta T$  pour une zone de  $NaNO_3$

**b) Comparaison avec les données expérimentales de Preisser et al. / régime permanent**

Afin de s'assurer d'avantage de la fiabilité du modèle numérique, on a comparé nos résultats avec les mesures expérimentales de Preisser et al. (1983). Ces auteurs ont effectué une série de mesures dans une zone flottante de  $\text{NaNO}_3$ , opérant sur terre, ayant un diamètre de 6 mm et une hauteur de 4.1 mm et suspendue par effet capillaire entre deux disques maintenus à des températures différentes.

La figure 4.12 illustre la variation de la vitesse axiale maximale en régime permanent sur la surface libre en fonction de l'écart de température entre les deux disques. La concordance numérique / expérimentale est satisfaisante.

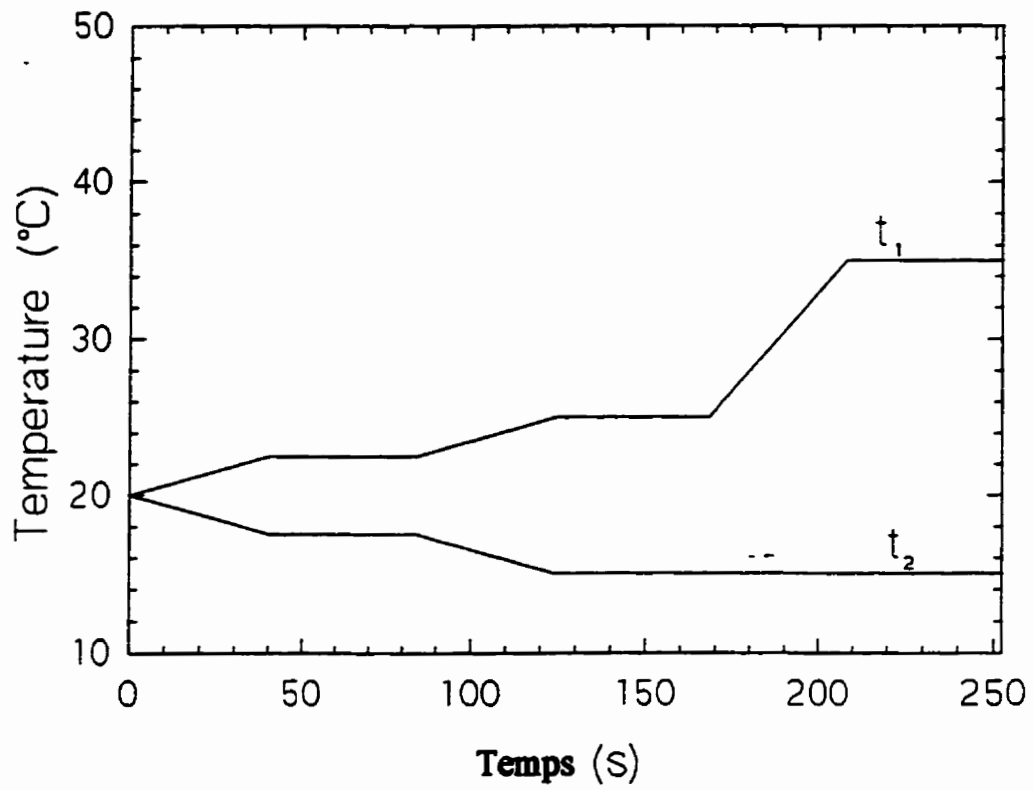
**c) Comparaison avec Saghir et al. / régime transitoire**

On a comparé nos résultats numériques avec les mesures expérimentales et numériques de Saghir et al. (1992) pour une zone flottante de l'huile de Silicone opérant sur terre.

La figure 4.13 présente la variation temporelle de la température des deux disques telle qu'imposée expérimentalement par Saghir et al. Au temps initial  $\tau = 0$ , la température du liquide est de  $20^\circ\text{C}$  et est identique à celle des disques.

Les figures 4.14 a et b illustrent respectivement le profil de température et de vitesse axiale le long de la surface libre au temps  $\tau = 84$  s pour un écart de température  $\Delta T = 5^\circ\text{C}$  entre les deux disques. Les figures 4.15 a et b montrent respectivement la distribution de la température et de la vitesse axiale sur la surface libre au temps  $\tau = 168$  s pour  $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ . En examinant les figures 4.14 a et 4.15 a, on peut conclure que la comparaison de nos résultats numériques avec ceux de Saghir peut être qualifiée de très satisfaisante.

En examinant les figures 4.14b et 4.15b, pour  $0.21\text{cm} < H < 0.34\text{cm}$ , la concordance entre nos résultats numériques et les mesures expérimentales de Saghir et al. (1992) peut être



**Figure 4.13 Evolution temporelle de la température des deux disques telle qu'imposée par Saghir et al. (1992)**

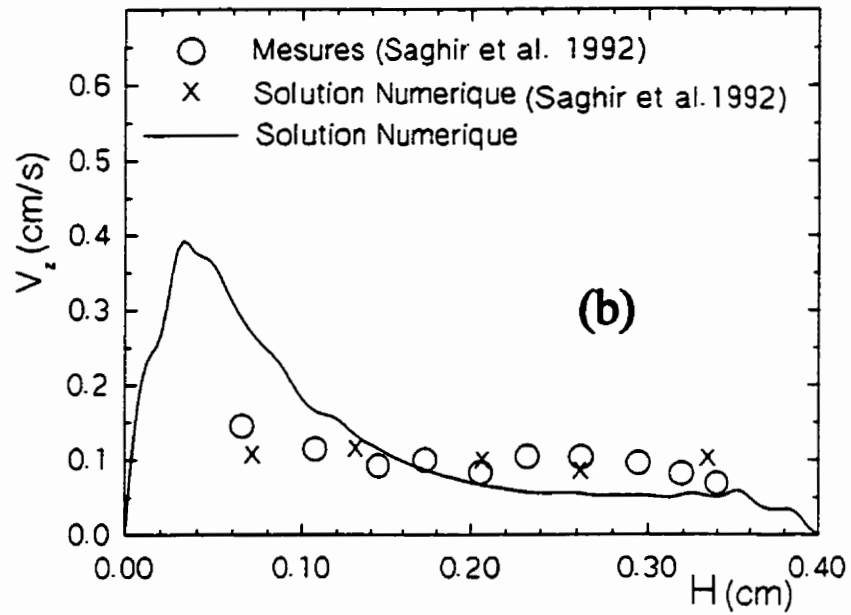
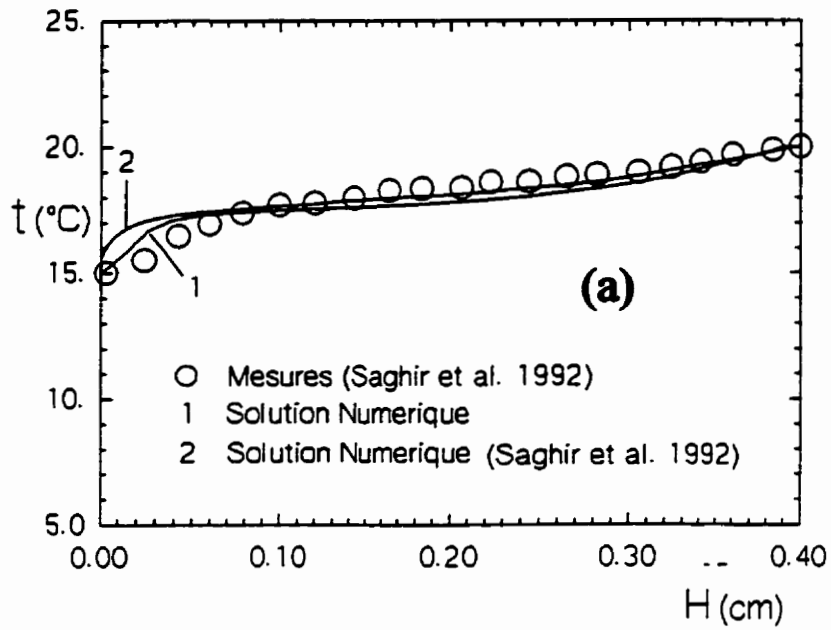


Figure 4.14 Comparaison numérique / expérimentale pour les profils de température et de la vitesse axiale sur la surface libre ( $\Delta T = 5^\circ \text{C}$ , huile de Silicone)

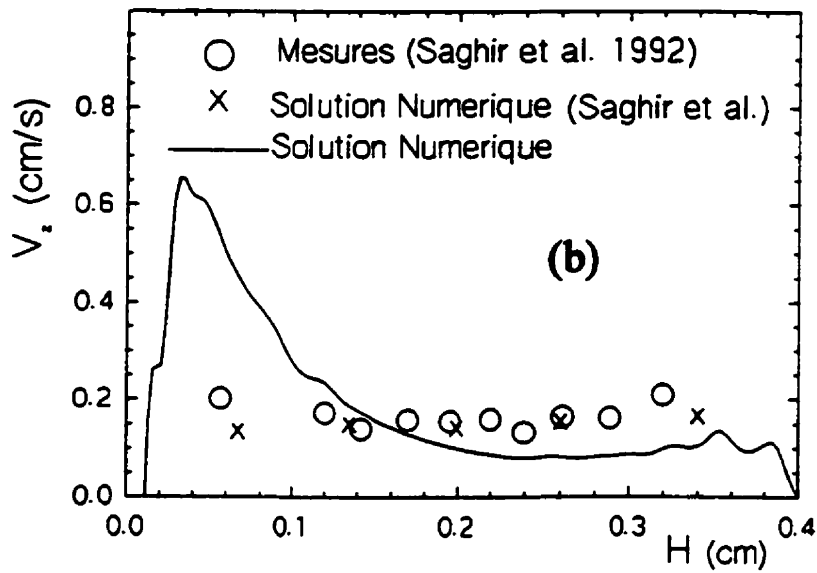
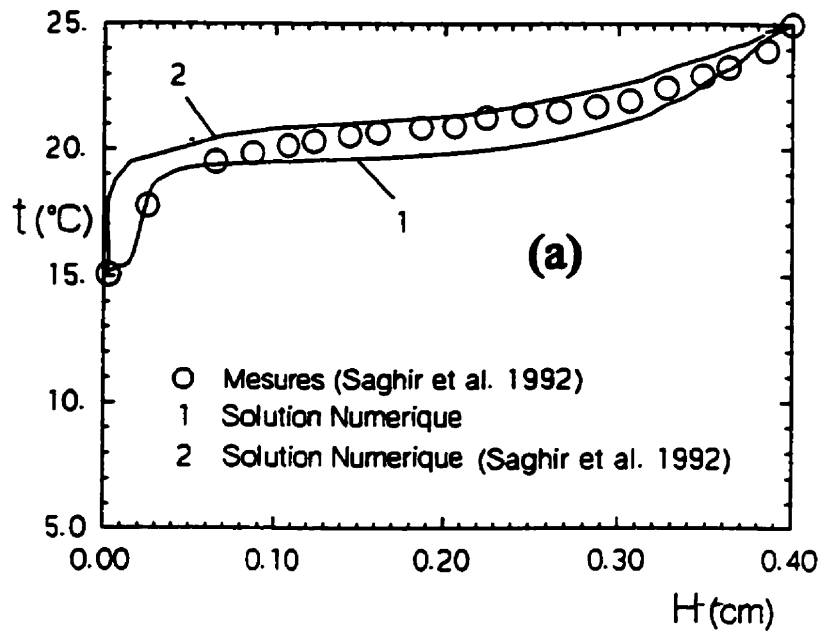


Figure 4.15 Comparaison numérique / expérimentale pour les profils de température et de la vitesse axiale sur la surface libre ( $\Delta T = 10^\circ \text{C}$ , huile de Silicone)

qualifiée d'acceptable. Cependant dans la région adjacente au disque froid, cette concordance est plus ou moins bonne. Cette différence numérique / expérimentale peut être attribuée à l'incertitude expérimentale dans la méthode utilisée pour déterminer  $V_z$  dans une zone flottante de 4 mm de hauteur.

#### **4.7.2 Validation du modèle 2D avec une surface libre cylindrique**

Par manque de données expérimentales en milieu microgravitationnel, on a comparé nos résultats numériques avec ceux de Saghir et al. (1990).

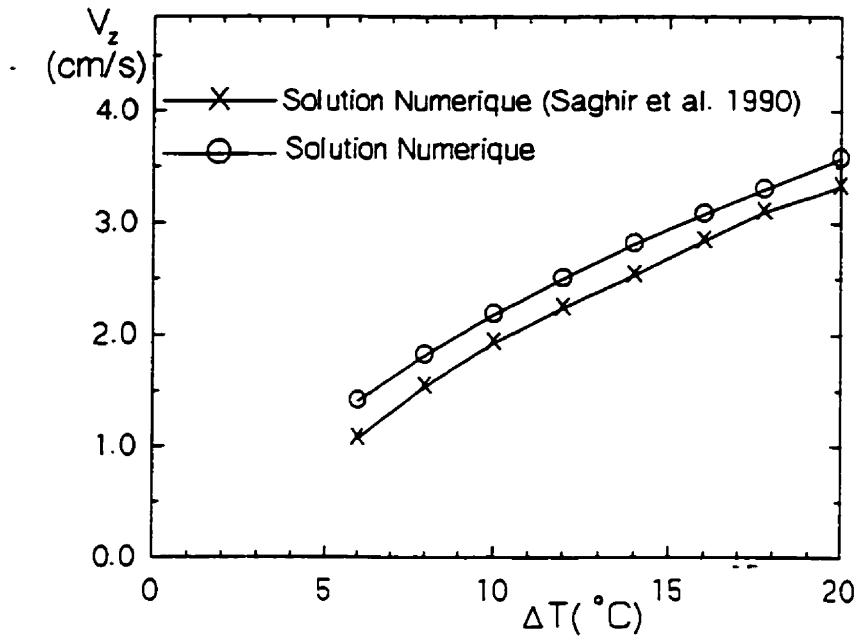
La figure 4.16 montre la variation de la vitesse axiale maximale sur la surface libre en fonction de l'écart de température entre les deux disques pour une zone flottante de  $\text{NaNO}_3$ . Notons que ces auteurs ont utilisé la méthode des éléments finis dans leurs études. L'examen de la figure 4.16 montre que l'allure des courbes est très similaire.

#### **4.7.3 Validation du modèle 3D avec une surface libre cylindrique en environnement microgravitationnel**

Pour valider le modèle 3D, on a simulé le cas où l'écoulement est axisymétrique et permanent d'une zone flottante de  $\text{NaNO}_3$  ( $A = 0.732$ ,  $Pr = 8.9$ ,  $Ma = 10000$ ,  $Bd = 2.16 \times 10^4$ ) avec le programme 3D. Ce même cas a été simulé en utilisant le programme de calcul 2D axisymétrique pour deux différents maillages.

En examinant les figures 4.17 a et b, qui illustrent respectivement la distribution de la température et la vitesse axiale le long de la surface libre, on peut constater que les résultats numériques obtenus avec le programme 3D sont à toute fin pratique identiques à ceux obtenus avec le programme 2D axisymétrique.





**Figure 4.16 Variation de la vitesse axiale maximale sur la surface libre en fonction de  $\Delta T$  pour  $\text{NaNO}_3$**

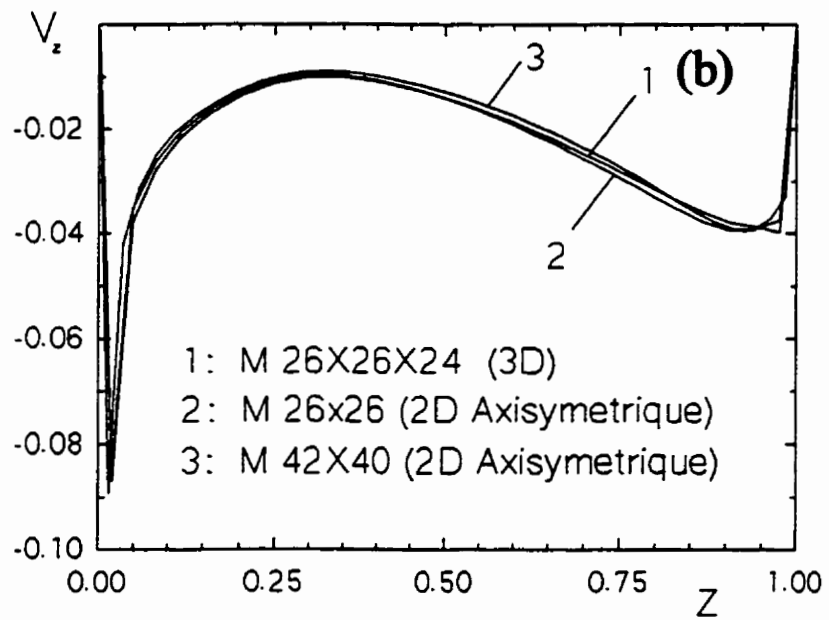
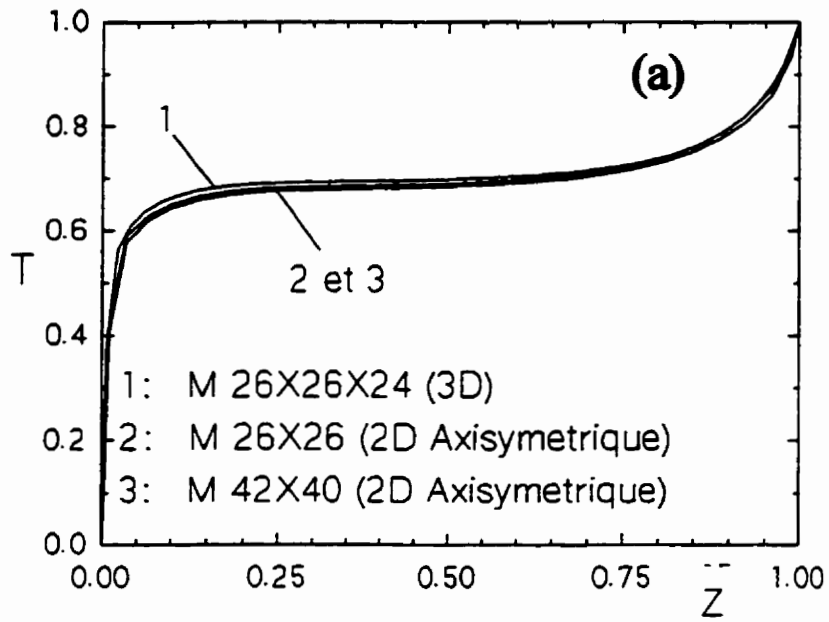


Figure 4.17 Profil de la température et de la vitesse axiale sur la surface libre pour 2D et 3D

À la lumière des comparaisons et discussions avancées dans ce chapitre, on peut conclure avec confiance sur la validité des modèles mathématiques (2D et 3D) proposés de même que la fiabilité de la méthode numérique choisie pour la résolution des équations de conservation et leurs conditions aux limites appropriées pour un écoulement thermocapillaire au sein d'une zone flottante.

#### 4.8 PROPRIÉTÉS DES MATÉRIAUX UTILISÉS

Rappelons que les propriétés des matériaux utilisés dans cette étude, le  $\text{NaNO}_3$  et le Silicone, ont été évaluées à la température de fusion  $t_m$ . Les tableaux 4.1 et 4.2 résument respectivement les valeurs des propriétés du  $\text{NaNO}_3$  (tirées de Preisser et al., 1983) et du Silicone (tirées de Saghir 1987)

Tableau 4.1 Propriétés du  $\text{NaNO}_3$

Température de fusion $t_m$	306.8 °C
Masse volumique $\rho_m$	1.903 g/cm <sup>3</sup>
Coefficient d'expansion thermique $\beta$	$3.8 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$
Tension de surface $\sigma_m$	119.7 dyne / cm
Gradient de tension de surface $\partial\sigma / \partial t$	$-5.5 \times 10^{-2} \text{ dyne / cm K}$
Viscosité dynamique $\mu_m$	$2.82 \times 10^{-2} \text{ g / s cm}$
Viscosité cinématique $\nu_m$	$1.48 \times 10^{-2} \text{ cm}^2 / \text{s}$
Conductivité thermique $k_m$	0.571 W / m K
Diffusivité thermique $\alpha_m$	$1.67 \times 10^{-2} \text{ cm}^2 / \text{s}$
Chaleur spécifique $C_{pm}$	1800 J / kg K

**Tableau 4.2 Propriétés du Silicone**

Température de fusion $t_M$	1420 °C
Masse volumique $\rho_M$	2.53 g/cm <sup>3</sup>
Coefficient d'expansion thermique $\beta$	1.5 x 10 <sup>-4</sup> K <sup>-1</sup>
Tension de surface $\sigma_M$	860 dyne / cm
Gradient de tension de surface $\partial\sigma / \partial t$	-0.5 dyne /cm K
Viscosité dynamique $\mu_M$	9.79 x 10 <sup>-3</sup> g /s cm
Viscosité cinématique $\nu_M$	3.8 x 10 <sup>-3</sup> cm <sup>2</sup> / s
Conductivité thermique $k_M$	52 W / m K
Diffusivité thermique $\alpha_M$	0.24 cm <sup>2</sup> / s
Chaleur spécifique $C_{pM}$	930 J / kg K --

## **PREMIÈRE PARTIE**

--

## **RÉSULTATS OBTENUS AVEC LE MODÈLE 2D**

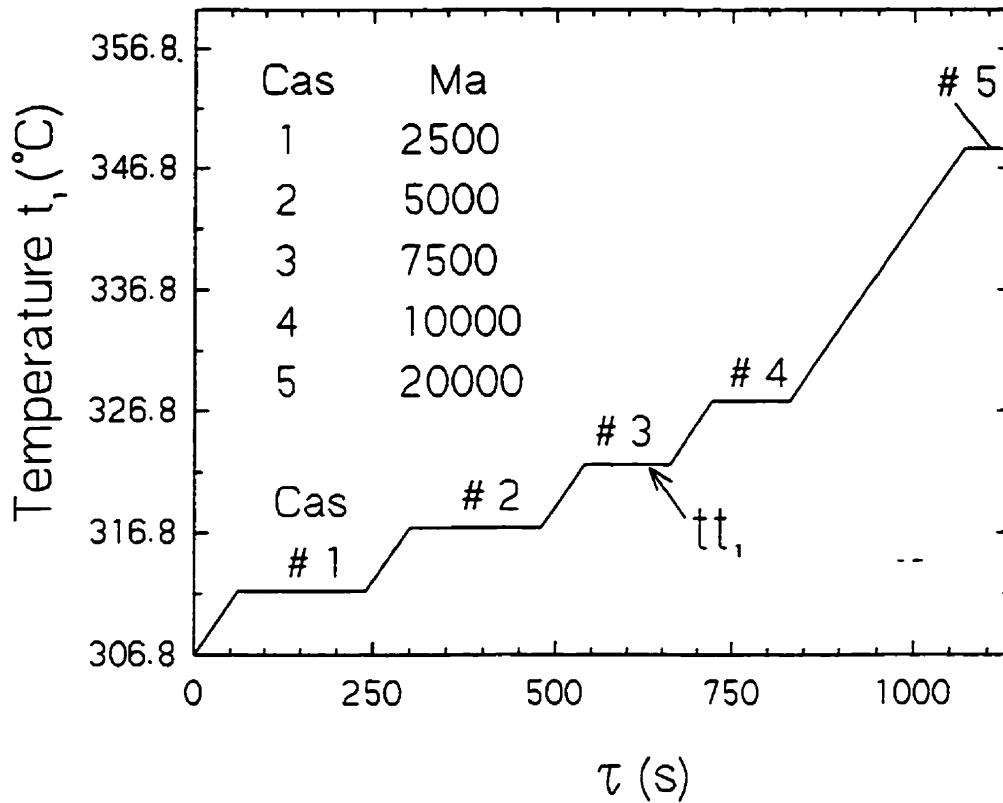
## **CHAPITRE 5**

### **RÉSULTATS OBTENUS EN 2D POUR LE $\text{NaNO}_3$**

Dans ce chapitre, on a étudié l'évolution temporelle de la structure axisymétrique de l'écoulement et du champ thermique à l'intérieur d'une zone flottante de  $\text{NaNO}_3$  ( $\text{Pr} = 8.9$ ) pour différents nombres de Marangoni. Le rapport géométrique,  $A$ , est fixé à 0.732 qui correspond aux dimensions suivantes de la zone:  $H = 4.1$  mm et  $R_0 = 3$  mm. Pour les cas simulés sur terre, on a tenu compte de la déformabilité de la surface libre de la zone. Alors que dans l'espace ( $\mu\text{-g}$ ), on a considéré que la surface libre parfaitement cylindrique.

#### **5.1 VARIATION TEMPORELLE DE LA TEMPÉRATURE DU DISQUE CHAUD ET LE CHOIX DU PAS DE TEMPS**

La figure 5.1 montre l'évolution temporelle de la température du disque chaud, telle qu'imposée lors des simulations numériques pour  $\text{NaNO}_3$ . Cette température  $t_1$  augmente linéairement de  $5$  °C / min. Ensuite, elle demeure constante sur un palier, pour chaque cas étudié, afin que le régime permanent soit atteint. Notons que pour tous les cas simulés, on a trouvé que le temps nécessaire sur un palier pour atteindre le régime permanent ne dépasse pas les 30 secondes. Il est intéressant de mentionner que le chauffage par "palier" réduit considérablement le temps de calcul. En effet, on considère que l'estimé initial d'un cas quelconque correspond à la solution du cas qui le précède plutôt que de partir des conditions initiales qui correspondent à l'état du repos total ( $\tau = 0$ ). Par exemple, l'estimé initial du cas #5 caractérisé par  $\text{Ma} = 20000$  correspond à la solution obtenue pour le cas # 4 ( $\text{Ma} = 10000$ ) à  $\tau = 830$  s.



<b>Cas# 1</b>	<b>Pour <math>0 \leq \tau \leq 240</math> S</b>	<b>Ma = 2500</b>
<b>Cas# 2</b>	<b>Pour <math>240 \leq \tau \leq 480</math> S</b>	<b>Ma = 5000</b>
<b>Cas# 3</b>	<b>Pour <math>480 \leq \tau \leq 660</math> S</b>	<b>Ma = 7500</b>
<b>Cas# 4</b>	<b>Pour <math>660 \leq \tau \leq 830</math> S</b>	<b>Ma = 10000</b>
<b>Cas# 5</b>	<b>Pour <math>830 \leq \tau \leq 1130</math> S</b>	<b>Ma = 20000</b>

**Figure 5.1 Evolution temporelle de la température du disque chaud pour le  $\text{NaNO}_3$**

Signalons que lors des expériences de Saghir et al. (1992) pour les huiles de Silicone, la température des disques varie linéairement en fonction du temps et passe par des paliers (voir Fig. 4.13). Notons finalement que Schwabe et Scharmann (1983) ont adopté une pente du chauffage,  $dt / d\tau$ , de l'ordre de  $6 \text{ }^\circ\text{C} / \text{min}$  dans leurs travaux expérimentaux concernant une zone flottante de  $\text{NaNO}_2$ .

- **Choix du pas de temps**

Afin de pouvoir suivre adéquatement les changements du champ de l'écoulement et du champ thermique au cours du temps, le choix d'un pas de temps  $\Delta\tau$  est très important. Dans cette étude, on s'est inspiré des données expérimentales de Preisser et ses collègues (1983) obtenues pour le  $\text{NaNO}_2$ , et surtout des travaux numériques de Rupp et al. (1989). Ainsi, on a choisi les valeurs de  $\Delta\tau$  comme suit:

- \* Sur le palier du cas #5,  $\text{Ma} = 20000$ ,  $\Delta\tau$  est fixé à  $1/50$  s. On a raffiné le pas de temps dans le but de détecter les oscillations probables à ce nombre de Marangoni relativement élevé.
- \* Pour  $7500 \leq \text{Ma} \leq 10000$  (cas #3 et 4), on a adopté un pas de temps de l'ordre de  $1/8$  s.
- \* Pour les cas #1 et 2 ( $\text{Ma} \leq 5000$ ),  $\Delta\tau$  est fixé à 1 seconde.

- **Remarque**

Il importe de noter que pour chaque cas étudié (en  $\mu\text{-g}$  et également en  $1\text{-g}$ ), les valeurs de  $T$ ,  $V_z$  et  $\psi$  sont exprimées par rapport à leur propre base  $\Delta T$  ( $\Delta T$  est la différence de température entre les deux disques,  $\Delta T = t_1 - t_2$ ). Il convient donc d'exercer la prudence quand on veut comparer les valeurs obtenues pour de différentes valeurs de  $\text{Ma}$ .



## **5.2 COMPORTEMENT TRANSITOIRE D'UNE ZONE FLOTTANTE DE $\text{NaNO}_3$ , OPÉRANT EN $\mu\text{-g}$**

Dans cette section, on présentera l'évolution temporelle de la structure des lignes de courant et des isothermes ainsi que les profils de température et de vitesse axiale sur la surface libre d'une zone flottante de  $\text{NaNO}_3$ , pour  $\text{Ma} = 2500$ .

### **5.2.1 Évolution temporelle de la structure des lignes de courant en $\mu\text{-g}$**

La figures 5.2 montre l'évolution temporelle de la structure des lignes de courant pour  $\text{Ma} = 2500$ .

En examinant les figures 5.2a, b, c et d, on observe la même structure de l'écoulement pour les quatre temps considérés. C'est une structure unicellulaire avec un centre de recirculation localisé proche de la surface libre, caractéristique propre à l'écoulement thermocapillaire. Sur la surface libre, le fluide se déplace de la droite (frontière chaude) vers la gauche (frontière froide) à cause du fait que la tension superficielle - ici force motrice - augmente quand la température diminue. L'écoulement inverse est observé dans la partie centrale de la zone pour satisfaire la continuité. Il convient de noter que les lignes de courant sont serrées près de la surface libre, ce qui indique un écoulement intense dans cette région et prouve que la force motrice de l'écoulement est surfacique.

La valeur de  $\psi_{\text{max}}$ , qui mesure l'intensité des courants convectifs, augmente avec le temps. Elle passe par un maximum à  $\tau = 60$  s comme le montre le tableau 5.1 et puis diminue légèrement pour atteindre une valeur asymptotique de 0.000168 à  $\tau = 240$ s. Cette diminution de  $\psi_{\text{max}}$  sur le palier (i.e. quand la différence de température entre les deux disques devient constante) peut être attribuée au fait que le fluide en circulation tend à uniformiser la distribution de la température dans une grande partie le long de la surface libre de la zone. Par

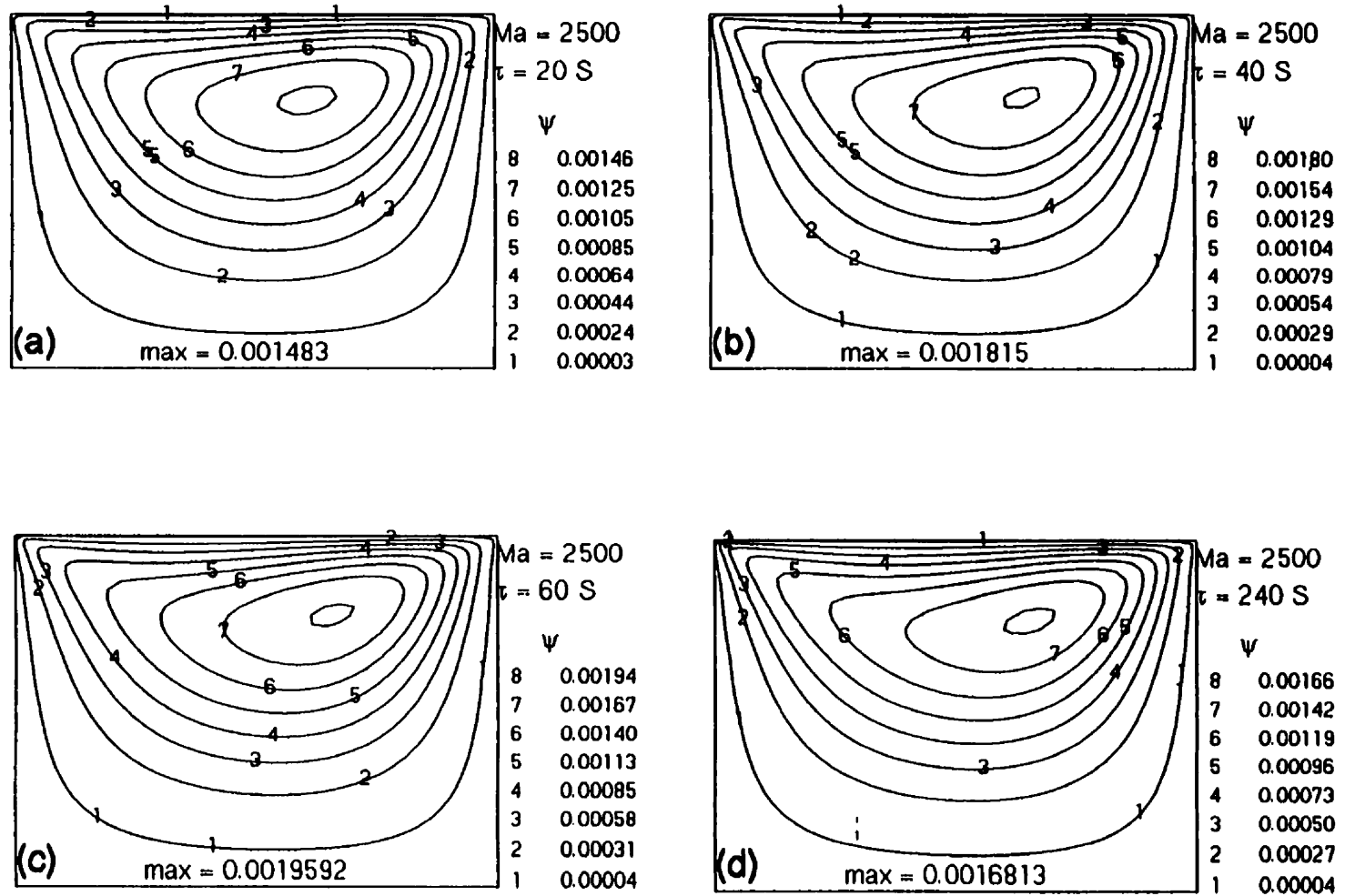


Figure 5.2 Évolution temporelle de la structure des lignes de courant pour  $Ma = 2500$ ,  $\mu$ -g

conséquent, on observe une légère diminution des gradients de température qui engendre une légère diminution de  $V_z$  près du disque chaud (comme on va voir plus loin à la figure 5.4).

Tableau 5.1 Évolution temporelle de  $\psi_{\infty}$  pour  $Ma = 2500$ ,  $\mu$ -g

$\tau$ (s)	20	30	40	50	60	90	240
$\psi_{\infty}$	0.00148	0.00157	0.00181	0.00188	0.00196	0.00168	0.00168

La présence de gradients élevés de température sur une grande région sur la surface libre près du disque chaud et par conséquent des vitesses axiales importantes, explique le positionnement du centre de recirculation près de la frontière chaude. Ce comportement a été observé par plusieurs chercheurs dont Saghir et Rosenblat (1990) et Fu et Ostrach (1983). Notons finalement, qu'en chauffant la zone ( $0 < \tau \leq 60$  s, Fig. 5.2a, b et c), le centre du vortex se déplace légèrement vers la frontière chaude. Ce déplacement est attribué au fait que les gradients de température pour  $0.7 < Z < 1$  deviennent de plus en plus importants avec l'augmentation de la température du disque chaud.

### 5.2.2 Évolution temporelle des isothermes en $\mu$ -g

La figure 5.3 illustre l'évolution temporelle du champ thermique au sein de la zone, pour  $Ma = 2500$ .

En examinant cette dernière figure, on peut remarquer que les isothermes près du disque chaud restent à toute fin pratique inchangés avec le temps et parallèles à la frontière chaude, ce qui indique que le transfert de chaleur par conduction est important dans cette région. Cependant, la forme courbée des isothermes dans la partie intérieure de la zone et près de la surface libre, est due à la convection thermocapillaire.

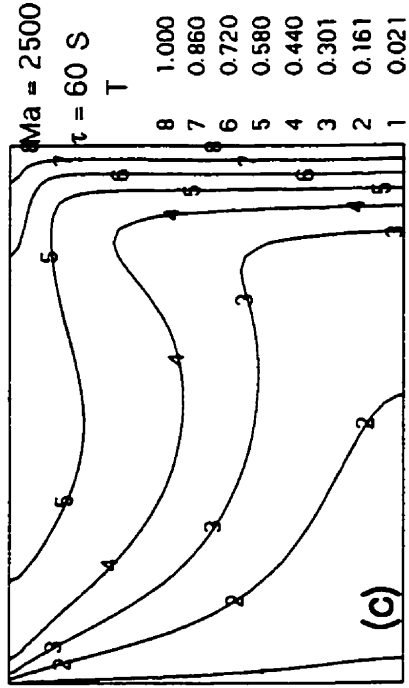
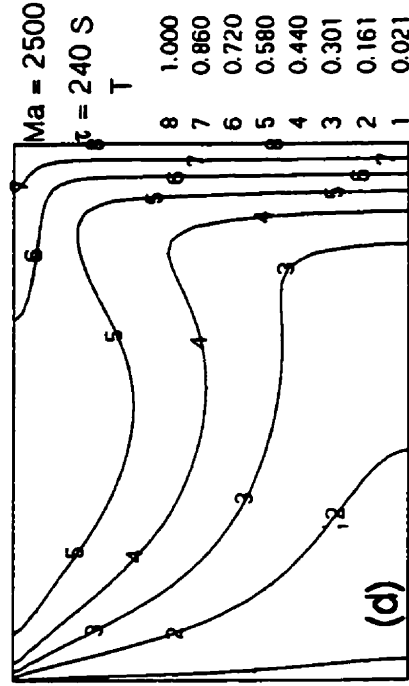
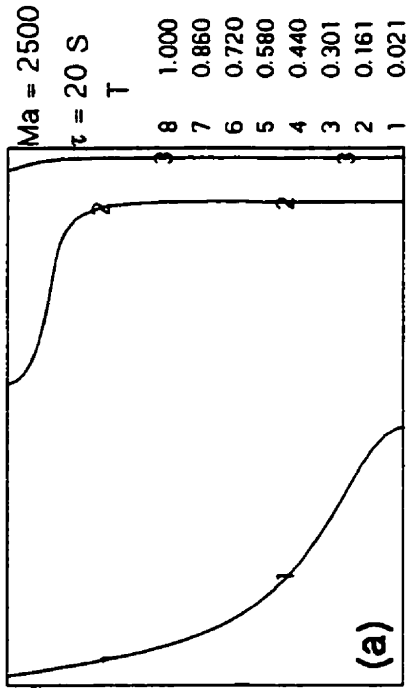
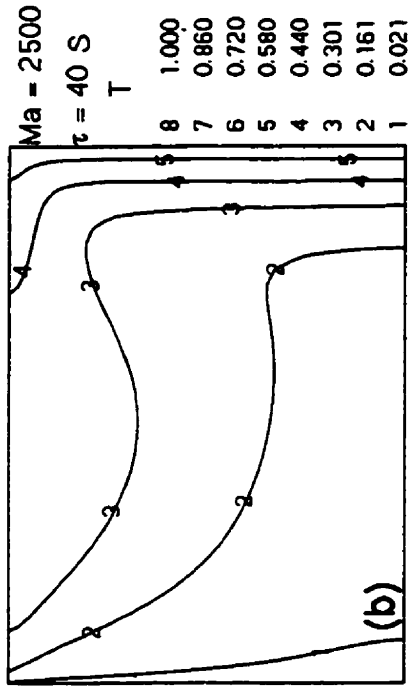


Figure 5.3 Évolution temporelle du champ thermique pour  $Ma = 2500$ ,  $\mu$ -g

Il est intéressant de suivre l'évolution temporelle de l'isotherme 3 de la figure 5.3. Le fluide chaud (ayant une température adimensionnelle supérieure à 0.301) est confiné au début de processus du chauffage de la zone (à l'instant  $\tau = 20$  s par exemple, Figure 5.3a) dans une petite région près du disque chaud. Aux temps  $\tau = 40$  s et 60 s (Fig. 5.3b et c), il occupe une zone plus étendue qui s'élargit du côté de la surface libre. Cet élargissement est dû au mouvement surfacique, qui augmente au fur et à mesure que le temps avance, et engendre une convection de la chaleur sur toute la zone avoisinante à l'interface.

### 5.2.3 Évolution transitoire des profils de température et de $V_z$ sur la surface libre en $\mu$ -g

La figure 5.4a présente l'évolution temporelle de la température le long de la surface libre pour  $Ma = 2500$ .

En examinant la figure 5.4a, on peut observer qu'aux premiers instants du chauffage de la zone, soit  $\tau = 20$  s, le profil de température est presque linéaire, ce qui indique l'importance de la conduction. Cependant, au fur et à mesure qu'on chauffe la zone, les profils de température sont de plus en plus courbés essentiellement près des disques. En d'autres termes, les gradients de température près des frontières augmentent au cours du temps. Il convient de noter la légère diminution du gradient de température près du disque chaud aux temps  $\tau = 90$  s et 240 s (quand on atteint le palier) comparé à celui qui correspond à  $\tau = 60$  s. Ce comportement est dû essentiellement à la stabilisation des courants de la convection thermocapillaire telle que discutée précédemment au paragraphe 5.2.1.

Il est intéressant de mentionner que la température sur la surface libre augmente continuellement avec le temps. Par exemple, la valeur de la température d'un point situé à  $Z = 0.5$  est multipliée approximativement par un facteur de quatre lorsque  $\tau$  passe de 20 s à 240s. En effet, le tableau 5.2 montre l'évolution temporelle de la température de ce point.

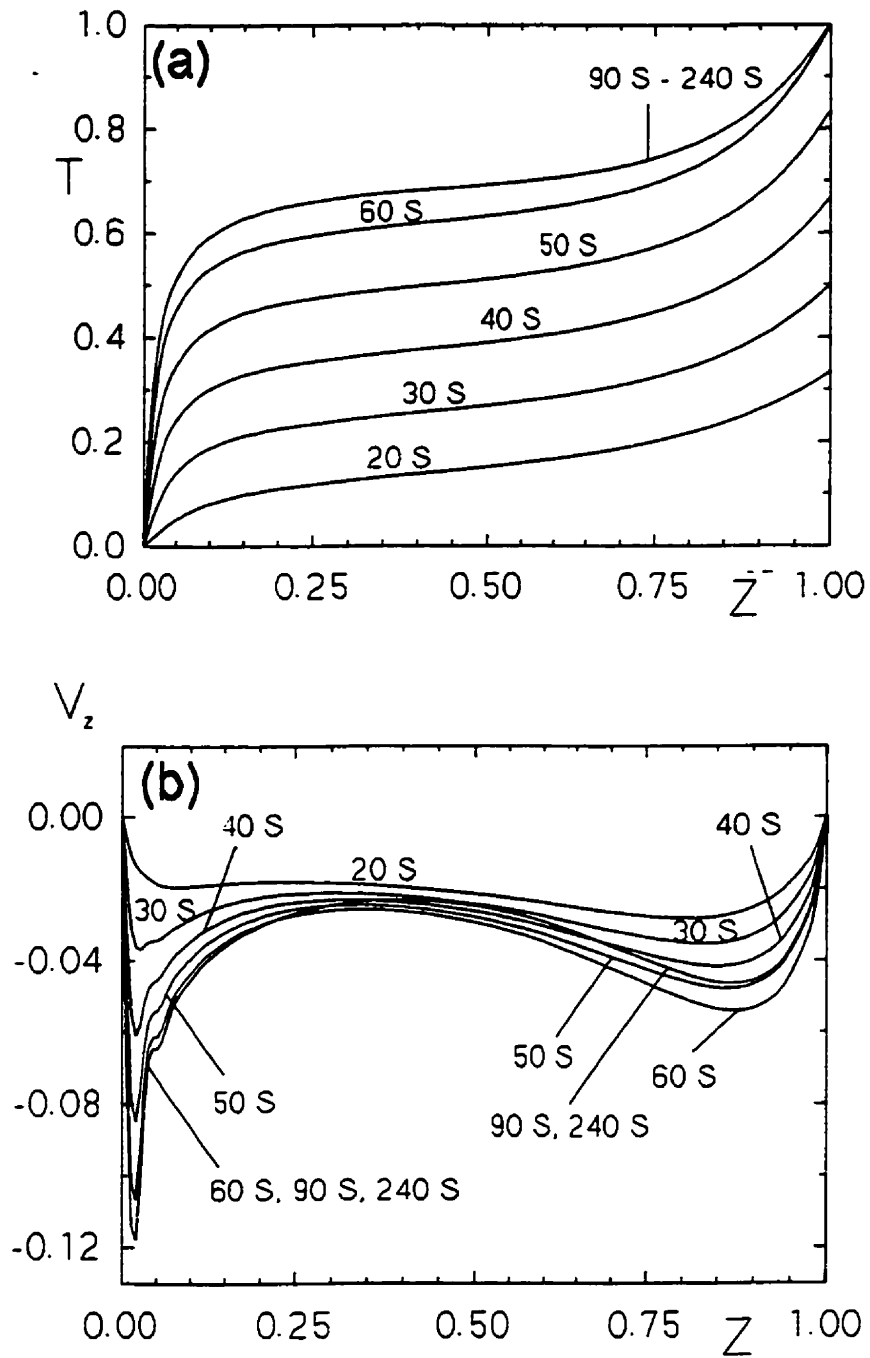


Figure 5.4 Évolution temporelle de la température et de la vitesse axiale le long de la surface libre pour  $Ma = 2500$ ,  $\mu-g$

**Tableau 5.2 Évolution temporelle de la température d'un point situé à  $Z = 0.5$  sur la surface libre,  $Ma = 2500$  ( $\mu\text{-g}$ )**

$\tau(\text{s})$	20	30	40	50	60	90	240
T	0.154	0.272	0.393	0.514	0.635	0.694	0.694

La figure 5.4b montre l'évolution temporelle de  $V_z$  sur la surface libre pour  $Ma = 2500$ .

En premier lieu, on s'aperçoit que pour chaque temps, le profil de  $V_z$  possède deux maxima locaux situés près des deux frontières. On observe également la présence des gradients élevés de  $V_z$  près des disques. Ce comportement est étroitement lié à la présence des gradients importants de température près des deux frontières.

Les gradients de vitesse près des deux disques ainsi que les valeurs de  $V_z$  croissent au cours du temps. Cette augmentation de  $V_z$  est très importante dans une région très étroite près de la frontière froide. En effet, pour  $Z = 0.014$ ,  $V_z$  passe de 0.011, à 0.055 et à 0.113 pour  $\tau = 20$  s, 40 s et 240 s respectivement. Cependant, il est très intéressant de noter que lorsque la différence de température entre les disques devient constante ( $\tau = 90$  s, 240 s), les valeurs de  $V_z$  pour  $0.3 < Z < 1$  diminuent par rapport à celles qui correspondent à  $\tau = 60$  s. Ce comportement est attribué à la stabilisation des courants thermocapillaires.

- **Remarque**

L'évolution temporelle de la structure des lignes de courant et des isothermes ainsi que les profils de température et de vitesse axiale sur la surface libre pour  $Ma = 7500$  et 20000 se trouve dans l'annexe E.

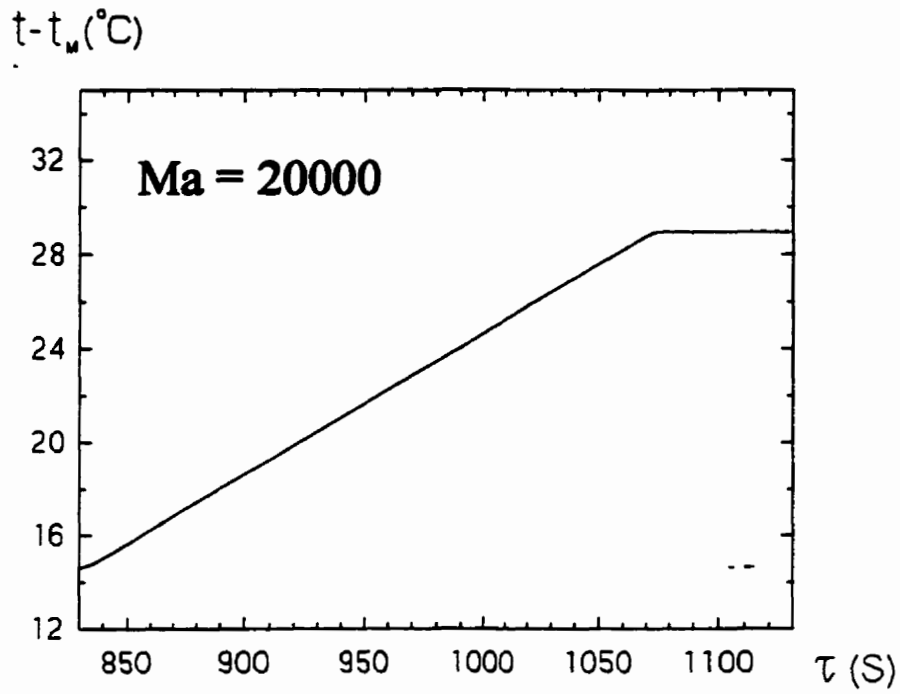
### **5.3 DISCUSSIONS SUR LA STABILITÉ DE L'ÉCOULEMENT POUR $Ma = 20000$**

La figure 5.5 montre l'évolution temporelle de la température d'un point particulier situé sur la surface libre de la zone à  $Z = 0.5$  pour  $Ma = 20000$ . Notons que sur le palier du cas #5 (voir Fig. 5.1), le pas de temps est réduit à  $1/50$  s pour pouvoir détecter la transition axisymétrique / oscillatoire probable pour  $Ma = 20000$ .

En examinant la figure 5.5, on peut constater que la température augmente d'une façon monotone avec le temps et atteint une valeur asymptotique de l'ordre de  $335.7$  °C. Aucune fluctuation de température n'a été enregistrée. Ce même comportement a été observé par Nguyen et al. (1994). A l'aide d'un modèle numérique 2D axisymétrique, ces chercheurs ont constaté que l'écoulement thermocapillaire dans une zone flottante de  $NaNO_3$  demeure stable même pour des nombres de Marangoni très élevés de l'ordre de  $400000$ . A ce stade, une question de grande importance peut se poser. Comment peut-on expliquer le fait qu'aucune oscillation n'ait été observée alors que le nombre de Marangoni dépasse largement la valeur critique,  $Ma_c \approx 10000$ , mesurée expérimentalement par Schwabe et Scharmann (1983, 1984). Ce comportement peut être attribué au fait que l'état oscillatoire est un phénomène tridimensionnel. En effet, les travaux de Schwabe et Scharmann (1983) confirment cette dernière hypothèse. Ces chercheurs ont démontré expérimentalement, pour  $Ma_c \approx 10000$ , l'existence d'une onde thermique qui se propage selon la direction circonférentielle sur la surface libre de la zone. Sous l'influence de cette onde, les champs thermique et hydrodynamique tournent autour de l'axe principal de la zone. Ainsi, pour étudier la transition axisymétrique / oscillatoire, il faut tenir compte du caractère tridimensionnel de l'écoulement comme on va voir plus loin dans la deuxième partie de cette étude.

Mais que peut on -dire à l'égard des structures obtenues pour l'écoulement à des nombres de Marangoni aussi élevés que  $20000$ ? Nous croyons que ces structures représentent





**Figure 5.5** Évolution temporelle de la température d'un point situé au milieu de la surface libre pour  $Ma = 20000$ ,  $\mu$ -g

des états probables de l'écoulement sous certaines conditions d'opération quelque peu spéciales, compte tenu des hypothèses simplificatrices adoptées. Une valeur élevée de  $Ma$  correspond évidemment à de larges zones flottantes qui sont réalisables possiblement sous des conditions très idéales comme par exemple l'environnement presque 0-g. De telles larges zones flottantes parfaitement stables sans aucune oscillation ont été vraisemblablement observées par Napolitano et Monti (1987) à partir des essais effectués lors des missions de TEXUS ET SPACELAB. De semblables expériences seront certes nécessaires pour éclaircir cet aspect intéressant non seulement du point de vue théorique pour les chercheurs en mécanique des fluides, mais également pour la croissance des cristaux du point de vue pratique.

#### **5.4 COMPORTEMENT TRANSITOIRE D'UNE ZONE FLÔTANTE DE $NaNO_3$ , OPÉRANT SUR TERRE**

Dans ce qui suit, on présentera l'évolution transitoire des lignes de courant ainsi que les profils de température et de vitesse axiale sur la surface libre d'une zone flottante de  $NaNO_3$ , pour trois nombres de Marangoni, soit  $Ma = 2500, 7500$  et  $20000$ . Les valeurs du nombre capillaire qui correspondent à ces trois nombres de Marangoni sont les suivantes:  $Ca = 0.0024, 0.0072$  et  $0.0192$ . Les autres paramètres sont fixés comme suit:  $Bd = 2.16, Bs = 2.66, A = 0.732$  et  $Pr = 8.9$ .

##### **5.4.1 Évolution temporelle de la structure des lignes de courant en 1-g**

Les figures 5.6, 5.7 et 5.8 illustrent l'évolution temporelle de la structure des lignes de courant pour  $Ma = 2500, 7500$  et  $20000$  respectivement. Il est à rappeler que pour les cas simulés sur terre, on a tenu compte de la déformabilité de la surface libre. La forme de cette surface est calculée à chaque pas de temps en résolvant l'équation (3.43c). Pour éviter les problèmes numériques, la solution initiale de la forme de la surface libre correspond à la forme statique (Éqn. 3.44).

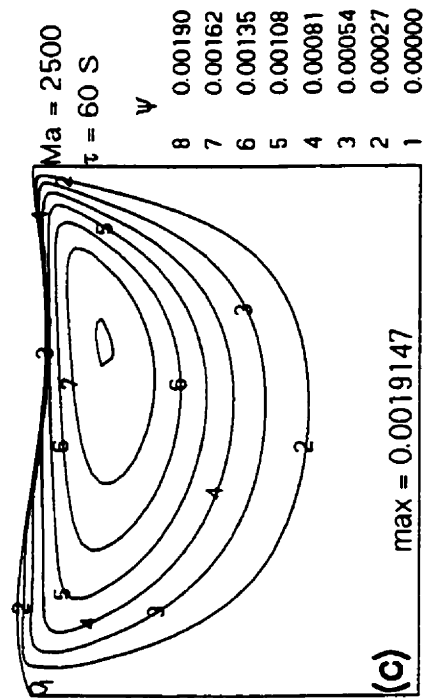
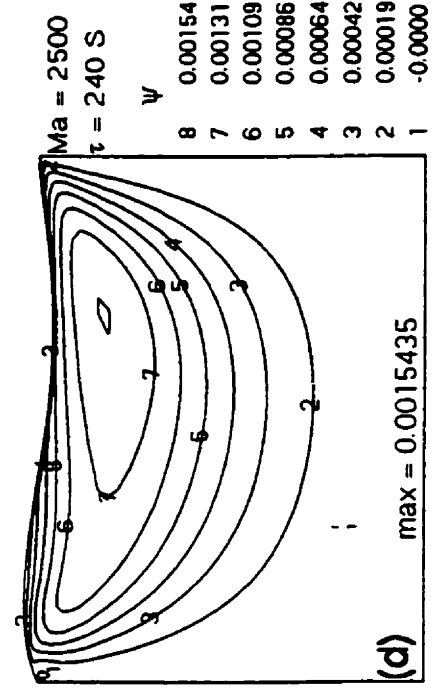
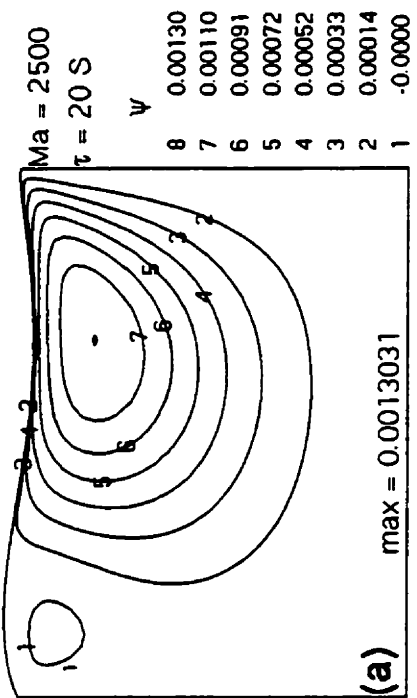
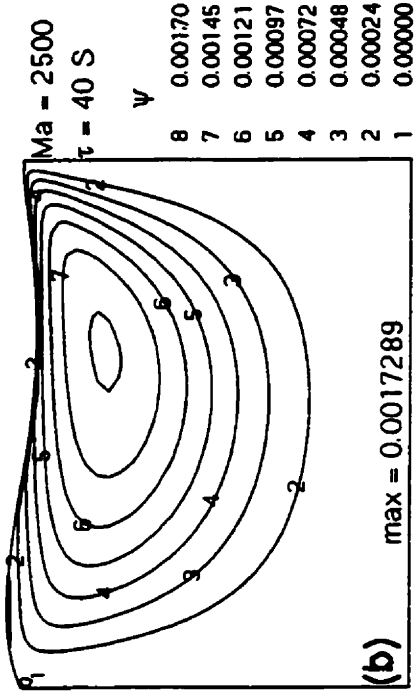


Figure.5.6 Évolution temporelle de la structure des lignes de courant pour Ma = 2500, 1-g

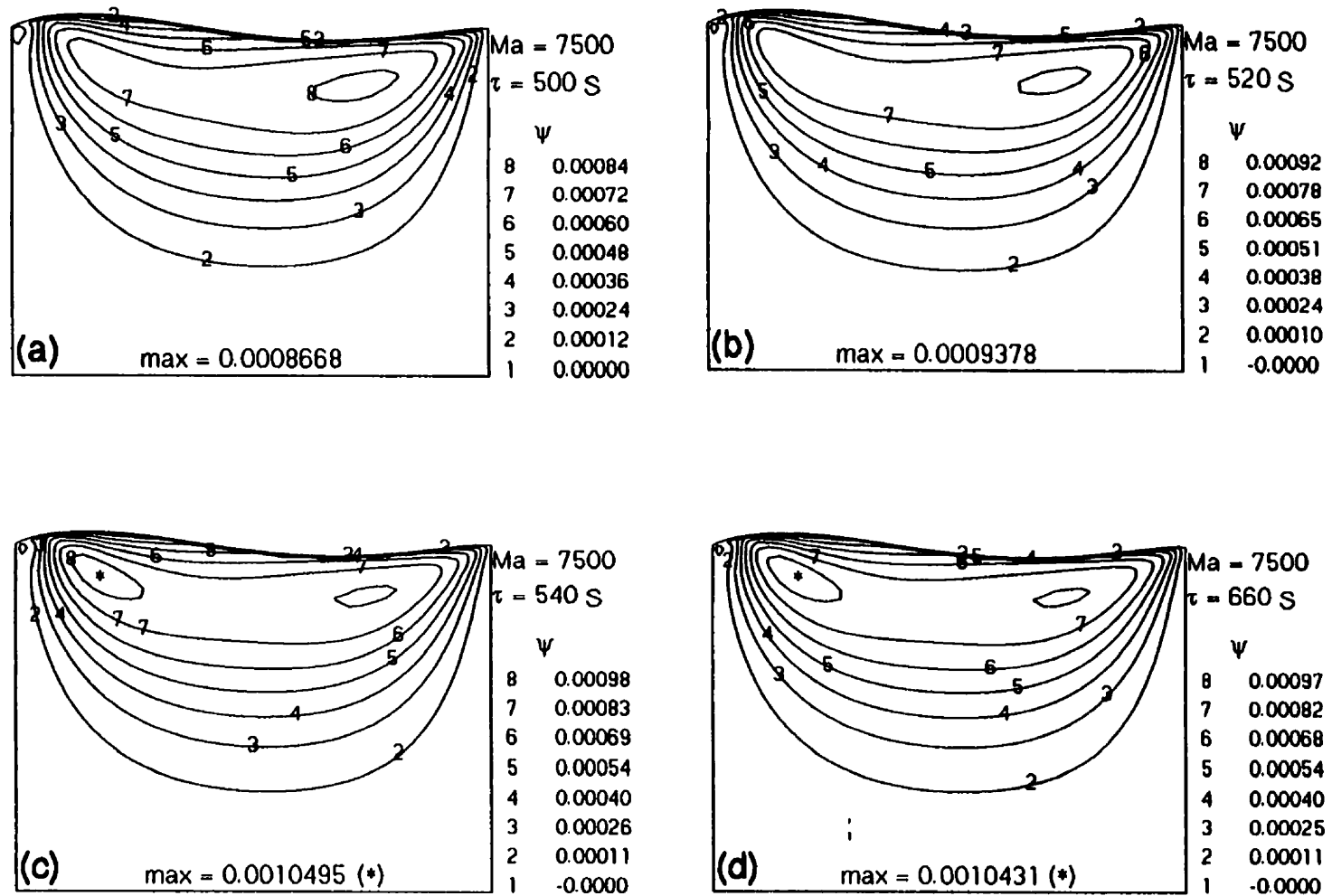


Figure 5.7 Évolution temporelle de la structure des lignes de courant pour  $Ma = 7500$ , 1-g

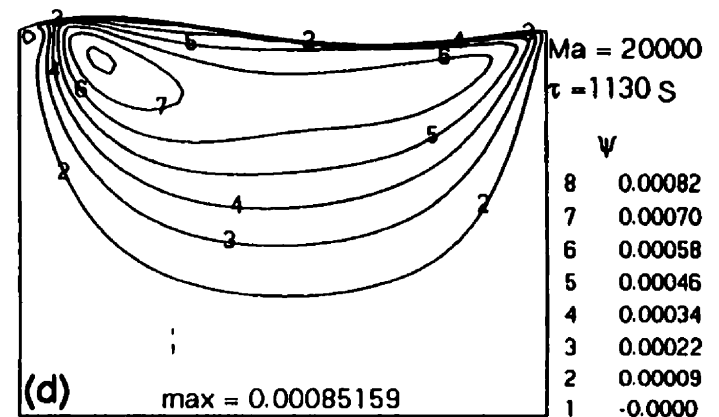
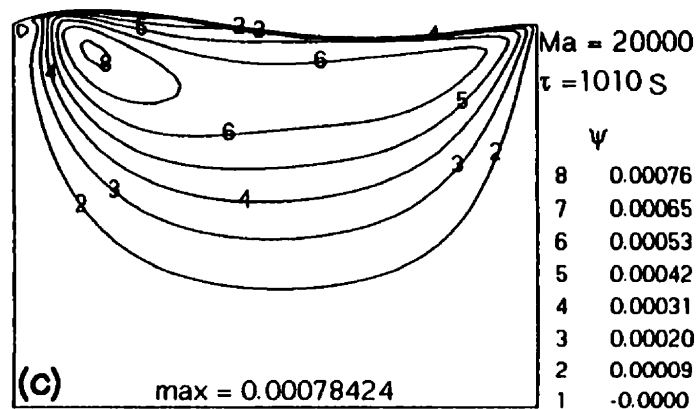
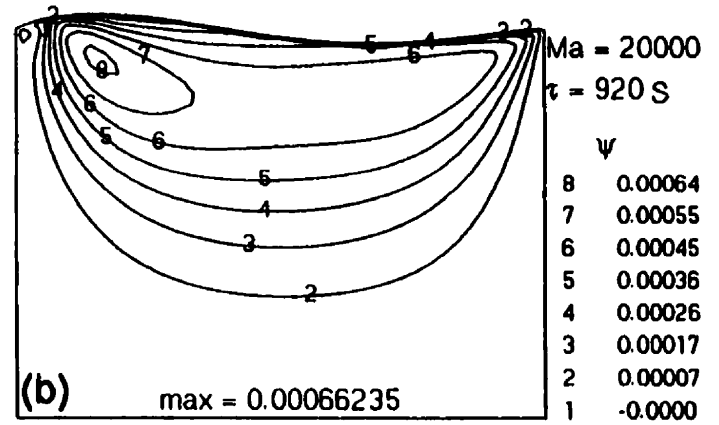
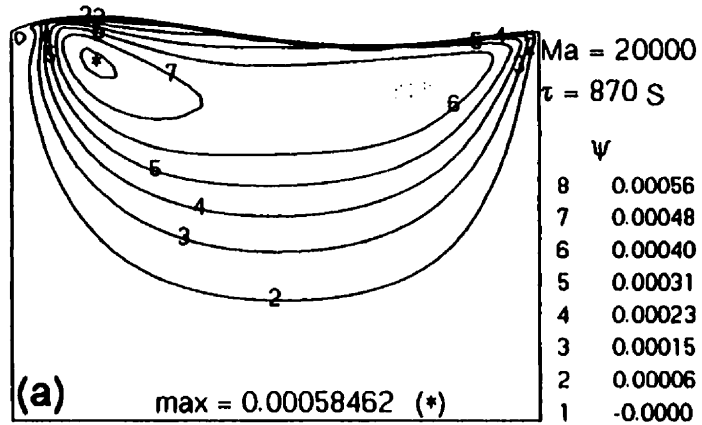


Figure.5.8 Évolution temporelle de la structure des lignes de courant pour Ma = 20000, 1-g

L'examen de la figure 5.6a montre que l'accumulation du fluide près de la frontière froide est importante (comportement dû aux effets de gravité) d'où la forme plutôt "bombée" de la surface libre près du disque froid. Il est intéressant de mentionner que cette forme de la surface libre a été observée expérimentalement par Preisser et ses collègues (1983) et numériquement par Saghir et Rosenblat (1990) et Hyer et al. (1991).

En superposant les profils de la forme de la surface libre qui correspondent à  $\tau = 20$  s, 40 s, 60 s et 240 s (Figures 5.6a, b, c et d) sur un seul graphique, on a pu constater que la forme de la surface libre ne varie pas au cours du temps. Ceci est dû au fait que le nombre capillaire  $Ca$  (qui précède le terme de pression dans l'équation 3.43c) est de l'ordre de  $10^3$ . Donc, la forme de la surface libre est surtout influencée par la gravité et les effets de tension superficielle (en d'autres mots par le nombre de Bond statique). Cependant, pour rester général, on a continué à déterminer la forme de la surface libre à chaque pas de temps.

En examinant la figure 5.6a ( $\tau = 20$  s), on peut remarquer la présence de deux zones de recirculation. La première, située près du disque froid, est due à l'effet de l'entraînement, tandis que la deuxième zone, située près de la frontière chaude, est due à l'effet thermocapillaire. En effet, à  $\tau = 20$  s, les gradients de température près de la frontière froide n'existent presque pas comme on va observer plus loin en examinant l'évolution temporelle de la température sur la surface libre pour  $Ma = 2500$  (Fig. 5.9a). Par conséquent, la convection thermocapillaire est presque inexistante près du disque froid aux premiers instants du chauffage de la zone ( $\tau = 20$  s). Au fur et à mesure que le temps augmente, la convection thermocapillaire devient de plus en plus intense et par conséquent, la zone de recirculation près du disque chaud s'élargit au détriment de la deuxième zone de recirculation qui sera confinée dans une région très étroite près de la frontière froide à proximité de la surface libre (Voir figures 5.6b, c et d).

En scrutant à fond les figures 5.6a, b et c, on peut constater que le centre de tourbillon se déplace légèrement vers le disque chaud. Ce fait peut être attribué à l'augmentation des

gradients de température près de cette dernière frontière au cours du temps. Il est intéressant de mentionner que la structure des lignes de courant correspondant à  $\tau = 240$  s (Fig. 5.6d) a été observée expérimentalement par Preisser et al. (1983). Notons finalement que  $\psi_{\text{max}}$  croît durant le processus du chauffage de la zone (par exemple  $\psi_{\text{max}}$  passe de 0.0013 à 0.0017 en augmentant  $\tau$  de 20 s à 40 s) et il atteint une valeur maximale de l'ordre de 0.0019147 à  $\tau = 60$  s pour ensuite diminuer vers une valeur asymptotique de l'ordre de 0.0015435. Ce même comportement a été observé et discuté pour les cas simulés en  $\mu$ -g.

En ce qui concerne l'évolution temporelle de la structure des lignes de courant pour  $Ma = 7500$ , les figures 5.7a et b (pour  $\tau = 500$  s et 520 s) montrent que le centre de la zone de recirculation (due aux courants thermocapillaires) est localisé près de la surface libre du côté du disque chaud. D'autre part, la valeur de  $\psi_{\text{max}}$  passe de 0.0008668 à 0.0009378 en augmentant  $\tau$  de 500 s à 520 s. L'examen de la figure 5.7c ( $\tau = 540$  s) révèle la présence d'une grande zone de recirculation à double cellule. Notons que la valeur de  $\psi$  pour le centre de circulation situé du côté du disque chaud est de l'ordre de 0.0010424 et elle est de l'ordre de 0.0010495 pour le centre situé du côté du disque froid. La valeur maximale de  $\psi$  est localisée alors près de la frontière froide. Ce comportement peut être expliqué comme suit : au fur et à mesure que le temps augmente, l'écoulement devient de plus en plus intense le long de la surface libre et les gradients radiaux de température au sein de la zone deviennent importants, ce qui favorise la convection naturelle. Cet écoulement intense le long de la surface libre, combiné aux forces ascendantes d'Archimède, donne naissance à un écoulement de retour plus important dans la région adjacente au disque froid, ce qui entraîne la présence d'une circulation plus intense près de ce dernier. Signalons finalement que la forme de la surface libre ne change pas au cours du temps. Ce même comportement a été observé et discuté pour  $Ma = 2500$ .

À partir de la figure 5.8 ( $Ma = 20000$ ), on s'aperçoit que la structure de l'écoulement ainsi que la forme de la surface libre ne changent pas avec le temps. Il s'agit d'une grande

zone de recirculation (due aux effets de la convection thermocapillaire) dont le centre est proche de la frontière froide. Au coin supérieur près du disque froid, on note la présence d'une très petite zone de recirculation (due à l'entraînement). D'autre part, près de la surface libre, les lignes de courants sont très rapprochées les unes des autres indiquant, en toute évidence, une circulation intense dans cette dernière région. Finalement, le tableau 5.3 montre l'évolution temporelle de  $\psi_{max}$ . La valeur de  $\psi_{max}$  augmente durant le processus du chauffage de la zone ( $830 \text{ s} < \tau < 1070 \text{ s}$ ) et puis diminue légèrement quand on atteint le palier.

Tableau 5.3 Évolution temporelle de  $\psi_{max}$  pour  $Ma = 20000$ , 1-g

$\tau(\text{s})$	850	870	890	920	950	1010	1070	1100	1130
$\psi_{max}$	$551.10^4$	$584.10^4$	$616.10^4$	$662.10^4$	$774.10^4$	$856.10^4$	$856.10^4$	$851.10^4$	$851.10^4$

#### 5.4.2 Évolution temporelle des isothermes en 1-g

L'évolution temporelle des isothermes pour les trois nombres de Marangoni suivants:  $Ma = 2500$ ,  $7500$  et  $20000$  est présentée dans l'annexe F.

#### 5.4.3 Évolution temporelle des profils de température et de $V_z$ sur la surface libre en 1-g

Les figures 5.9a, 5.10a et 5.11a montrent l'évolution temporelle des profils de température le long de la surface libre respectivement pour  $Ma = 2500$ ,  $7500$  et  $20000$ .

On observe à partir de la figure 5.9a, qu'à  $\tau = 20 \text{ s}$  la température adimensionnelle de la région adjacente au disque froid ( $0 < Z < 0.3$ ) est égale à la température de fusion du  $\text{NaNO}_3$ . Par conséquent, les gradients de température sont nuls, ce qui explique l'absence de convection thermocapillaire près de la frontière froide. Il importe de noter que la température augmente continuellement au cours du temps. En effet, le tableau 5.4 résume l'évolution



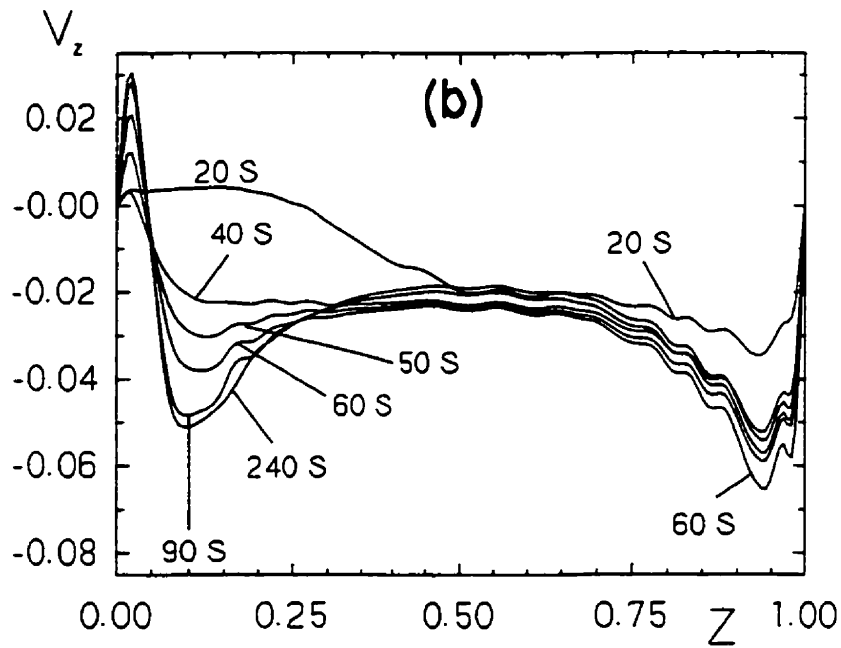
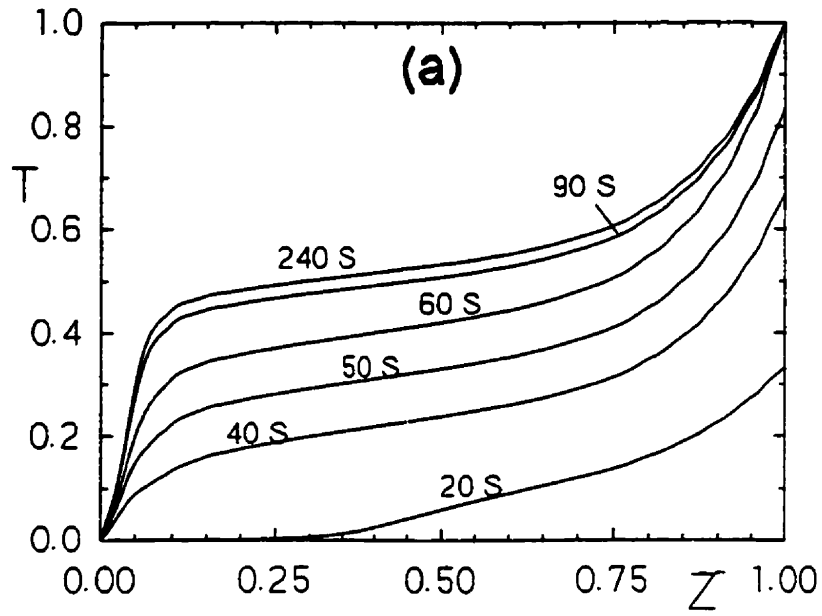


Figure 5.9 Évolution temporelle de la température et de la vitesse axiale le long de la surface libre pour  $Ma = 2500$ , 1-g

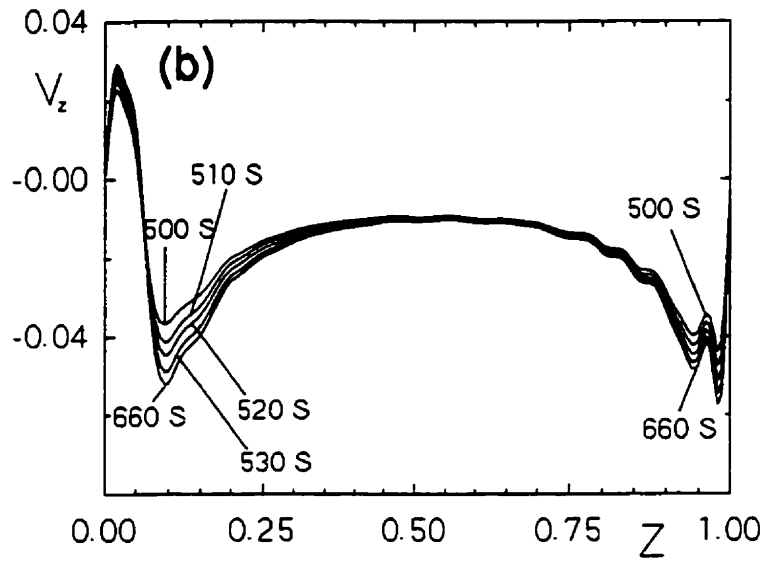
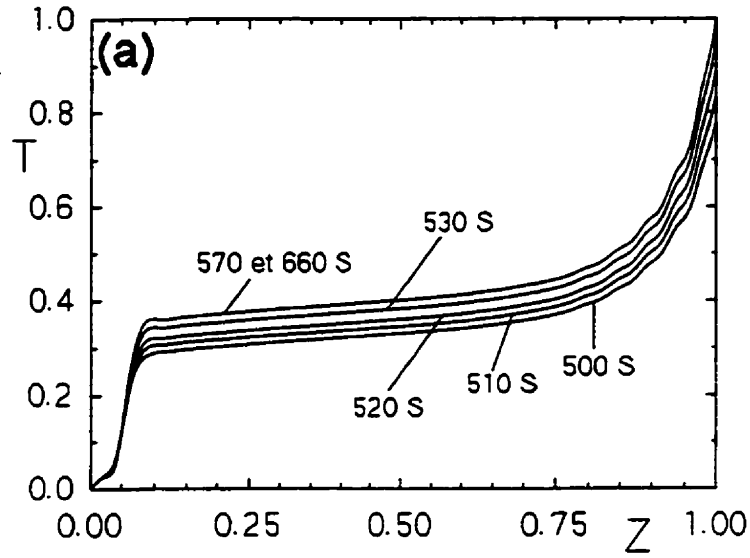


Figure 5.10 Évolution temporelle de la température et de la vitesse axiale le long de la surface libre pour  $Ma = 7500$ , 1-g

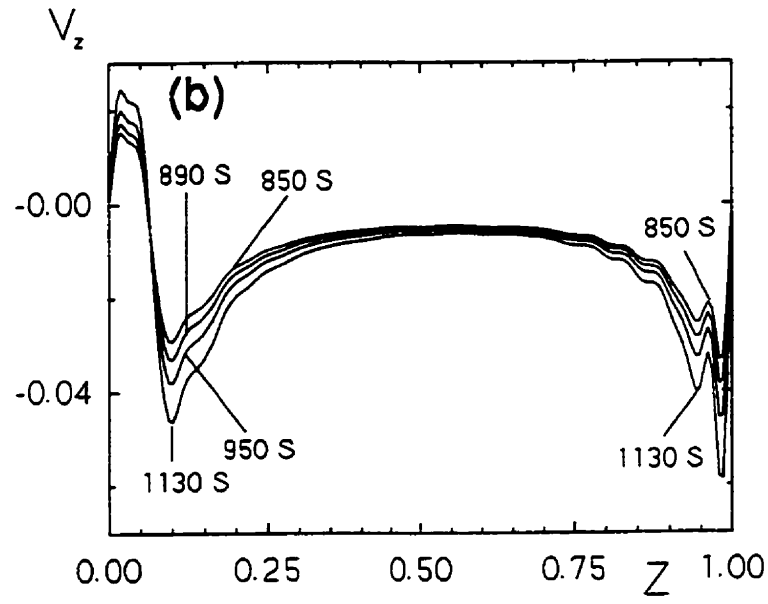
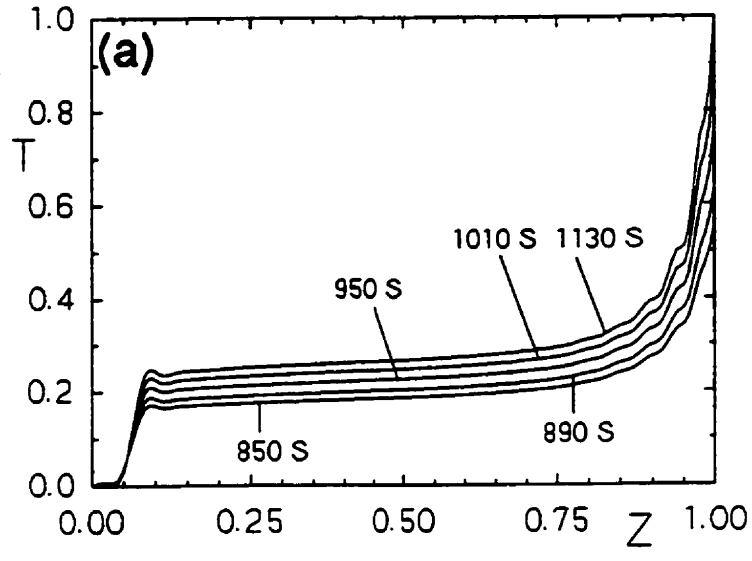


Figure 5.11 Évolution temporelle de la température et de la vitesse axiale le long de la surface libre pour  $Ma = 20000$ , 1-g

temporelle d'un point situé à  $Z = 0.5$  sur la surface libre de la zone. Signalons finalement que les gradients axiaux de température près des deux disques augmentent au fur et à mesure qu'on chauffe la zone ( $0 < \tau \leq 60$  s). Une fois que la différence de température entre les deux disques devient constante ( $\tau = 90$  s et  $240$  s), les gradients de température au voisinage du disque chaud diminuent légèrement par rapport à ceux qui correspondent à  $\tau = 60$  s. Ce comportement dû à la stabilisation des courants thermocapillaires a été observé pour les cas simulés en  $\mu$ -g.

Tableau 5.4 Évolution temporelle de la température d'un point situé à  $Z = 0.5$  sur la surface libre,  $Ma = 2500$  (1-g)

$\tau$ (s)	20	40	50	60	90	240
T	0.064	0.242	0.334	0.425	0.511	0.535

Concernant la distribution de la température sur la surface libre de la zone flottante pour  $Ma = 7500$ , l'examen de la figure 5.10a nous montre que la température a tendance à s'uniformiser sur une grande région de la partie centrale. Ce comportement est attribué à l'importance des courants thermocapillaires pour le nombre de Marangoni considéré. Notons aussi que les gradients de température des deux frontières ainsi que les valeurs de température augmentent au cours du temps. Par exemple, la température d'un point situé à  $Z = 0.5$  passe de 0.331 à 0.384 et à 0.402 respectivement pour  $\tau = 500$  s, 530 s et 660 s.

En ce qui concerne l'évolution temporelle du profil de température sur la surface libre pour  $Ma = 20000$  (figure 5.11a), les constatations tirées pour le cas caractérisé par  $Ma = 7500$  restent valides.

L'évolution temporelle du profil de  $V_z$  sur la surface libre pour les trois nombres de Marangoni suivants: 2500, 7500 et 20000 est illustrée par les figures 5.9b, 5.10b et 5.11b respectivement.

À partir de la figure 5.9b et à l'instant  $\tau = 20$  s, on remarque la présence des vitesses axiales positives près de la frontière froide pour  $0 < Z \leq 0.25$ . Le fluide circule alors de la partie froide vers celle chaude. Ce comportement qui paraît paradoxal avec le mécanisme de convection thermocapillaire, est associé à la présence de la zone de recirculation due à l'entraînement (voir Fig. 5.6a). Comme cette dernière zone se rétrécit avec le temps, l'emplacement des valeurs positives de  $V_z$  est confiné dans une région étroite près du disque froid pour  $\tau \geq 40$  s.

Il importe de noter que pour  $\tau \geq 40$  s, le profil de  $V_z$  (en valeurs absolues) comporte deux maxima locaux à  $Z \approx 0.1$  et à  $Z \approx 0.95$ . Ce comportement est lié à la présence des gradients élevés de température près des frontières. Notons aussi que  $V_z$  croît continuellement au fur et à mesure qu'on chauffe la zone ( $0 < \tau \leq 60$  s). Quand la différence de température entre les deux disques devient constante, ( $\tau = 90$  et  $240$  s), on remarque que pour  $0.5 < Z < 1$ , la vitesse axiale diminue légèrement par rapport à celle qui correspond à  $\tau = 60$  s. Cette diminution est attribuée, comme mentionné auparavant, à la stabilisation des courants thermocapillaires. Signalons finalement que la courbe du profil de  $V_z$  n'est pas lisse car on approxime la forme de la surface libre par un maillage de type "escalier".

Concernant l'évolution transitoire de  $V_z$  le long de la surface libre pour  $Ma = 7500$ , la figure 5.10b montre que le profil de vitesse axiale conserve la même allure au cours du temps. Il s'agit d'une région très étroite, près du disque froid, caractérisée par la présence des vitesses positives. D'autre part, on trouve que le profil de  $V_z$  comporte deux maxima locaux localisés à  $Z \approx 0.1$  et à  $Z \approx 0.95$ . Notons finalement que  $V_z$  augmente au cours du temps. Cette augmentation est surtout prononcée pour  $0.1 < Z < 0.3$  et pour  $0.85 < Z < 1$ .

Les discussions présentées pour  $Ma = 7500$  restent valables quand à l'évolution temporelle de  $V_z$  sur la surface libre pour  $Ma = 20000$  (Fig. 5.11b).

## 5.5 EFFET DU NOMBRE DE MARANGONI

Dans cette section, on tente de faire ressortir les effets du nombre de Marangoni sur les champs thermique et hydrodynamique pour une zone flottante de  $\text{NaNO}_3$ , opérant soit en  $\mu\text{-g}$  ou en  $1\text{-g}$ . Rappelons que le nombre de Marangoni a été défini comme suit:

$$\text{Ma} = \frac{|\partial\sigma/\partial t| \Delta T H}{\mu_M \alpha_M} \quad (5.1)$$

Puisqu'on considère un même matériau, le  $\text{NaNO}_3$ , les valeurs de  $\alpha_M$ ,  $\mu_M$  et  $|\partial\sigma/\partial t|$  sont considérées comme constantes. Une variation de  $\text{Ma}$  correspond donc à une variation de la hauteur  $H$  de la zone ou à celle de  $\Delta T$ . Si on considère que  $H$  (qui a été adoptée comme une longueur de référence) est une constante, on peut poser qu'une variation de  $\text{Ma}$  équivaut à une variation de  $\Delta T$ . De plus, le nombre de Marangoni peut être interprété comme le rapport entre les effets de la convection thermocapillaire et ceux dus à la conduction.

Notons que dans le texte qui suit, on a divisé par un facteur de 8, 4, 2.66 et 2 les valeurs de  $T$ ,  $V_z$  et  $\psi$  correspondant à  $\text{Ma} = 2500, 5000, 7500$  et  $10000$  respectivement pour avoir la même base de température (celle qui correspond à  $\text{Ma} = 20000$ ) afin de faciliter la comparaison des résultats.

### 5.5.1 Effet du nombre de Marangoni sur les profils de température et de $V_z$ sur la surface libre en $\mu\text{-g}$

La distribution de la température sur la surface libre est à l'origine de l'écoulement thermocapillaire. L'influence du nombre de Marangoni sur cette distribution est illustrée par la figure 5.12a où on trouve cinq profils de température correspondant à  $\text{Ma} = 2500, 5000, 7500, 10000$  et  $20000$  en régime permanent.

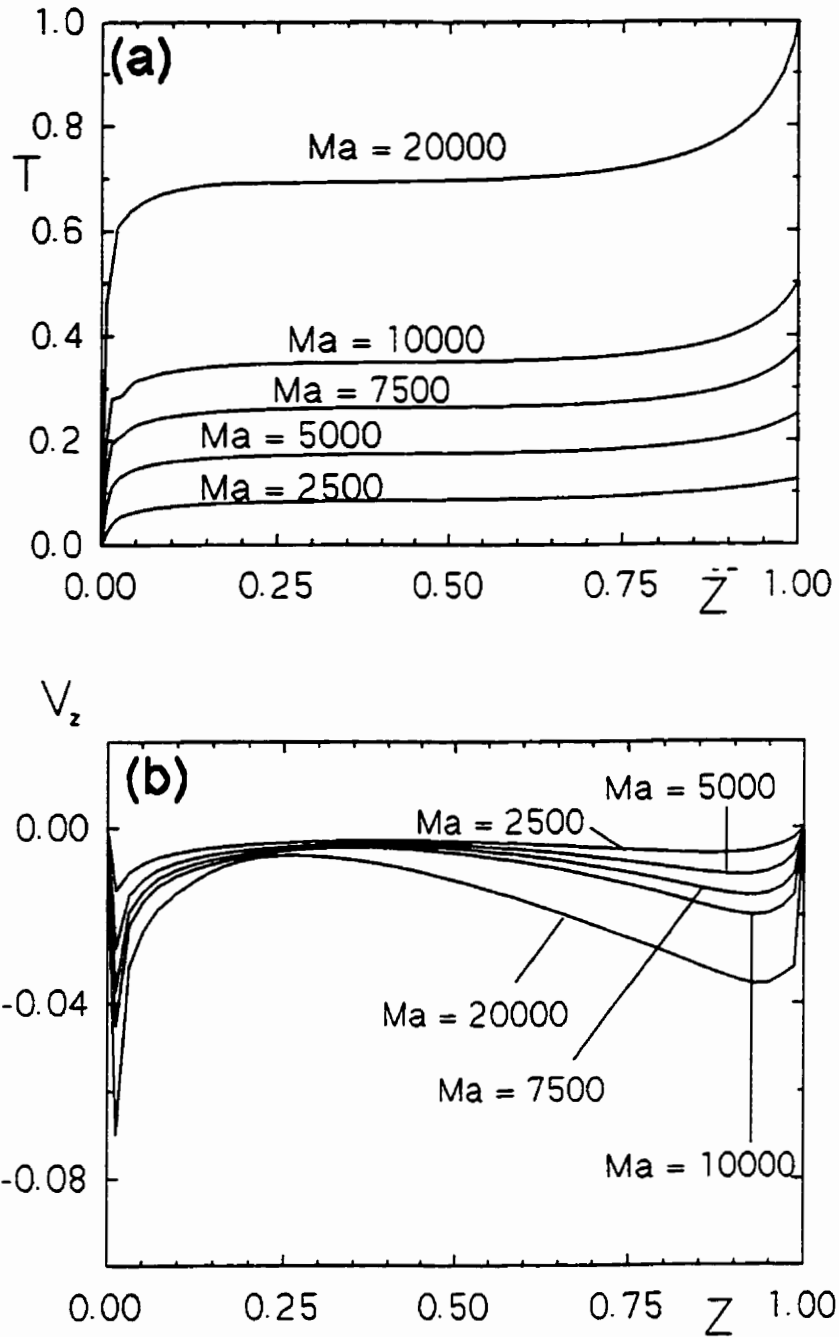


Figure 5.12 Effet du nombre de Marangoni sur la distribution de la température et de la vitesse axiale sur la surface libre en  $\mu$ -g

Il convient de rappeler à ce stade qu'en absence de convection thermocapillaire,  $Ma \rightarrow 0$  la conduction est le seul mode de transmission de chaleur au sein du fluide confiné dans la zone. Une augmentation du nombre de Marangoni se traduit par une plus grande importance des courants convectifs. Cette constatation est confirmée suite à l'examen des profils de température de la figure 5.12a. En effet, on remarque que pour un faible nombre de Marangoni ( $Ma = 2500$ ) le profil de température est presque linéaire du côté de la frontière chaude. Ce comportement est dû à l'importance de la conduction pour  $Ma = 2500$ . Au fur et à mesure que le nombre de Marangoni augmente, les gradients de température près des frontières deviennent plus importants. Il convient aussi de noter qu'en chauffant de plus la zone (en d'autres mots en augmentant le nombre de Marangoni), la température croît considérablement. Par exemple, la température d'un point situé à  $Z = 0.6$  sur la surface libre de la zone est multipliée par un facteur de 8 en augmentant la valeur du nombre de Marangoni de 2500 à 20000 comme le montre le tableau 5.5.

Tableau 5.5 Influence du nombre de Marangoni sur la température d'un point situé sur la surface libre à  $Z = 0.6$  en  $\mu\text{-g}$

Ma	2500	5000	7500	10000	20000
T	0.088	0.177	0.266	0.353	0.701

La figure 5.12b montre la distribution de  $V_z$  sur la surface libre de la zone pour les cinq nombres de Marangoni considérés. On observe tout d'abord que les gradients de  $V_z$  près des frontières sont importants. Ce comportement est attribué à la présence des gradients élevés de température près des disques. Notons aussi que les valeurs de  $V_z$  augmentent d'une façon significative surtout dans les régions adjacentes aux disques avec l'accroissement du nombre de Marangoni. Ainsi pour  $Z = 0.9$ ,  $V_z$  passe de 0.0056 à 0.0153 et à 0.035 pour  $Ma = 2500, 7500$  et 20000 respectivement.



### 5.5.2 Effet du nombre de Marangoni sur la structure des lignes de courant et des isothermes en $\mu$ -g

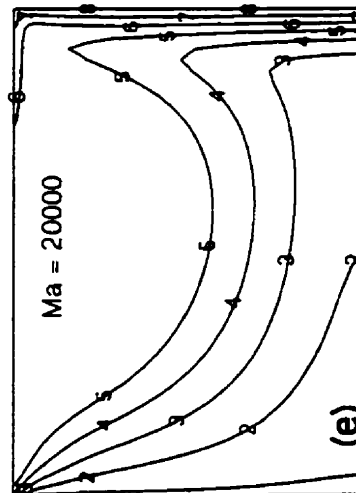
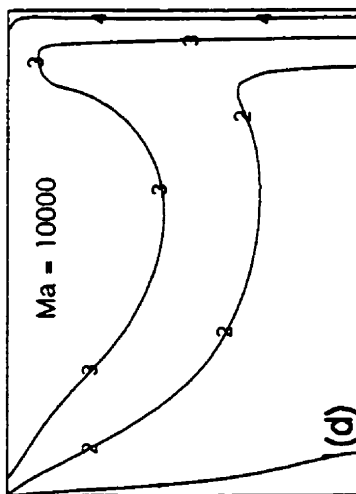
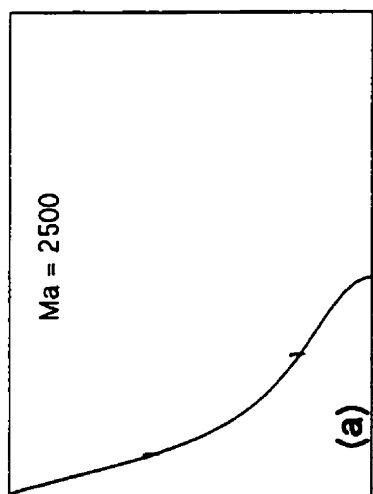
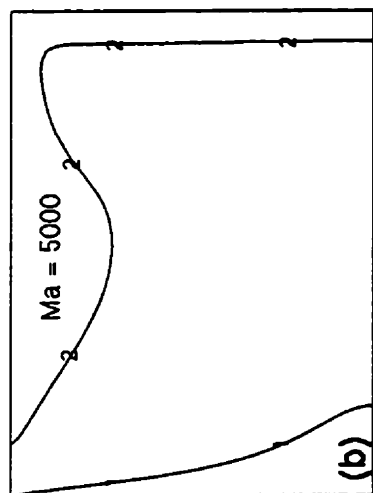
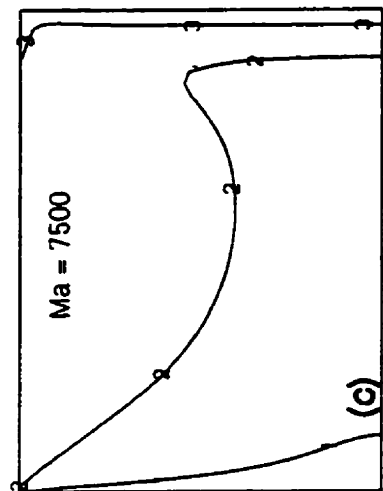
La structure de l'écoulement observée en régime permanent pour les cas où  $Ma = 2500, 5000, 7500, 10000$  et  $20000$  est toujours unicellulaire. Il s'agit d'une large zone de recirculation dont le centre est situé près de la frontière chaude. Il est important de mentionner que le centre du vortex se déplace légèrement vers la frontière chaude en augmentant le nombre de Marangoni. Par exemple, la position du centre du vortex passe respectivement de  $Z = 0.649$  à  $0.726$  et à  $0.729$  pour  $Ma = 2500, 7500$  et  $20000$ . Le déplacement du centre de tourbillon est attribué au fait que les gradients de température près de la frontière chaude deviennent de plus en plus importants en augmentant le nombre de Marangoni (Voir figure 5.12a). Notons finalement que les courants thermocapillaires deviennent de plus en plus vigoureux avec l'augmentation du paramètre  $Ma$ . Le tableau 5.6 résume la valeur de  $\psi_{max}$  pour les différents nombres de Marangoni testés.

Tableau 5.6 Effet du nombre de Marangoni sur la valeur de  $\psi_{max}$  en  $\mu$ -g

Ma	2500	5000	7500	10000	20000
T	$2.102 \cdot 10^4$	$3.3 \cdot 10^4$	$4.14 \cdot 10^4$	$5.22 \cdot 10^4$	$1.02 \cdot 10^3$

La figure 5.13 montre la structure des isothermes pour les cinq nombres de Marangoni considérés. En comparant les différentes composantes de cette figure, on peut constater que:

- La zone froide délimitée par l'isotherme 1 ( $T = 0.02$ ) se rétrécit en augmentant le nombre de Marangoni (i.e. en chauffant davantage la zone).
- Dû aux effets des courants thermocapillaires, les isothermes sont déformés dans la région centrale de la zone près de la surface libre. Cette déformation devient plus prononcée avec l'augmentation du paramètre  $Ma$ .
- Les gradients axiaux de température près du disque chaud deviennent plus importants en augmentant l'écart de température entre les deux frontières.



T

8  
7  
6  
5  
4  
3  
2  
1

1.00  
0.86  
0.72  
0.58  
0.44  
0.30  
0.16  
0.02

Figure 5.13 Effet du nombre de Marangoni sur la structure des isothermes en  $\mu$ -g

### 5.5.3 Effet du nombre de Marangoni sur les profils de température et de $V_z$ sur la surface libre en 1-g

Les figures 5.14a et b illustrent en particulier l'influence du nombre de Marangoni sur les profils de température et de  $V_z$  sur la surface libre de la zone flottante de  $\text{NaNO}_3$  opérant en 1-g.

En examinant la figure 5.14a, on s'aperçoit que pour de faibles nombres de Marangoni, soit  $Ma = 2500$ , la conduction est importante près du disque chaud. On observe cependant que les gradients de température près des frontières deviennent plus élevés en augmentant le nombre de Marangoni. Ce comportement peut être expliqué comme suit: en augmentant le nombre de Marangoni, l'écart de température  $\Delta T = t_1 - t_m$  devient plus élevé pour un  $H$  fixe. Par conséquent, le gradient de température imposé à la surface libre devient aussi grand. Par ailleurs, la température le long de la surface libre augmente avec l'accroissement du nombre de Marangoni. Par exemple, la température d'un point situé à  $Z = 0.6$  est multiplié environ par un facteur de 4 (comme le montre le tableau 5.7) en augmentant  $Ma$  de 2500 à 20000.

Tableau 5.7 Influence du nombre de Marangoni sur la température d'un point situé sur la surface libre à  $Z = 0.6$  en 1-g

Ma	2500	5000	7500	10000	20000
T	0.069	0.121	0.155	0.183	0.274

À partir de l'examen de la figure 5.14b, on peut constater que les profils de  $V_z$  conservent la même allure pour les différents nombres de Marangoni. En effet, on retrouve des vitesses positives pour  $0 < Z < 0.05$  ainsi que deux maxima (vitesses négatives) locaux à  $Z \approx 0.1$  et à  $Z \approx 0.98$ . Il est intéressant de noter qu'en augmentant le nombre de Marangoni, le gradient de température imposé à la surface libre devient plus important amenant par

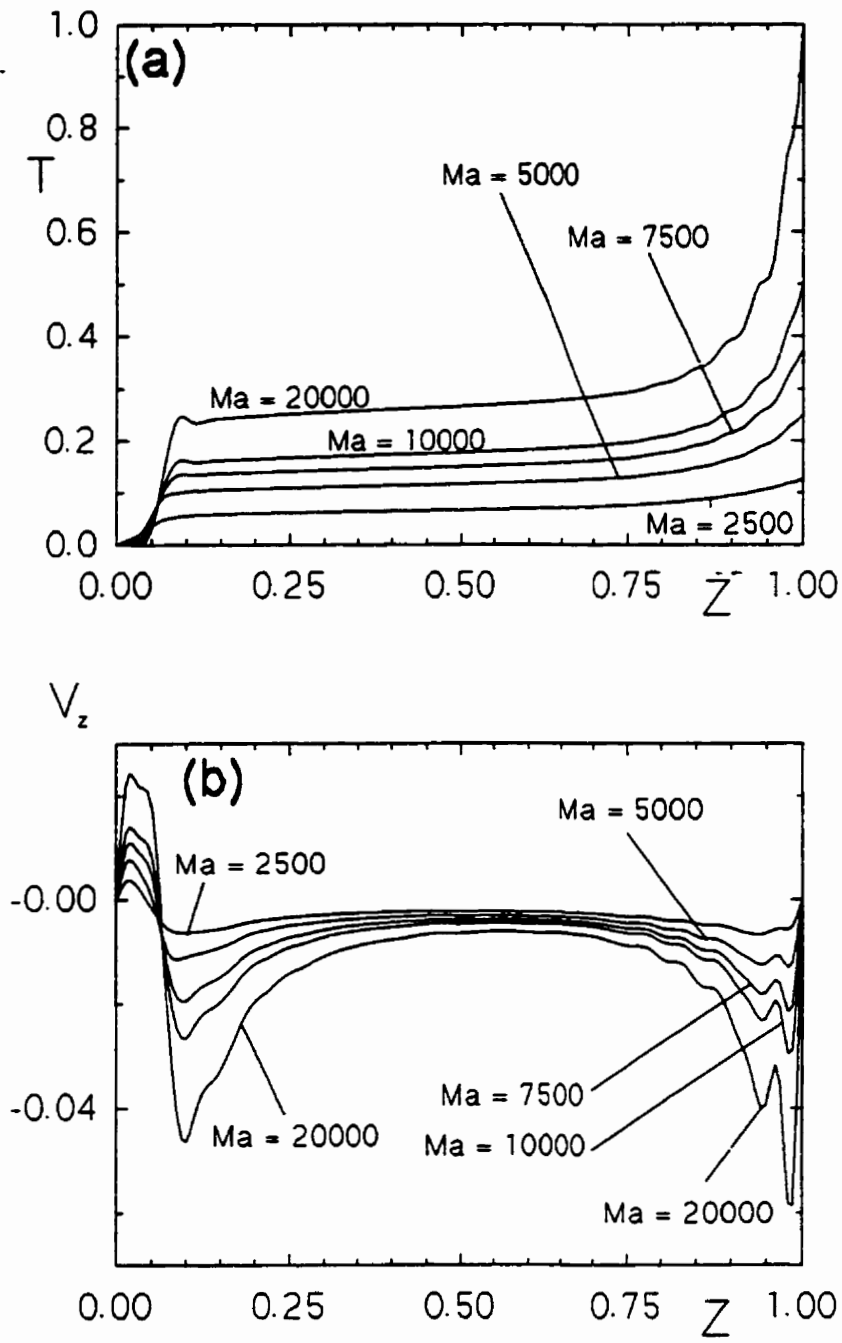


Figure 5.14 Effet du nombre de Marangoni sur la distribution de la température et de la vitesse axiale sur la surface libre en 1-g

conséquent, à une circulation du fluide plus intense sur la surface libre. Cette constatation est confirmée par les valeurs de  $V_z$  d'un point situé à  $Z = 0.6$  qui sont résumées au tableau 5.8.

Tableau 5.8 Influence du nombre de Marangoni sur la vitesse axiale d'un point situé sur la surface libre à  $Z = 0.6$  en 1-g

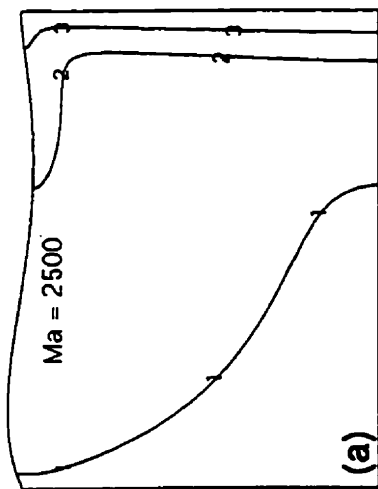
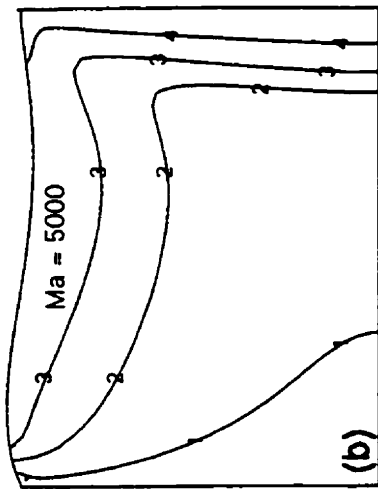
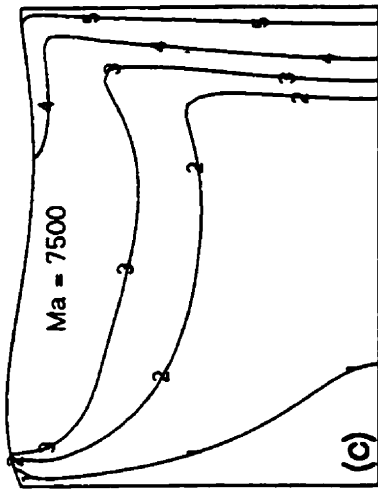
Ma	2500	5000	7500	10000	20000
$V_z$ (mm / s)	2.04	2.71	3.35	3.85	5.22

#### 5.5.4 Effet du nombre de Marangoni sur la structure des isothermes et des lignes de courant en 1-g

La figure 5.15 montre la structure des isothermes pour les cinq nombres de Marangoni suivants:  $Ma = 2500, 5000, 7500, 10000$  et  $20000$  pour une zone flottante de  $\text{NaNO}_3$ , opérant en 1-g.

À partir de la figure 5.15a, on s'aperçoit que le fluide froid délimité par l'isotherme 1 occupe un large espace du côté de la frontière froide. Cet espace se rétrécit en augmentant l'écart de température entre les deux disques. Il importe de noter que les isothermes, dans la partie centrale de la zone, deviennent de plus en plus stratifiés selon la direction radiale en augmentant le nombre de Marangoni (Voir figures 5.15c, d et e).

D'autre part, il est intéressant de mentionner qu'en traçant les profils de la forme de la surface libre illustrés aux figures 5.15 a-e sur la même graphique, on a constaté que le profil de  $F(Z)$  ne change pas avec l'augmentation du nombre de Marangoni et il reste identique à la forme statique ( $Ma = 0$ ). Ce comportement est attribué essentiellement au fait que la forme de la surface libre est surtout influencée par le nombre de Bond statique ( $Bs = \rho g H^2 / \sigma_m$  est indépendant de  $\Delta T$ ). D'autre part, le nombre capillaire qui précède le terme de pression dans



T	
A	1.000
9	0.860
8	0.720
7	0.580
6	0.440
5	0.301
4	0.161
3	0.100
2	0.070
1	0.021

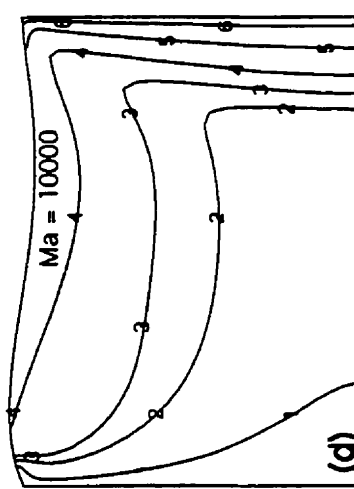
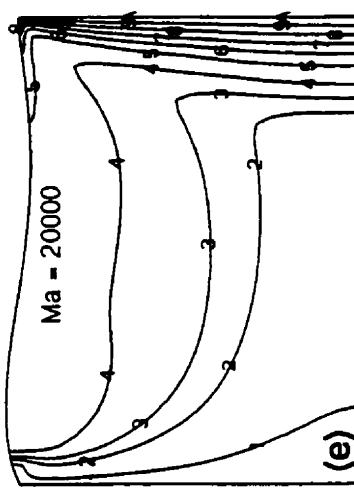


Figure 5.15 Effet du nombre de Marangoni sur la structure des isothermes en 1-g

l'équation 3.43c (qui sert à déterminer la forme dynamique de la surface libre) est toujours de l'ordre de  $10^3$ .

En ce qui concerne la structure des lignes de courant pour les différents nombres de Marangoni considérés, les remarques suivantes semblent être pertinentes:

- Pour les nombres de Marangoni relativement faibles ( $Ma \leq 5000$ ), la structure de l'écoulement thermocapillaire est unicellulaire et dont le centre du vortex se trouve près du disque chaud (voir Fig. 5.6d).
- Pour les nombres de Marangoni relativement élevés,  $Ma \geq 7500$ , la valeur maximale de  $\psi$  est localisée près de la frontière froide. Ce comportement peut être expliqué comme suit: pour  $Ma \geq 7500$ , la circulation du fluide est importante sur la surface libre de la zone. D'autre part, les isothermes sont plus stratifiés radialement dans la partie centrale de la zone. Par conséquent, les forces ascendantes d'Archimède combinées à une circulation intense sur la surface libre donnent naissance à un écoulement de retour plus important dans la région avoisinant le disque froid et provoquent ainsi le déplacement de  $\psi_{\max}$  vers la frontière froide.
- Notons finalement que  $\psi_{\max}$  augmente considérablement avec l'accroissement du nombre de Marangoni. Par exemple,  $\psi_{\max}$  passe de  $1.93 \cdot 10^4$  à  $8.51 \cdot 10^4$  respectivement pour  $Ma = 2500$  ( $\Delta T = 2.6$  °C) et  $20000$  ( $\Delta T = 41.66$  °C). Le tableau 5.9 résume les valeurs de  $\psi_{\max}$  pour les cinq nombres de Marangoni.

Tableau 5.9 Influence du nombre de Marangoni sur les valeurs de  $\psi_{\max}$  en 1-g

Ma	2500	5000	7500	10000	20000
$\psi_{\max}$	$1.93 \cdot 10^4$	$2.84 \cdot 10^4$	$3.91 \cdot 10^4$	$5.11 \cdot 10^4$	$8.51 \cdot 10^4$

## 5.6 INFLUENCE DE LA GRAVITÉ

Les figures 5.16a et b illustrent respectivement les effets de la gravité sur la structure du champ hydrodynamique en régime permanent pour une zone de NaNO<sub>3</sub> opérant en 1-g et en  $\mu$ -g (Ma = 20000, Pr = 8.9 et A = 0.732).

Sur terre, les effets de la convection naturelle (due au gradient radial de température) s'opposent aux effets thermocapillaires et par conséquent, la circulation du fluide couvre presque les deux tiers du volume total de la zone (Fig. 5.16a). En  $\mu$ -g (Fig. 5.16b) par contre, les effets de gravité sont négligeables et la circulation du fluide (due au mouvement thermocapillaire) occupe presque la totalité du volume de la zone. Notons aussi le déplacement du centre de recirculation qui se situe près du disque chaud pour le cas  $\mu$ -g, vers la frontière froide pour le cas 1-g. Le fait d'avoir le centre du vortex localisé près du disque froid a été expliqué au paragraphe 5.5.4.

La valeur de  $\psi_{max}$  passe respectivement pour  $\mu$ -g et 1-g de 0.001027 à 0.0008515. Cette diminution de l'intensité des courants thermocapillaires est attribuée au fait que sur terre, la convection naturelle et celle thermocapillaire agissent dans le sens opposé. Par conséquent, les vitesses axiales sur la surface libre en 1-g sont plus faibles comparées aux vitesses en  $\mu$ -g. Cette constatation est confirmée par l'examen du tableau 5.10 qui résume les effets de gravité sur la valeur de la vitesse axiale d'un point situé sur la surface libre à Z = 0.6 pour les cinq nombres de Marangoni considérés.

Tableau 5.10 Valeurs de  $V_z$  d'un point situé sur la surface libre à Z = 0.6 pour différents nombres de Marangoni en 1-g et en  $\mu$ -g

Ma	2500	5000	7500	10000	20000
$V_z$   (mm / s), 1-g	2.04	2.71	3.35	3.85	5.22
$V_z$   (mm / s), $\mu$ -g	3.06	4.25	5.41	6.80	14.22



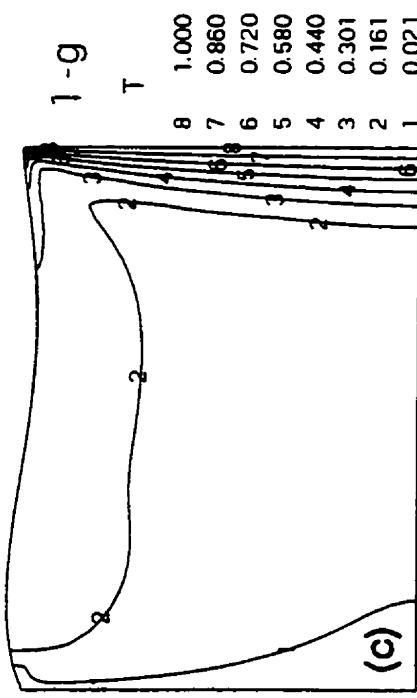
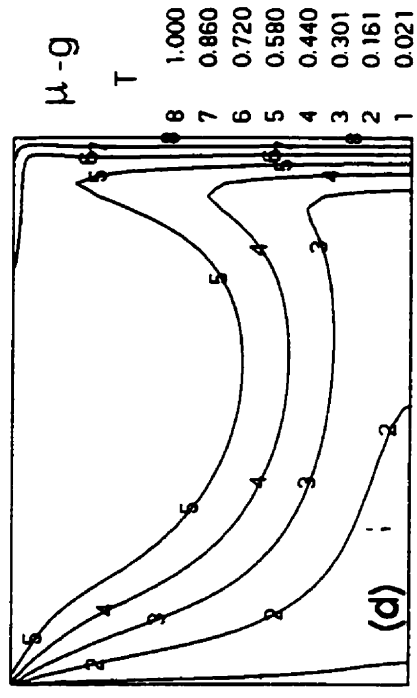
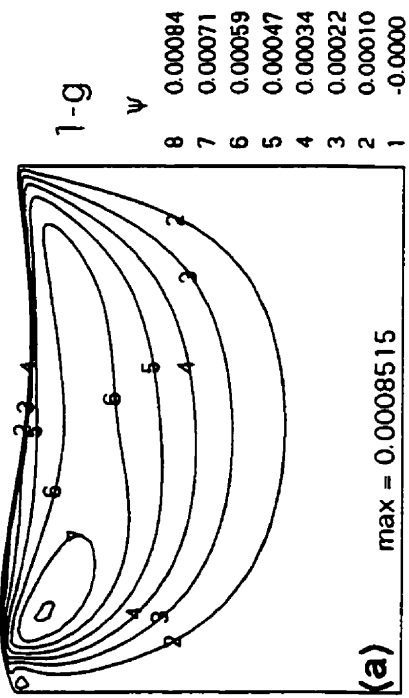
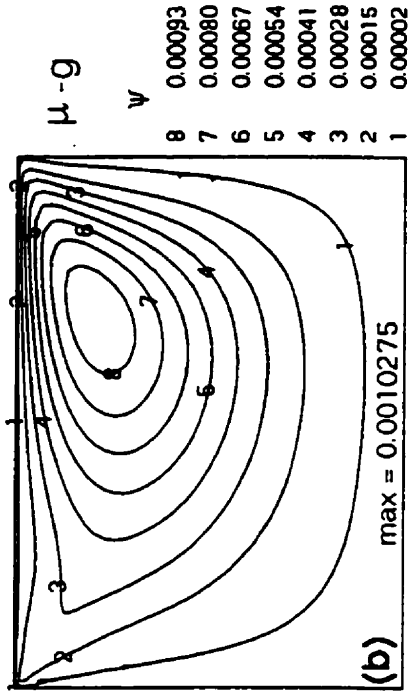


Figure 5.16 Effet de gravité sur la structure des lignes de courants (a et b) et sur le champ thermique (c et d) pour  $Ma = 20000$

Les effets de gravité sur la structure des isothermes sont montrés aux figures 5.16c (1-g) et 5.16d ( $\mu$ -g) pour  $Ma = 20000$ . En comparant ces deux figures, on remarque que l'étendue de la zone du fluide chaud s'élargit en réduisant la gravité (Prenons comme exemple l'isotherme 5,  $T = 0.58$ ). Ce fait est expliqué par la structure même de l'écoulement. En effet, les vitesses axiales élevées dans le cas  $\mu$ -g favorisent le transfert de chaleur du côté de la frontière chaude vers celle froide. Notons finalement que les isothermes dans la partie centrale de la zone en  $\mu$ -g sont plus déformés que ceux correspondant en 1-g. Ce comportement est dû aux courants thermocapillaires qui sont plus vigoureux en milieu microgravitationnel.

## 5.7 CONCLUSION

Dans ce chapitre, les résultats concernant l'évolution transitoire des champs hydrodynamique et thermique, au sein d'une zone flottante de  $\text{NaNO}_3$ , opérant en  $\mu$ -g ou en 1-g, ont été présentés et analysés. Il sera intéressant de faire ressortir les points suivants:

- En général, les gradients de vitesse et de température sont plus prononcés près de deux disques et la circulation du fluide est intense le long de la surface libre.
- L'intensité de l'écoulement thermocapillaire augmente au cours du temps durant le processus du chauffage de la zone et puis diminue légèrement lorsque la différence de température entre les deux disques devient constante.
- L'intensité des courants thermocapillaires augmente considérablement avec l'augmentation du nombre de Marangoni.
- L'écoulement est plus vigoureux en  $\mu$ -g comparé à celui en 1-g.
- Les isothermes se déforment davantage avec l'augmentation du nombre de Marangoni.
- La forme dynamique de la surface libre reste parfaitement identique à la forme statique.
- L'écoulement demeure stable même pour des nombres de Marangoni élevés de l'ordre de 20000.

## **CHAPITRE 6**

### **RÉSULTATS OBTENUS EN 2D POUR LE SILICONE**

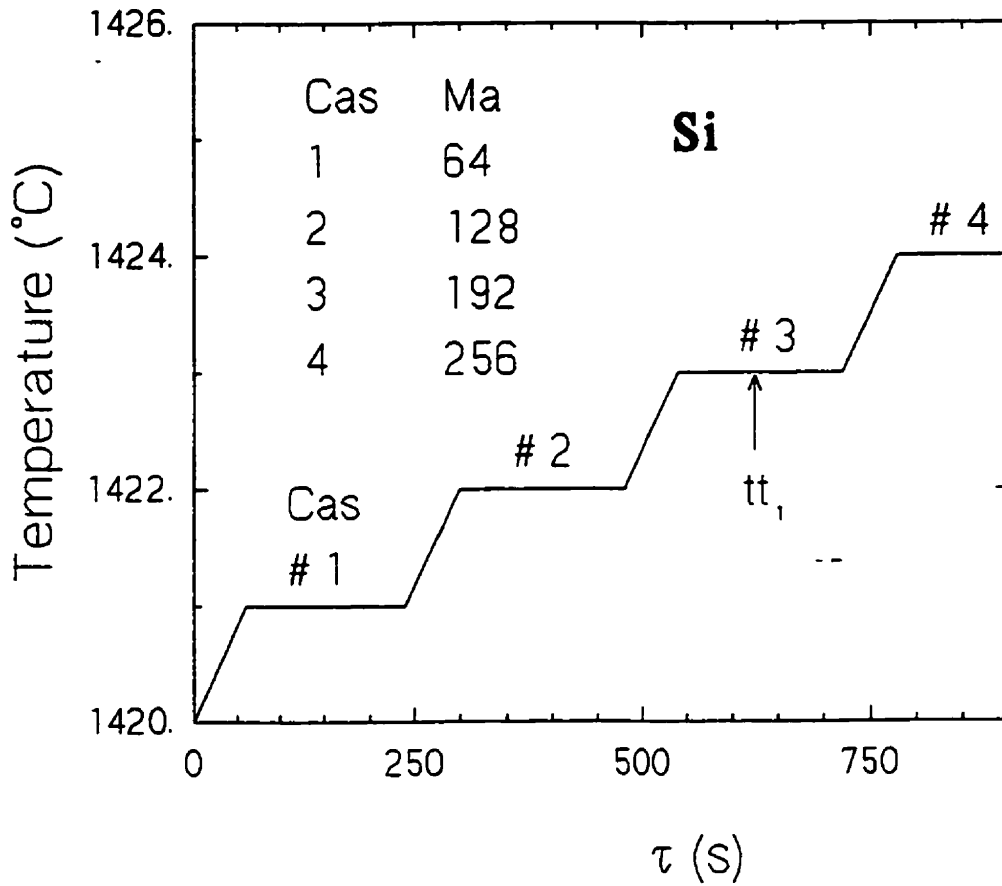
Vue l'importance du Silicone dans l'industrie des produits électroniques, on a procédé à une série de simulations numériques dans l'objectif d'étudier le comportement transitoire de l'écoulement axisymétrique dans une zone flottante de Silicone ( $Pr = 0.016$ ) opérant en  $\mu$ -g. On a également étudié les effets du nombre de Marangoni et du rapport géométrique sur les champs thermique et hydrodynamique de la zone de Silicone.

#### **6.1 VARIATION TEMPORELLE DE LA TEMPÉRATURE DU DISQUE CHAUD**

La figure 6.1 montre l'évolution temporelle de la température du disque chaud, telle qu'imposée lors des simulations numériques sur le Silicone. Cette température,  $t_s(\tau)$ , augmente linéairement de  $1\text{ }^\circ\text{C} / \text{min}$  et puis elle demeure constante, pour chacun des cas étudiés, afin d'atteindre le régime permanent. Il convient de rappeler que le fait de chauffer la zone par type "palier" réduit le temps de calcul. En effet, l'estimé initial des champs thermique et hydrodynamique d'un cas donné correspond à la solution du cas qui le précède. Ainsi, par exemple, l'estimé initial pour le cas caractérisé par  $Ma = 256$  correspond à la solution obtenue à  $\tau = 720\text{ s}$  pour  $Ma = 192$ . Notons finalement que le pas de temps adopté est de 1 seconde.

#### **6.2 COMPORTEMENT TRANSITOIRE D'UNE ZONE FLOTTANTE DE SILICONE**

Dans ce qui suit, on présentera l'évolution temporelle des profils de vitesse axiale et de température sur la surface libre de la zone et celle des lignes de courant et des isothermes



<b>Cas# 1</b>	<b>Pour <math>0 \leq \tau \leq 240</math> S</b>	<b>Ma = 64</b>
<b>Cas# 2</b>	<b>Pour <math>240 \leq \tau \leq 480</math> S</b>	<b>Ma = 128</b>
<b>Cas# 3</b>	<b>Pour <math>480 \leq \tau \leq 720</math> S</b>	<b>Ma = 192</b>
<b>Cas# 4</b>	<b>Pour <math>720 \leq \tau \leq 900</math> S</b>	<b>Ma = 256</b>

**Figure 6.1 Évolution temporelle de la température du disque chaud pour le Silicone**

pour  $Ma = 64$ . Le rapport géométrique est fixé à 0.7.

### 6.2.1 Évolution temporelle des profils de température et de $V_z$ sur la surface libre

La figures 6.2a montre l'évolution transitoire du profil de température sur la surface libre de la zone pour  $Ma = 64$ .

En examinant cette dernière figure, on peut clairement remarquer que les profils de température le long de la surface libre sont presque linéaires, ce qui indique les effets dominants de transfert de chaleur par conduction. Ce comportement est attribué à la haute conductivité thermique ( $k_m = 52 \text{ W / m K}$ ) du Silicone. Notons aussi que la température augmente considérablement au cours du temps. Par exemple, la température adimensionnelle d'un point situé à  $Z = 0.5$  sur la surface libre est multipliée par un facteur de  $\approx 8$  lorsque  $\tau$  passe de 20 s à 240 s. Le tableau 6.1 résume l'évolution temporelle de ce dernier point.

Tableau 6.1 Évolution temporelle de la température d'un point situé sur la surface libre à  $Z = 0.5$ ,  $Ma = 64$

$\tau$ (s)	20	30	40	50	60	90	240
T	0.069	0.146	0.236	0.331	0.431	0.556	0.571

Il est intéressant de mentionner que pour  $\tau = 20$  s, les gradients de température près du disque froid sont très faibles, ils augmentent d'une manière considérable avec le temps. Notons aussi que les gradients de température au voisinage de la frontière chaude augmentent durant le processus du chauffage de la zone ( $0 < \tau \leq 60$  s) puis, ils diminuent légèrement

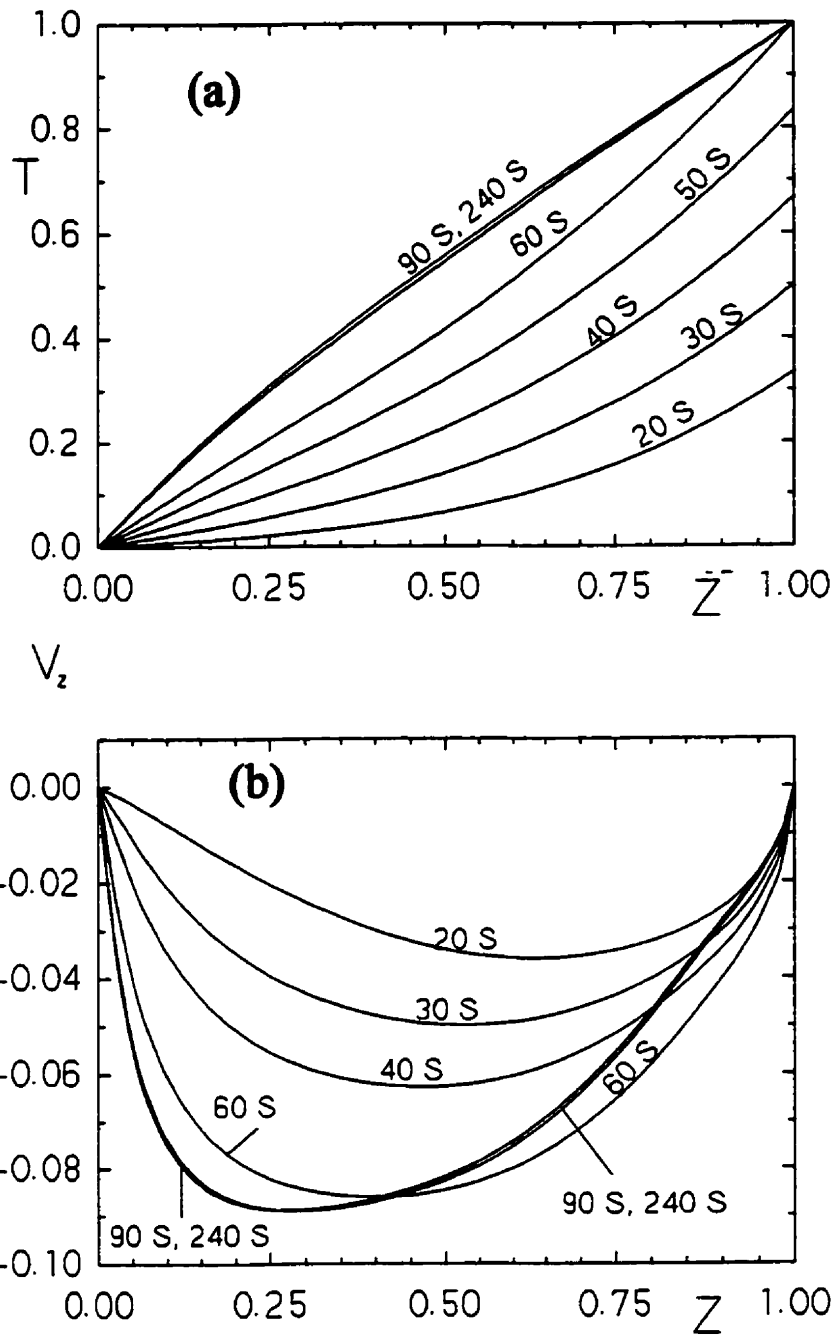


Figure 6.2 Évolution temporelle de la température et de la vitesse axiale le long de la surface libre pour  $Ma = 64$ ,  $\mu-g$

quand on atteint le palier. Ce comportement déjà observé pour le  $\text{NaNO}_3$ , est dû essentiellement à la stabilisation des courants thermocapillaires.

La figure 6.2b illustre l'évolution temporelle du profil de  $V_z$  sur la surface libre pour  $\text{Ma} = 64$ .

L'examen de la figure 6.2b révèle que les profils de la vitesse axiale ont beaucoup changé par rapport à ceux présentés auparavant pour le  $\text{NaNO}_3$ . En effet, on retrouve un seul maxima de  $V_z$  qui se déplace vers le disque froid au cours du temps. Par exemple, pour  $\tau = 20$  s la vitesse axiale maximale est observée à  $Z \approx 0.61$  alors que pour  $\tau = 240$  s,  $V_{z\text{MAX}}$  est observée à  $Z \approx 0.27$ . Ce déplacement de  $V_{z\text{MAX}}$  est attribué au fait que les gradients de température près de la frontière froide augmentent au fur et à mesure que le temps augmente. Par conséquent, le centre de la zone de circulation se déplace légèrement vers le disque froid comme on va voir plus loin au paragraphe 6.2.2. Notons que les valeurs de  $V_z$  augmentent continuellement au cours du temps. Ainsi, le tableau 6.2 résume l'évolution temporelle d'un point situé sur la surface libre de la zone à  $Z = 0.5$ . Cependant, il est intéressant de mentionner que pour  $0.4 < Z < 1$  et quand on atteint le palier ( $\tau = 90$  s et 240 s), les valeurs de  $V_z$  diminuent légèrement par rapport à celles qui correspondent à  $\tau = 60$  s. Ce comportement s'explique par la diminution des gradients de température près de la frontière chaude quand on atteint le palier.

Tableau 6.2 Évolution temporelle de la vitesse axiale d'un point situé sur la surface libre à  $Z = 0.5$ ,  $\text{Ma} = 64$

$\tau(\text{s})$	20	30	40	50	60	90	240
$ V_z $	0.0341	0.0497	0.0626	0.0741	0.0845	0.0825	0.0818

## 6.2.2 Évolution temporelle de la structure des lignes de courant

On considère la figure 6.3 montrant l'évolution temporelle des lignes de courant pour  $Ma = 64$ .

En comparant les quatre composantes de la figure 6.3, on retrouve la structure unicellulaire habituelle de la convection de Marangoni dont le point de stagnation est proche de la surface libre du côté du disque froid et le fluide circule du côté chaud vers celui froid conformément au mécanisme de la convection thermocapillaire. Cette structure a été observée numériquement par Shen et ses collègues (1990) et Fu et Ostrach (1983).

Cependant, un fait important peut être déduit en examinant attentivement les figures 6.3a, b et c: le centre du vortex se déplace progressivement vers la frontière froide au fur et à mesure que le temps augmente. Par exemple, la position du centre de tourbillon selon la direction axiale passe de  $Z = 0.4415$  à  $Z = 0.4109$  pour  $\tau = 20$  s et 60 s respectivement. Ce comportement est attribué au fait que les gradients de température près de la frontière froide augmentent au cours du temps (Voir Fig. 6.2a). D'autre part, l'intensité des courants thermocapillaires, telle que montrée au tableau 6.3, augmente d'une manière monotone dans le temps et puis diminue légèrement pour atteindre une valeur asymptotique de l'ordre de 0.0041152 à  $\tau = 240$  s. Ce comportement est dû à la stabilisation des courants thermocapillaires.

Tableau 6.3 Évolution temporelle de  $\psi_{\infty}$  pour  $Ma = 64$

$\tau(s)$	20	30	40	50	60	90	120	240
$\psi_{\infty}$	0.001614	0.00238	0.003028	0.00359	0.004113	0.004118	0.004117	0.004115



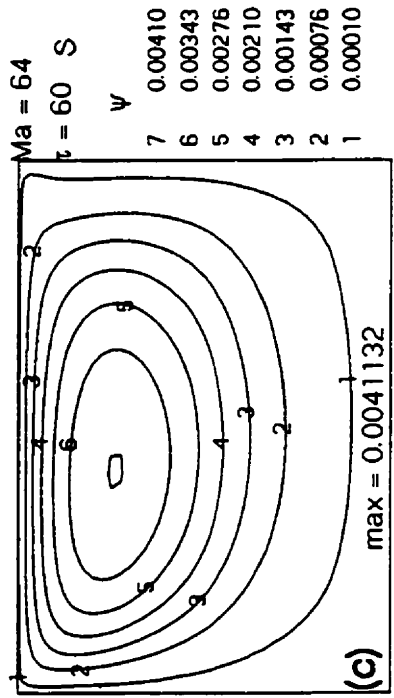
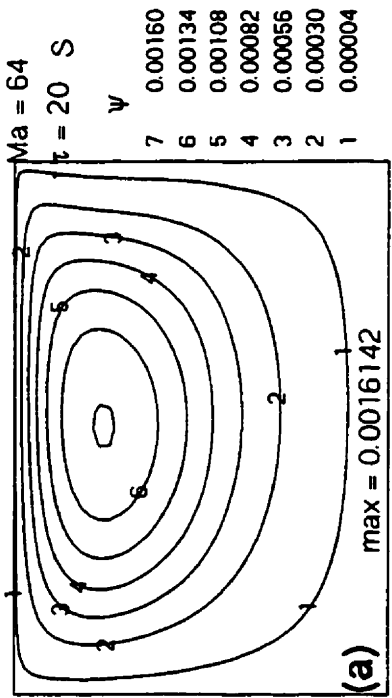
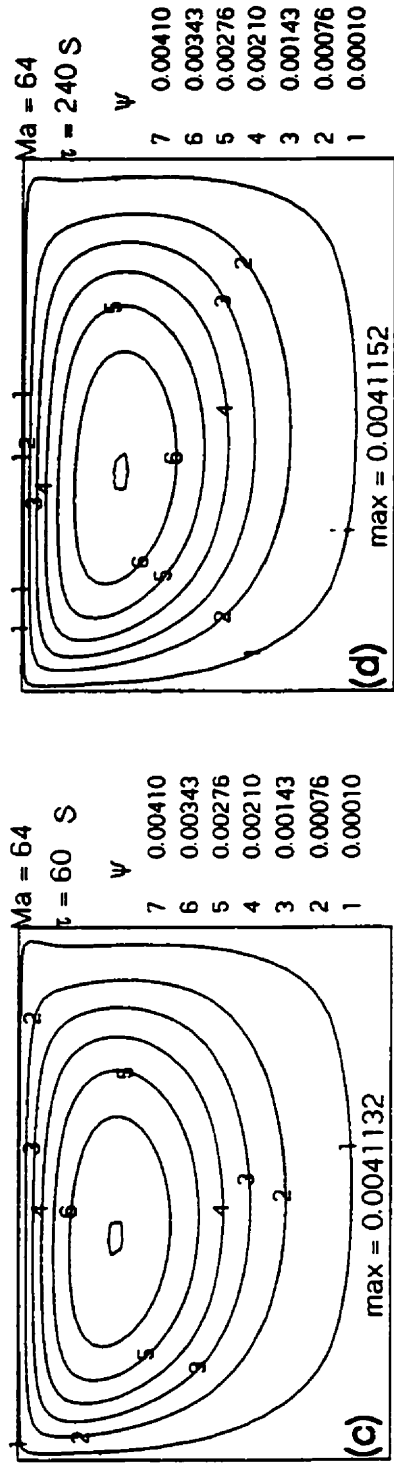
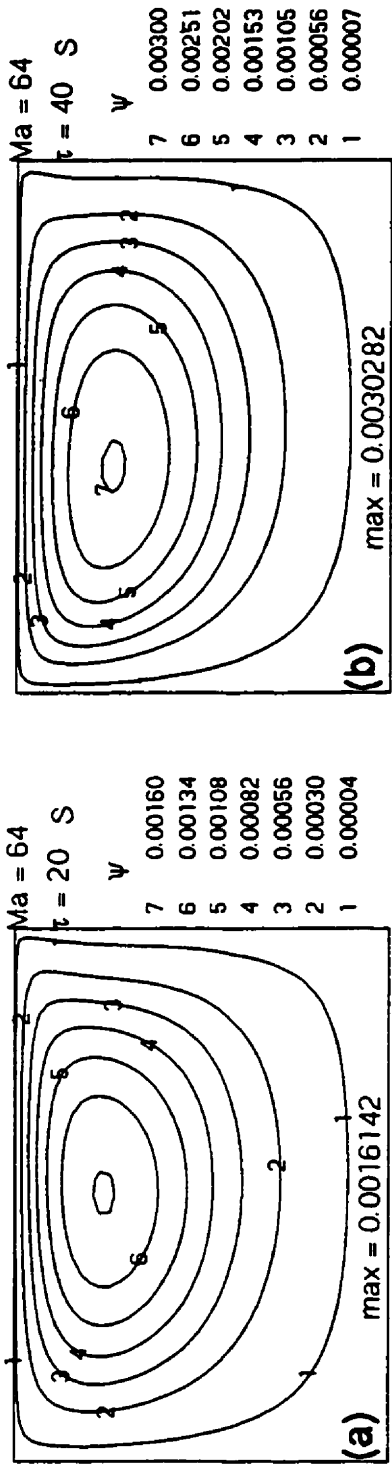


Figure 6.3 Évolution temporelle de la structure des lignes de courant pour  $Ma = 64$ ,  $\mu-g$

### 6.2.3 Évolution transitoire du champ thermique

La figure 6.4 illustre l'évolution temporelle des isothermes pour  $Ma = 64$ .

L'examen de la figure 6.4a ( $\tau = 20$  s) révèle que les isothermes sont presque parallèles aux deux frontières, ce qui indique la dominance du transfert de chaleur par conduction au début du processus de chauffage de la zone. Au fur et à mesure que le temps augmente (Fig. 6.4b, c et d), on remarque une légère déformation des isothermes dans la partie centrale de la zone du côté de la surface libre. Ce comportement est attribué aux effets grandissants de la convection thermocapillaire. Notons aussi que la zone du fluide froid délimitée par l'isotherme 1 ( $T = 0.1$ ) se rétrécit au cours du temps. Ceci est dû au mouvement surfacique du fluide qui s'intensifie avec le temps et par conséquent, le transfert de chaleur de la frontière chaude vers la frontière froide est amélioré.

#### Remarque

L'évolution temporelle des profils de vitesse axiale et de température sur la surface libre de la zone et celle des lignes de courant et des isothermes pour  $Ma = 256$  se trouve dans l'annexe G.

### 6.3 EFFET DU NOMBRE DE MARANGONI

Dans cette section, on étudiera les effets de l'augmentation du nombre de Marangoni sur les caractéristiques de l'écoulement thermo-convectif en régime permanent au sein d'une zone flottante de Silicone. Le rapport géométrique est fixé à 0.7. Notons que dans le texte qui suit, on a divisé par un facteur de 1/4, 1/2 et 3/4 les valeurs de  $T$ ,  $V_z$  et  $\psi_{\text{max}}$  qui correspondent respectivement à  $Ma = 64$ , 128 et 192 afin d'avoir la même base de température du cas caractérisé par  $Ma = 256$  et faciliter ainsi la tâche de comparaison des résultats.

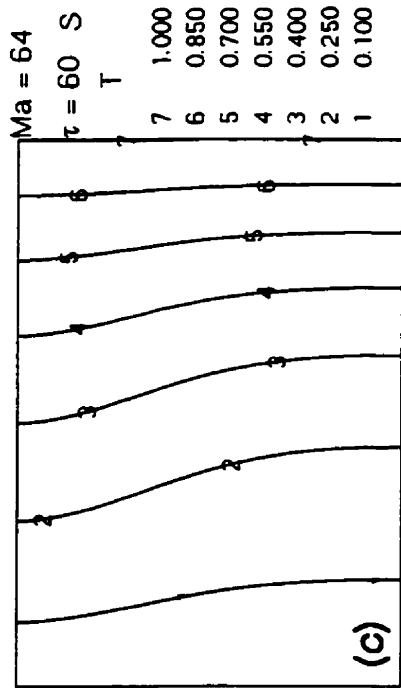
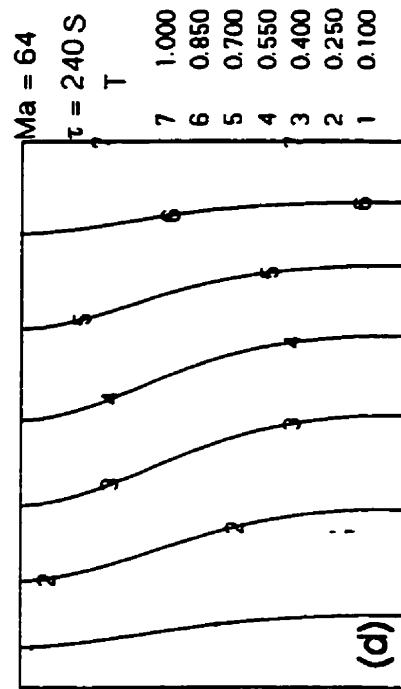
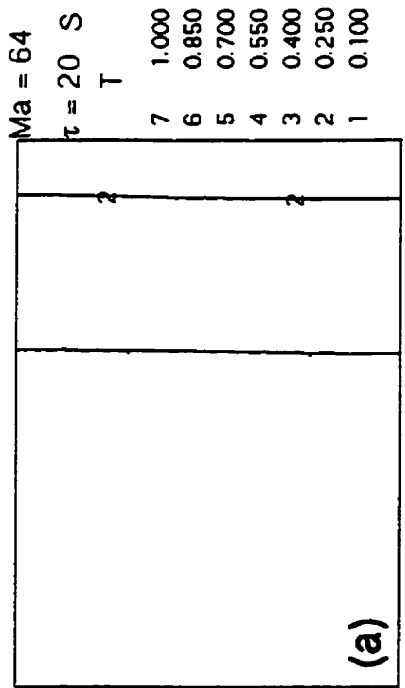
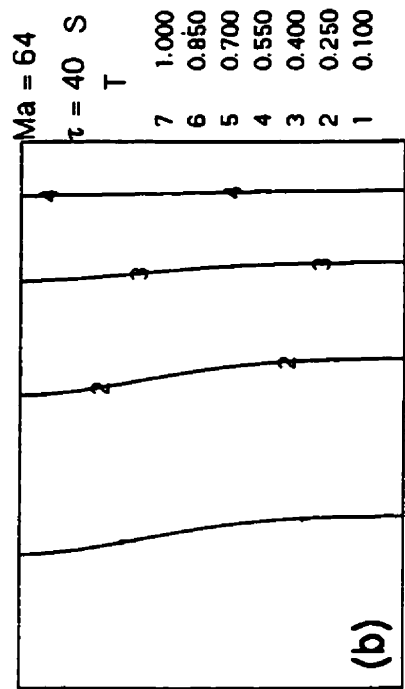


Figure 6.4 Évolution temporelle du champ thermique pour  $Ma = 64$ ,  $\mu$ -g

### **6.3.1 Effet du $Ma$ sur les profils de température et de vitesse axiale sur la surface libre**

L'influence du nombre de Marangoni sur la distribution de la température le long de la surface libre est montrée à la figure 6.5a où l'on observe quatre profils de température correspondant à  $Ma = 64, 128, 192$  et  $256$  tels qu'obtenus en régime permanent.

On remarque tout d'abord que les profils de température sont presque linéaires. Ce fait est attribué à la valeur élevée de la diffusivité thermique du Silicone. Notons que la température croît considérablement avec l'augmentation du nombre de Marangoni. Par exemple, la température adimensionnelle d'un point situé à  $Z = 0.5$  passe de  $0.143$  à  $0.299$  à  $0.461$  et à  $0.625$  pour  $Ma = 64, 128, 192$  et  $256$  respectivement. D'autre part, il importe de noter qu'au fur et à mesure que le nombre de Marangoni augmente, les gradients de température près des deux frontières (surtout près du disque froid) deviennent de plus en plus importants. Ceci peut être expliqué comme suit: en considérant la hauteur de la zone,  $H = 4\text{mm}$ , comme une constante, augmenter le nombre de Marangoni équivaut à augmenter l'écart de température entre les deux disques et par conséquent les gradients de température sur la surface libre deviennent plus grands.

La figure 6.5b présente les profils de  $V_z$  sur la surface libre pour les quatre nombres de Marangoni considérés.

Il est bon de s'arrêter sur la distribution de  $V_z$  pour  $Ma = 64$ . Il s'agit d'une large région où la vitesse axiale est presque uniforme, et près du disque froid, les gradients de  $V_z$  sont importants. Ceci est dû à la présence des gradients élevés de température près de cette frontière. En augmentant le paramètre  $Ma$ , on remarque que la vitesse axiale croît considérablement. Par exemple, la valeur de  $V_z$  (telle que montrée au tableau 6.4) d'un point situé à  $Z = 0.5$  sur la surface libre est multipliée par un facteur de  $2.5$  lorsque  $Ma$  passe de  $64$  à  $256$ . Il convient de noter aussi que plus  $Ma$  est grand, plus les gradients de vitesse près des frontières deviennent importants. Ce comportement est étroitement lié au fait que les

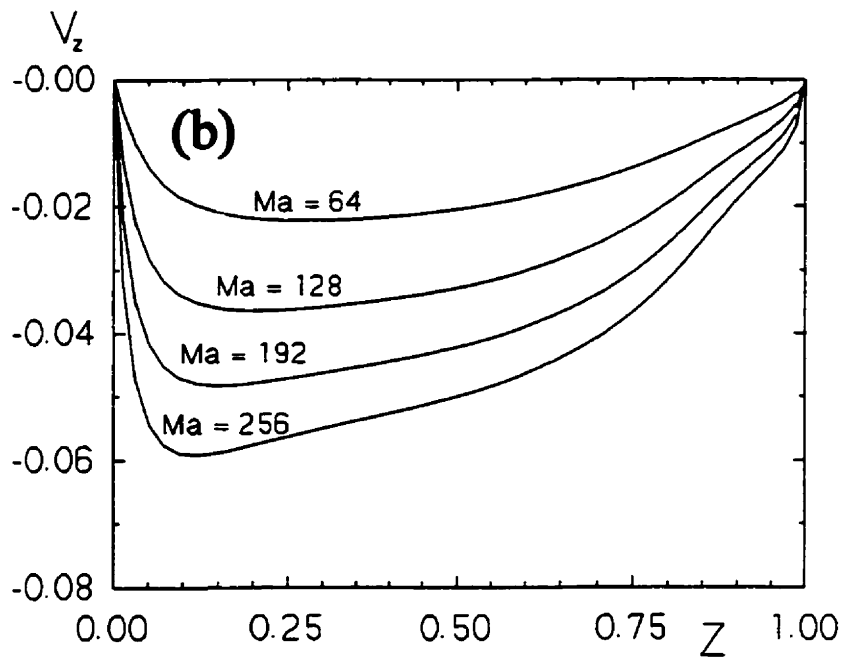
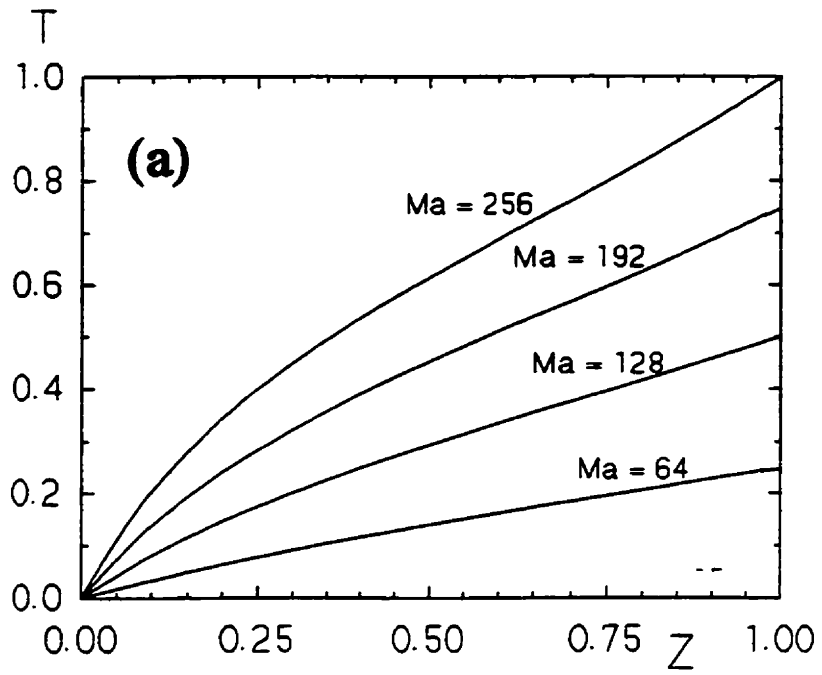


Figure 6.5 Effet du nombre de Marangoni sur les profils de température et de  $V_z$  sur la surface libre

gradients de température près des disques augmentent considérablement avec l'accroissement du nombre de Marangoni.

Notons finalement que la position de  $V_{z_{max}}$  se déplace légèrement vers la frontière froide au fur et à mesure qu'on augmente le paramètre  $Ma$ . Ainsi, cette position passe respectivement, pour  $Ma = 64$  et  $256$ , de  $Z \approx 0.27$  à  $Z \approx 0.12$ . Ceci est dû à l'augmentation des gradients de température près de la frontière froide au fur et à mesure que le nombre de Marangoni croît.

Tableau 6.4 Effet du nombre de Marangoni sur la valeur de  $V_z$  d'un point situé à  $Z = 0.5$  sur la surface libre

Ma	64	128	192	256
$ V_z $	0.02	0.033	0.0422	0.05

### 6.3.2 Effet du nombre de Marangoni sur la structure des champs thermique et hydrodynamique

La figure 6.6 montre la structure des isothermes pour les quatre nombres de Marangoni considérés. En premier lieu, on remarque que les isothermes dans la partie centrale de la zone du côté de la surface libre se déforment davantage en augmentant le nombre de Marangoni. D'autre part, la région du fluide froid délimitée par l'isotherme 1 ( $T = 0.1$ ) occupe presque la moitié de la zone pour  $Ma = 64$  (figure 6.6a) et puis elle se rétrécit au fur et à mesure que le nombre de Marangoni augmente. Ceci s'explique par le fait que le mouvement convectif qui transporte la chaleur du côté droit vers le côté gauche (froid) devient de plus en plus important avec l'augmentation du nombre de Marangoni.

En ce qui concerne l'influence du nombre de Marangoni sur le champ de l'écoulement, on observe la même structure de l'écoulement aussi bien pour des faibles

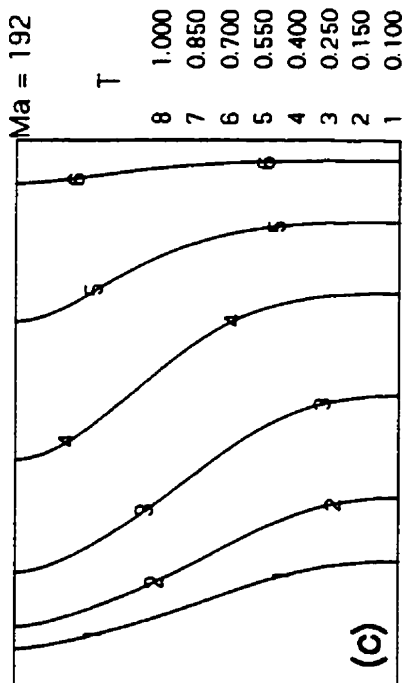
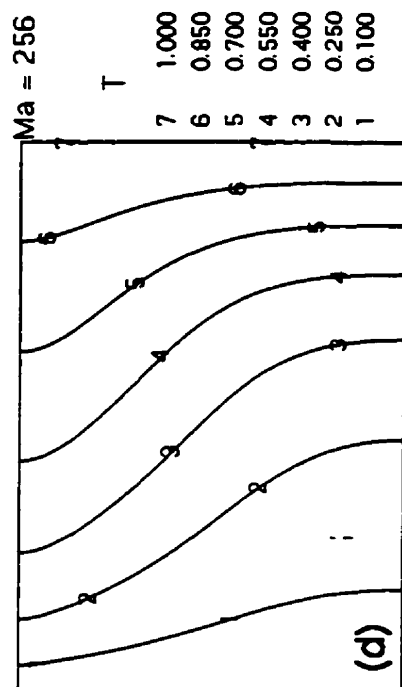
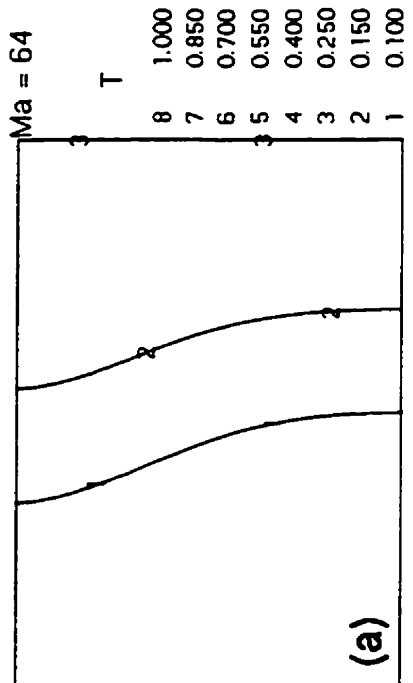
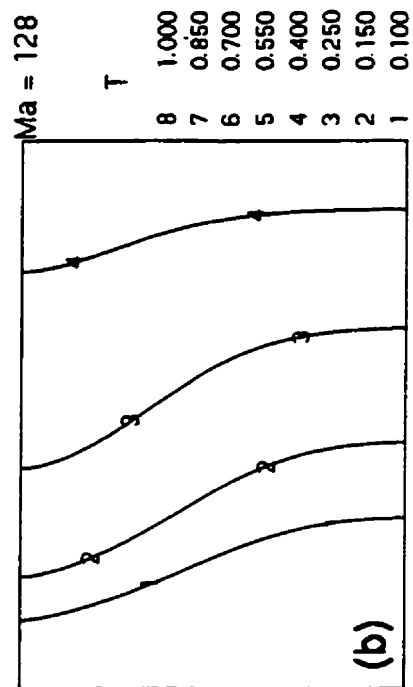


Figure 6.6 Effet du nombre de Marangoni sur le champ thermique

nombres de Marangoni (Voir Fig. 6.3d) que des nombres élevés (Fig. G.2d): une structure unicellulaire dont le centre du vortex est proche de la surface libre du côté du disque froid. On note que la valeur de  $\psi_{\text{max}}$ , qui mesure l'intensité des courants convectifs, augmente avec un accroissement du nombre de Marangoni. Elle passe respectivement pour  $Ma = 64, 128, 192$  et  $256$  de  $0.00103$  à  $0.00162$  à  $0.00205$  et à  $0.00238$ .

#### **6.4 EFFET DU RAPPORT GÉOMÉTRIQUE A**

Rappelons que le rapport géométrique  $A$  a été défini comme étant  $R_0 / H$ . La hauteur  $H$  de la zone flottante étant considérée comme une longueur de référence, toute variation de  $A$  implique donc une variation du rayon  $R_0$  de la zone cylindrique. En fixant la valeur de  $Ma$  à  $128$  ( $\Delta T = 2$  °C,  $H = 4\text{mm}$ ), on a considéré quatre valeurs du rapport géométriques:  $A = 0.5, 0.6, 0.7$  et  $1$ .

Les effets du rapport géométrique sur le champ hydrodynamique en régime permanent, sont illustrés à travers la figure 6.7. En premier lieu, on observe la même structure unicellulaire qui est une caractéristique de l'écoulement thermocapillaire pour les différents rapports géométriques considérés. On note aussi que l'intensité des courants thermocapillaire telle que montrée au tableau 6.5 s'intensifie en augmentant le rapport  $A$ . Par exemple, la valeur de  $\psi_{\text{max}}$  est multipliée approximativement par un facteur de  $2.5$  quand  $A$  passe de  $0.5$  à  $1$ . Ce comportement peut être expliqué comme suit: étant donné que la hauteur de la zone  $H$  est constante, augmenter  $A$  équivaut à augmenter le volume de la zone de Silicone. Vu que le Silicone est un fluide peu-visqueux, un plus grand volume facilite la circulation, d'où des zones de recirculation plus intenses. Un comportement analogue a été observé par Hariz (1995) pour une zone flottante de Germanium.

En examinant attentivement les figures 6.7a, b, c et d, on peut remarquer qu'en augmentant le paramètre  $A$ , le centre du vortex s'éloigne légèrement, selon la direction



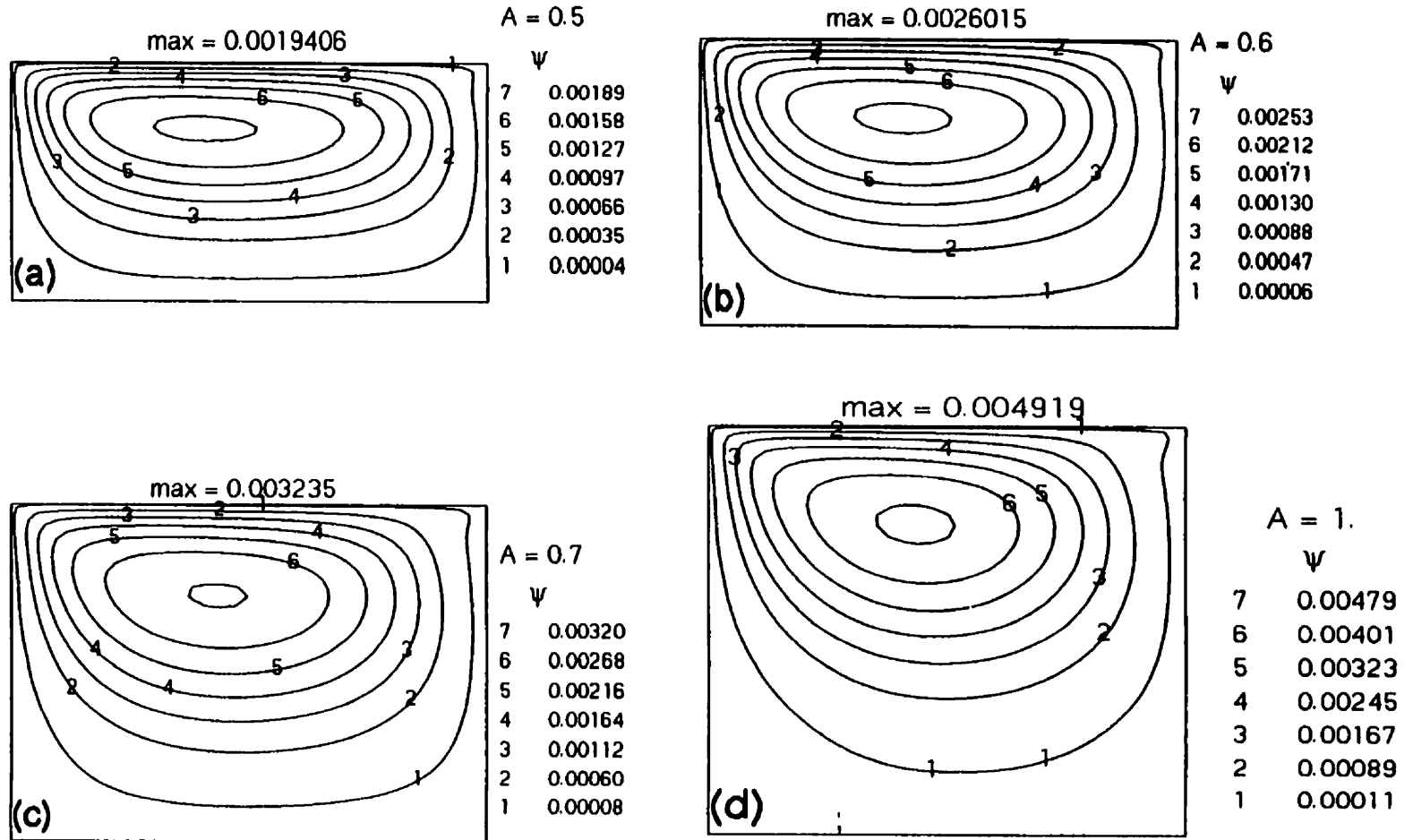


Figure 6.7 Effet du rapport géométrique sur la structure des lignes de courant pour  $Ma = 128$

radiale, de la surface libre. Par conséquent la valeur de la vitesse maximale sur la surface libre (Voir tableau 6.5) diminue légèrement en augmentant le rapport A.

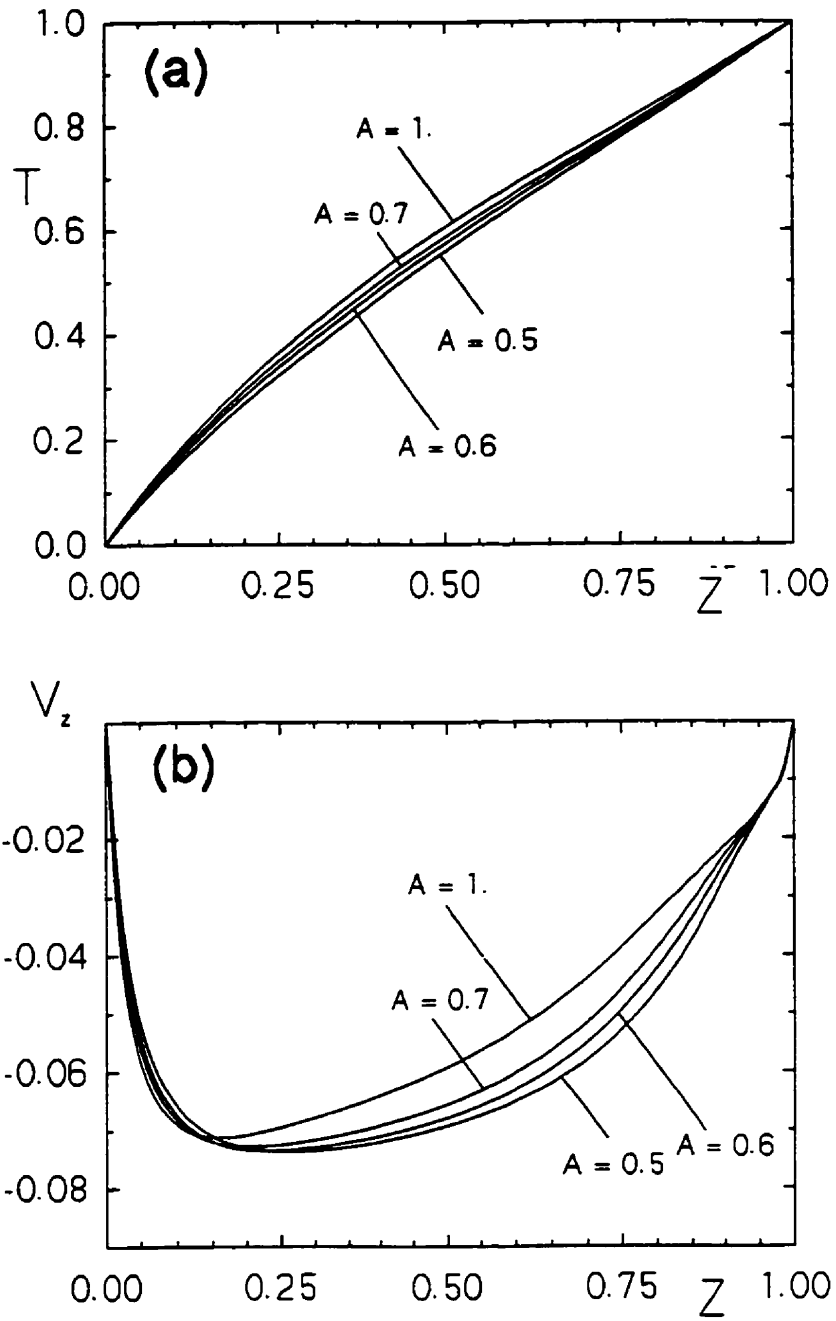
Tableau 6.5 Effet du paramètre A sur  $\psi_{\text{max}}$  et  $V_{z_{\text{max}}}$  pour  $Ma = 128$

A	0.5	0.6	0.7	0.1
$\psi_{\text{max}}$	0.0019406	0.0026015	0.003235	0.004919
$V_{z_{\text{max}}}$ mm / s	75.18	75.02	74.31	72.73

Les figures 6.8a et b illustrent respectivement l'effet du rapport géométrique sur les profils de température et de la vitesse axiale sur la surface libre de la zone flottante pour  $Ma = 128$ .

L'examen de la figure 6.8a montre que les profils de température pour les quatre rapports géométriques considérés conservent la même allure. La distribution de température est presque linéaire, ce qui reflète la dominance du transfert de chaleur par conduction. Cependant, il importe de noter que pour  $0.1 < Z < 0.9$ , la température augmente avec l'accroissement du rapport géométrique. Par exemple, la température adimensionnelle d'un point situé à  $Z = 0.6$  sur la surface libre de la zone passe, respectivement pour  $A = 0.5, 0.6, 0.7$  et  $1$  de  $0.649$ , à  $0.662$ , à  $0.672$  et à  $0.689$ . Ce comportement est attribué au fait que l'intensité des courants thermocapillaires devient plus vigoureuse en augmentant le paramètre A et par conséquent, le transfert de chaleur du côté chaud vers le côté froid est amélioré.

La figure 6.8b illustre l'influence du rapport géométrique sur la distribution de la vitesse axiale le long de la surface libre, et montre que l'allure des courbes est similaire. Il s'agit d'un maximum localisé près de la frontière froide. Dans la région centrale sur la surface libre, la valeur de  $V_z$  diminue en augmentant le rapport géométrique. Ainsi, la vitesse d'un point localisé à  $Z = 0.6$  sur la surface libre décroît de  $0.064$ , à  $0.062$ , à  $0.058$  et à  $0.051$  quand le paramètre A augmente de  $0.5$  à  $0.6$  à  $0.7$  et à  $1$ . Ce comportement est étroitement lié au fait



**Figure 6.8 Effet du rapport géométrique sur les profils de température et de  $V_z$  sur la surface libre de la zone**

que le centre de la zone de recirculation (tel que mentionné auparavant) s'éloigne légèrement, selon la direction radiale, de la surface libre de la zone.

## **6.5 CONCLUSION**

Au terme de ce chapitre, on a présenté et analysé les caractéristiques thermiques et hydrodynamiques d'un écoulement transitoire au sein d'une zone flottante de Silicone. Les points suivants semblent être pertinents:

- La structure de l'écoulement est unicellulaire et le centre du vortex est situé près de la surface libre du côté du disque froid.
- L'intensité des courants thermocapillaires augmentent au fur et à mesure qu'on chauffe la zone et puis diminue légèrement quand la différence de température entre les deux disques devient constante.
- Les gradients de température et de vitesse axiale sont importants près de la frontière froide et ils augmentent avec le temps et avec l'augmentation du nombre de Marangoni.
- L'intensité des courants thermocapillaires s'intensifie avec l'augmentation du nombre de Marangoni.
- Les isothermes dans la partie centrale de la zone se déforment davantage en augmentant le nombre de Marangoni et le transfert de chaleur du côté chaud vers le côté froid est amélioré.
- En augmentant le rapport géométrique  $A$ , l'intensité des courants thermocapillaires devient de plus en plus importante et la vitesse sur la surface libre diminue légèrement.

## **DEUXIÈME PARTIE**

### **RÉSULTATS OBTENUS AVEC LE MODÈLE 3D**

## **CHAPITRE 7**

### **RÉSULTATS OBTENUS EN 3D POUR LE $\text{NaNO}_3$ - LA TRANSITION AXISYMETRIQUE / OSCILLATOIRE**

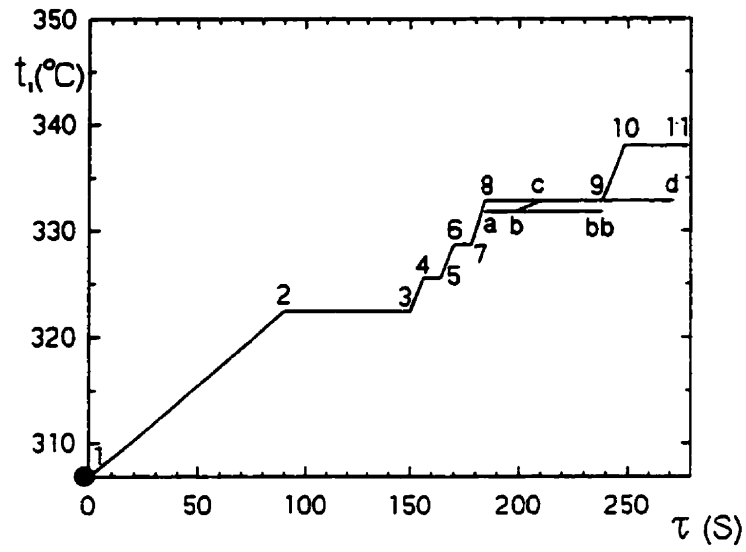
Dans ce chapitre, on étudie numériquement l'écoulement tridimensionnel et en régime transitoire au sein d'une zone flottante de  $\text{NaNO}_3$  opérant en  $\mu\text{-g}$ . Le rapport géométrique  $A$  est fixé à 0.732. On détermine le nombre de Marangoni critique pour lequel la transition axisymétrique / oscillatoire a lieu durant le processus du chauffage de la zone. On étudie également le phénomène de l'hystérésis.

#### **7.1 ÉVOLUTION TEMPORELLE DE LA TEMPÉRATURE DU DISQUE CHAUD ET LE CHOIX DU PAS DE TEMPS**

La figure 7.1 illustre l'évolution temporelle de la température du disque chaud telle qu'imposée lors des simulations numériques pour le  $\text{NaNO}_3$ .

Il est à rappeler que le chauffage de la zone par type " palier " a été adopté expérimentalement par plusieurs chercheurs dont Saghir et al. (1992) et Preisser et al. (1983). En utilisant ce type de chauffage lors des simulations numériques, on a pu réduire considérablement le temps de calcul. En effet, l'estimé initial d'un cas quelconque correspond à la solution de l'écoulement développé du cas qui le précède. Par exemple, l'estimé initial du cas V caractérisé par  $\text{Ma} = 15000$  correspond à la solution du cas IV obtenue à  $\tau = 238.5$  s au lieu de considérer les conditions initiales qui correspondent à l'état du repos total.

Les cas simulés, ainsi que la pente du chauffage  $dt / d\tau$  et la nature de l'écoulement sont résumés dans le tableau 7.1.



**Figure 7.1** Évolution temporelle de la température du disque chaud pour une zone de  $\text{NaNO}_3$  en 3D

**Tableau 7.1 Cas simulés pour le chauffage du disque no.1**

Cas	Profil de température	$dt_i / d\tau$ (°C/min.)	Ma	Structure de l'écoulement
I	(1-2-3)	10	7500	Axisymétrique
II	(3-4-5)	30	9000	Axisymétrique
III	(5-6-7)	30	10500	Axisymétrique
IV	(7-8-9)	40	12500	Oscillatoire
V	(9-10-11)	30	15000	Oscillatoire
VI	(7-a-b-bb)	40	12000	Axisymétrique
VII	(b-c-d)	5	12500	Oscillatoire

Le pas de temps  $\Delta\tau$  doit être judicieusement choisi afin de pouvoir détecter la transition axisymétrique / oscillatoire. Pour le cas I (Ma = 7500, relativement faible), le pas de temps adopté est de 1/20 s. Pour les autres cas,  $\Delta\tau$  est réduit à 1/50 s, ce qui correspond à  $3 \cdot 10^2$  de la période d'oscillations (période qui est estimée à  $\approx 1.5$  s selon les données expérimentales de Preisser et al., 1983). Notons que le choix du pas de temps est basé sur les travaux numériques de Rupp et al. (1989).

Finalement, il est intéressant de signaler que le temps de calcul nécessaire pour un cas typique est d'environ de 240 heures continues sur un micro-ordinateur Pentium 100 MHz.

## **7.2 STRUCTURE AXISYMÉTRIQUE POUR $Ma \leq 12000$**

Pour  $Ma \leq 12000$  (cas I, II, III et VI), les résultats numériques obtenus par le code de calcul 3D montrent que la structure des champs hydrodynamique et thermique est parfaitement axisymétrique.



La figure 7.2a montre l'évolution temporelle de la température aux trois points particuliers ( $\theta = 40^\circ$ ,  $180^\circ$  et  $300^\circ$ ) situés sur la surface libre de la zone à  $Z = 0.5$  pour le cas VI ( $Ma = 12000$ ). Il est à noter que le choix de suivre l'évolution temporelle des points localisés sur la surface libre est motivé par le fait que lors des expériences, les thermocouples sont souvent placés directement sur la surface libre plutôt qu'à l'intérieur de la zone (Savino et Monti, 1996).

En examinant la figure 7.2a, on peut constater que les profils de température pour les trois points augmentent de façon monotone avec le temps avant d'atteindre la même valeur asymptotique de  $323^\circ\text{C}$ . Il est très intéressant de mentionner aussi que les trois courbes de température sont confondues, ce qui indique clairement que la structure du champ thermique est parfaitement axisymétrique pour  $Ma = 12000$ .

La figure 7.2b illustre les isothermes pour le cas VI à  $Z = 0.5$  et à  $\tau = 198$  s. La forme circulaire et parfaitement concentrique des isothermes est une autre évidence que l'écoulement demeure axisymétrique pour  $Ma \leq 12000$ .

### **7.3 STRUCTURE OSCILLATOIRE DES CHAMPS THERMIQUE ET HYDRODYNAMIQUE POUR $Ma = 12500$ , CAS IV**

Dans cette section, on va présenter le profil temporel de la température de trois points situés sur la surface libre de la zone, le champ de vitesse et le champ thermique pour quatre plans R-Z et les tracés de l'évolution temporelle d'iso-contours de  $V_z$ , des isothermes et de la vitesse transversale dans le plan R- $\theta$  à  $Z = 0.5$  pour  $Ma = 12500$ .

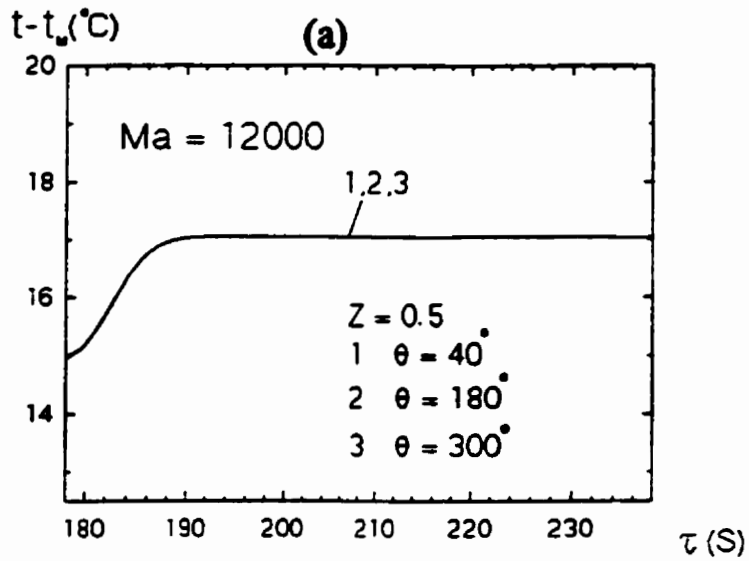


Figure 7.2a Évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre pour  $Ma = 12000$

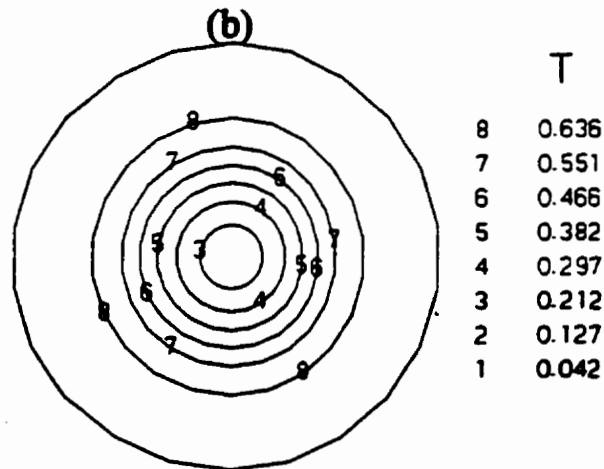


Figure 7.2b Structure des isothermes à  $Z = 0.5$  pour  $Ma = 12000$  et  $\tau = 198$  s

### **7.3.1 Évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre**

La figure 7.3a illustre l'évolution temporelle de la température aux trois points particuliers ( $\theta = 40^\circ$ ,  $180^\circ$  et  $300^\circ$ ) localisés sur la surface libre de la zone à  $Z = 0.5$  pour le cas  $Ma = 12500$  (cas IV).

On observe clairement qu'au début du chauffage de la zone, les trois courbes de température sont confondues. À  $\tau \approx 186$  s, il y a un certain écart entre les différentes courbes de température, donc, la transition axisymétrique / oscillatoire est amorcée. Au début des oscillations, l'amplitude crête à crête est très faible. Il augmente d'une manière significative avec le temps pour atteindre une valeur asymptotique de l'ordre de  $0.83$  °C. La fréquence des oscillations, déterminée par la méthode FFT, est égale à  $0.4$  Hz.

Il est à noter que  $Ma_u^u = 12500$  est le nombre de Marangoni critique qui correspond à la transition axisymétrique / oscillatoire. En effet, pour  $Ma < 12500$ , les champs thermique et hydrodynamique sont parfaitement axisymétriques. Pour  $Ma = 12500$ , le comportement change complètement et l'écoulement devient oscillatoire.

La figure 7.3b montre l'évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre de la zone à  $\theta = 180^\circ$  (cas IV).

On observe tout d'abord que la distribution de température, pour les trois points considérés, a la même allure. Au début du processus du chauffage de la zone, les profils de température sont linéaires. À  $\tau \approx 186$  s, on observe que ces profils commencent à osciller. L'amplitude crête à crête des oscillations de température augmente considérablement au cours du temps et puis elle atteint une valeur asymptotique. Il importe de noter que cette amplitude

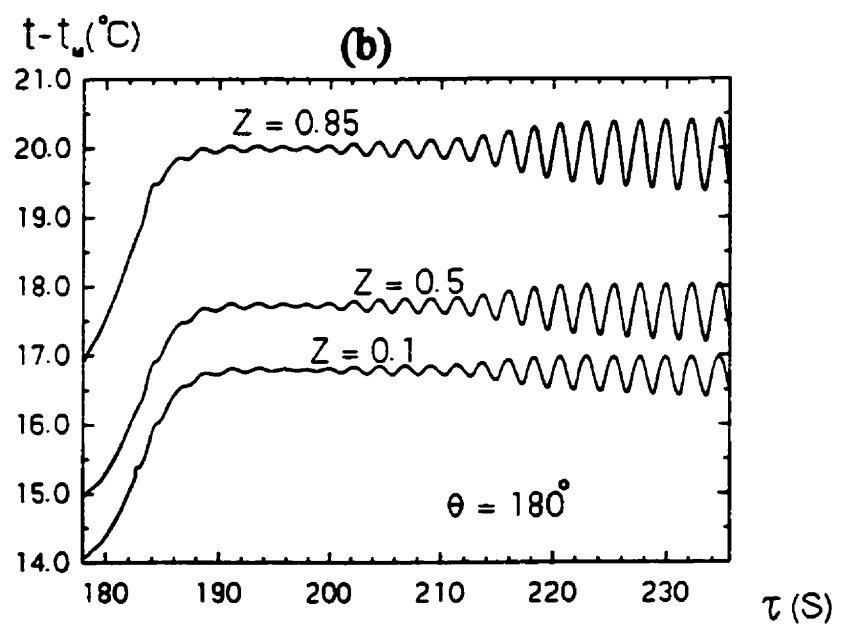
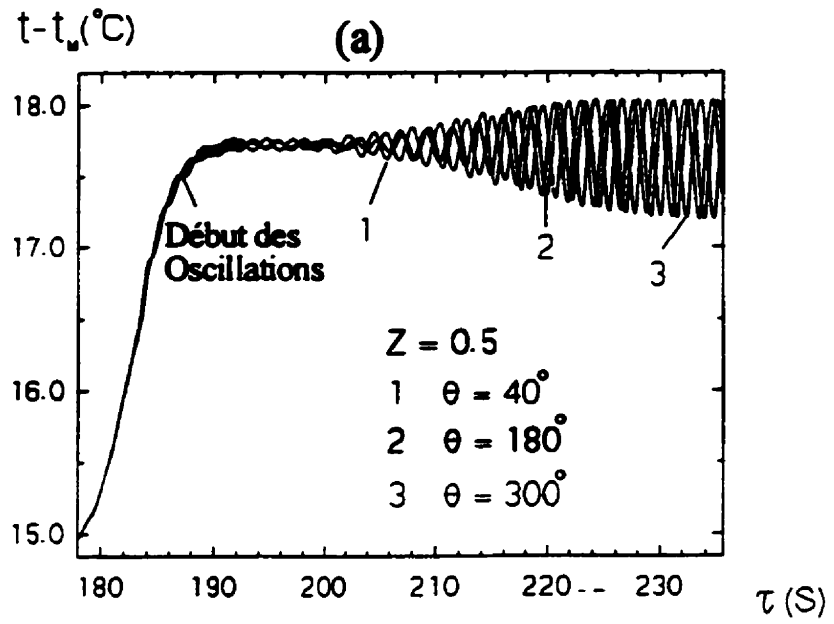


Figure 7.3 Évolution temporelle de la température des différents points situés sur la surface libre pour le cas IV,  $Ma = 12500$

dépend de la position de chaque point et elle est plus prononcée pour le point situé près de la frontière chaude. En effet, l'amplitude crête à crête (lorsque le régime oscillatoire est pleinement établi) est de l'ordre de 0.57 °C, 0.83 °C et 1.03 °C pour respectivement  $Z = 0.1$ , 0.5 et 0.85.

### 7.3.2 Structure du champ de l'écoulement et du champ thermique, cas IV

Les figures 7.4 et 7.5 illustrent respectivement la structure de l'écoulement et du champ thermique telle qu'obtenue à  $\tau = 237.25$  s (pour lequel l'écoulement oscillatoire est développé) pour quatre plans R-Z particuliers à  $\theta = 0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  et  $135^\circ$ .

L'examen de la figure 7.4 nous montre que la structure toroïdale de l'écoulement persiste et elle est similaire à celle observée pour l'écoulement axisymétrique. En effet, on trouve que la circulation du fluide est intense dans la région avoisinant la surface libre et le centre de la zone de recirculation est localisé près de la surface libre du côté du disque chaud.

Cependant, il est très intéressant de noter que la position du centre du vortex change en passant d'un plan à un autre. Le déplacement du centre du vortex selon la direction axiale est plus prononcé que celui selon la direction radiale. Par exemple, le centre du vortex pour le plan  $\theta = 0^\circ$  est localisé à ( $R^* = 0.60$ ,  $Z^* = 0.74$ ), il passe à (0.57, 0.62) pour  $\theta = 90^\circ$ . Le tableau 7.2 résume les coordonnées du centre du vortex pour les quatre plans.

Il importe de mentionner que le champ de vitesse change aussi en passant d'un plan à un autre. Ce changement est en particulier prononcé dans la région adjacente au disque chaud où le centre du vortex est confiné. Ce comportement explique l'amplitude élevée de la température observée auparavant près de la frontière chaude (Fig. 7.3b).

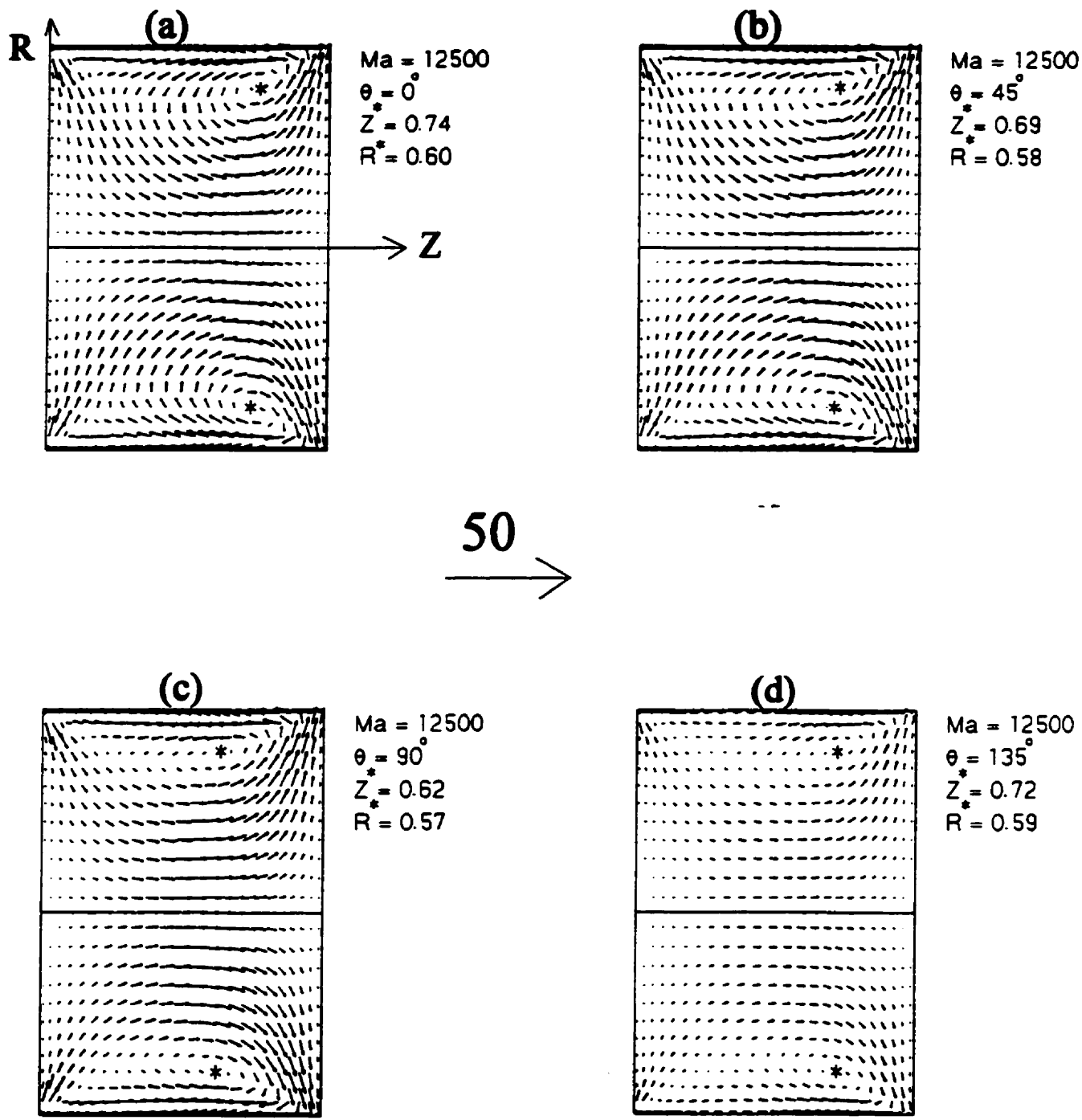


Figure 7.4 Structure de l'écoulement pour quatre plans R-Z (cas IV,  $Ma = 12500$ )

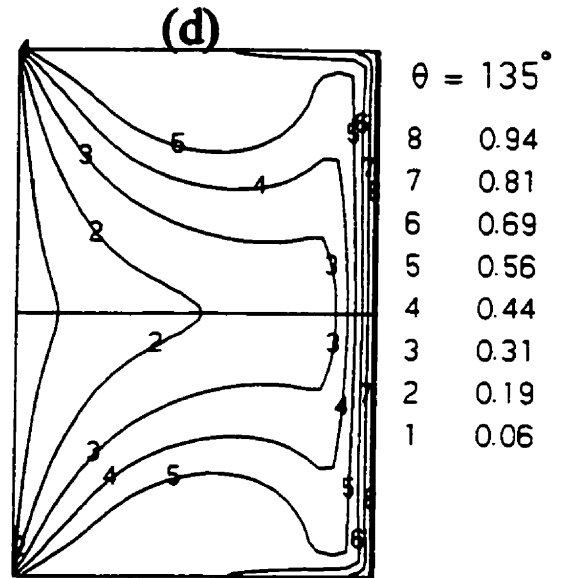
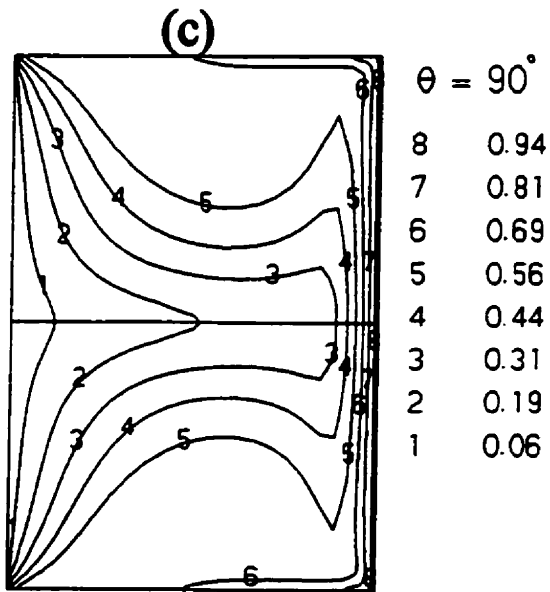
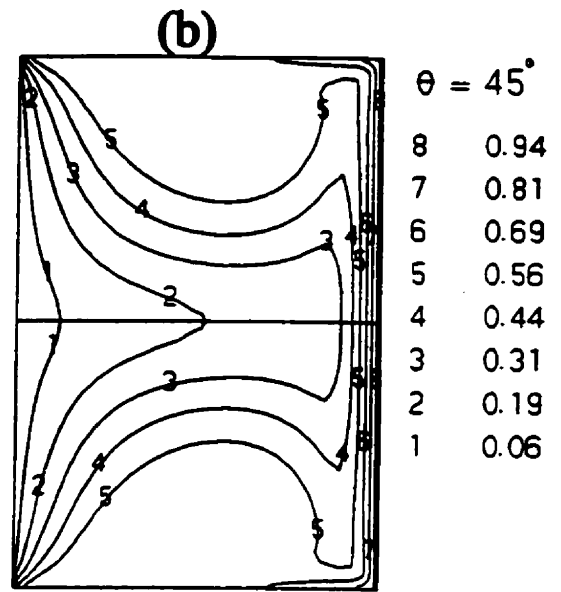
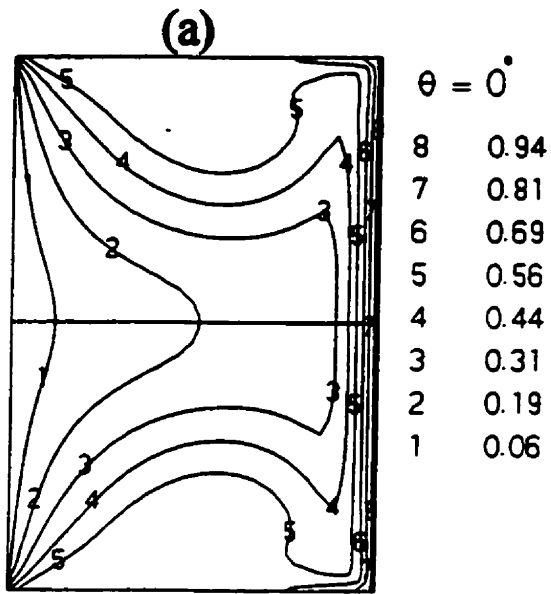


Figure 7.5 Structure du champ thermique pour quatre plans R-Z (cas IV,  $Ma = 12500$ )

**Tableau 7.2 Coordonnées du centre du vortex**

$\theta$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$
$R^*$	0.60	0.58	0.57	0.59
$Z^*$	0.74	0.69	0.62	0.72

En examinant la figure 7.5, on observe tout d'abord que pour un plan donné et dans la région adjacente au disque chaud, les isothermes sont presque parallèles à cette dernière frontière, ce qui reflète la dominance du transfert de chaleur par conduction. Cependant, dans la partie centrale de la zone, les isothermes sont drastiquement déformés. Ce comportement est évidemment dû aux effets de la convection thermocapillaire. D'autre part, en comparant les différentes composantes de la figure 7.5, on peut constater que la structure des isothermes change selon la direction circonférentielle. Par exemple, en passant du plan  $\theta = 0^\circ$  au plan caractérisé par  $\theta = 45^\circ$ , la forme de l'isotherme 5 change et la région chaude délimitée par ce dernier isotherme, du côté de la surface libre, s'élargit puis elle se rétrécit dans le plan  $\theta = 135^\circ$ .

- Position du centre du vortex

Les figures 7.6a et b montrent respectivement la position du centre du vortex dans les plans R- $\theta$  et R-Z pour  $\tau$  et  $\tau + \tau_0 / 2$  ( $\tau_0$  est la période des oscillations estimée à 2.5 s et  $\tau = 237.25$  s).

L'examen des figures 7.6a et b montre que la position du centre du vortex varie avec le temps. Pour un temps donné et dans le plan R- $\theta$  (Fig.7.6a), le lieu du centre du vortex n'est plus circulaire comme dans le cas axisymétrique. Ce lieu est plutôt elliptique.

Pour comprendre davantage le comportement oscillatoire, on va présenter, par la suite, l'évolution temporelle des champs thermique et hydrodynamique.



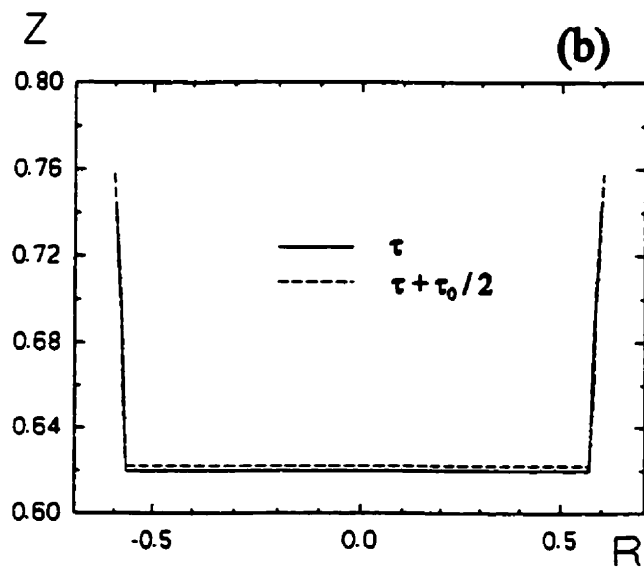
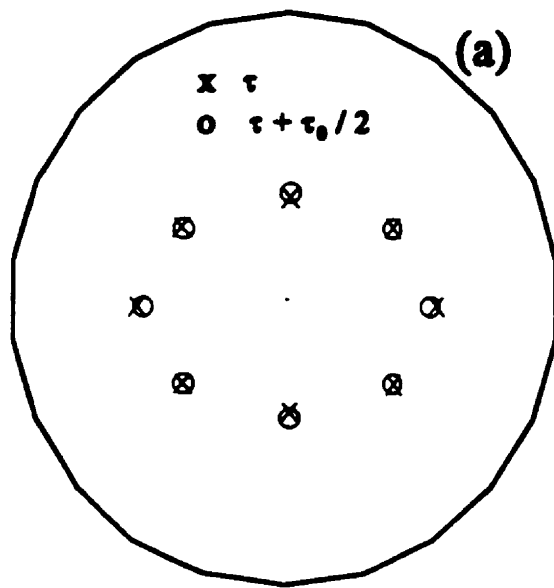


Figure 7.6 a,b Position du centre du vortex pour deux temps différents  $\tau$  et  $\tau + \tau_0/2$  (cas IV)

### **7.3.4 Évolution temporelle de la structure des isothermes et des iso-contours de $V_z$ dans le plan $R-\theta$ à $Z = 0.5$ , cas IV**

Les figures 7.7 et 7.8 illustrent respectivement la distribution de la température et des iso-contours de  $V_z$  au milieu de la zone à quatre temps différents durant une période des oscillations pour  $Ma = 12500$  (cas IV).

L'examen de la figure 7.7a nous montre, d'abord, que la structure des isothermes est elliptique, ce qui reflète la non-uniformité du champ thermique selon  $\theta$ . Le long de la surface libre, il existe une alternance des zones froide et chaude (délimitée par l'isotherme 8) selon la direction circonférentielle.

En suivant l'évolution temporelle des isothermes (Fig. 7.7a, b, c et d), on peut remarquer que tout le champ thermique tourne, d'une façon périodique dans le temps, autour de l'axe principal de la zone dans le sens des aiguilles d'une montre. En effet, il suffit de suivre l'évolution temporelle de l'isotherme 8: au fur et à mesure que le temps augmente, le fluide chaud (ayant une température adimensionnelle supérieure à 0.671) se déplace selon la direction circonférentielle et il en résulte une alternance des régions froide et chaude pour chaque point situé sur la surface libre. Ce fait explique la structure des oscillations de la température observée auparavant à la figure 7.3.

La figure 7.8a révèle que les iso-contours de  $V_z$  ne sont plus circulaires, ce qui indique la destruction de symétrie du champ  $V_z$ . Notons aussi que le long de la surface libre, il existe une alternance des forts et des faibles gradients de  $V_z$  selon la direction radiale. Ces forts gradients se trouvent juste à l'endroit correspondant à la région chaude délimitée par l'isotherme 8 (Voir Fig. 7.7) alors que les faibles gradients de  $V_z$  se situent à l'endroit qui coïncide avec la région froide.

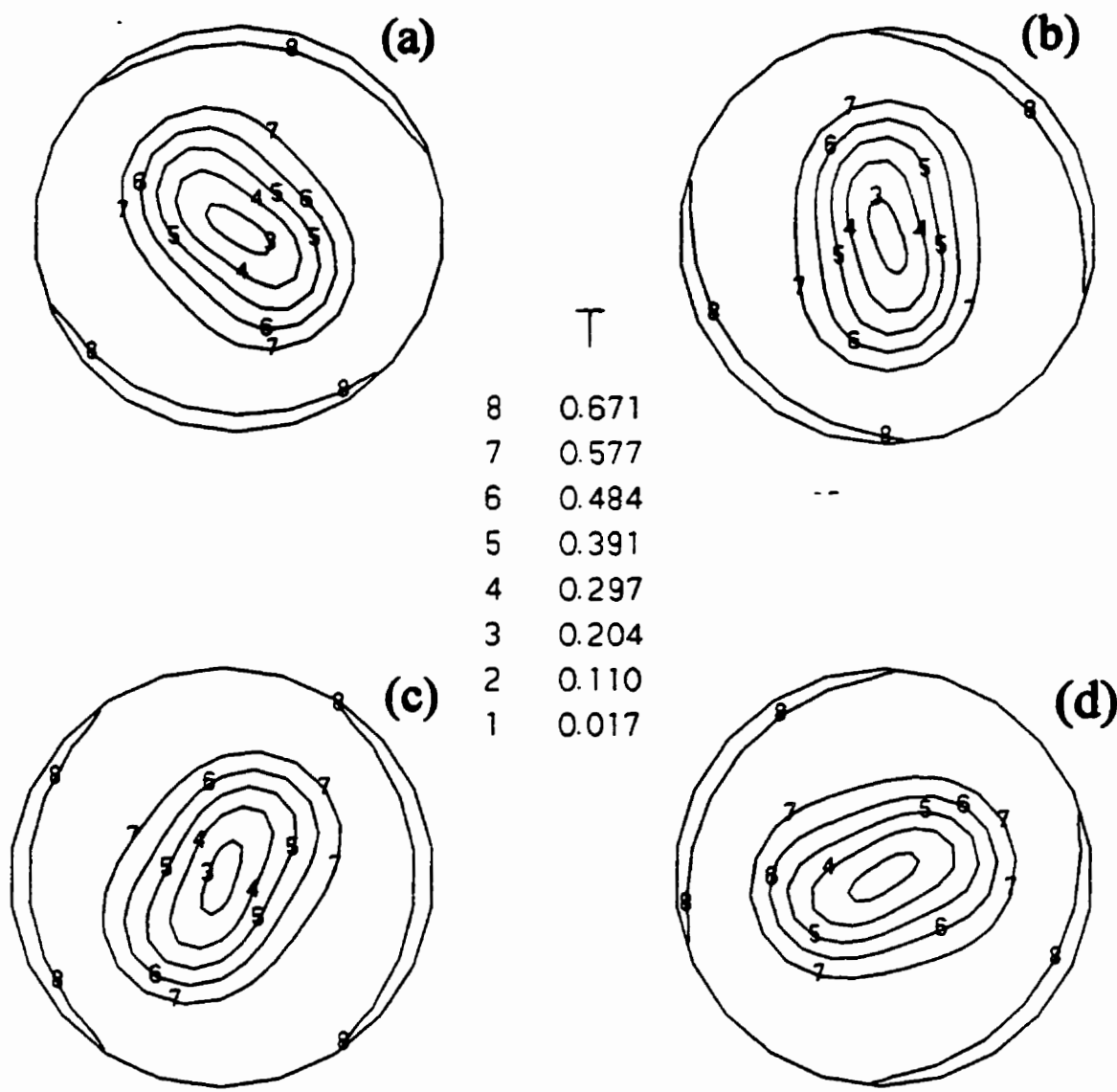


Figure 7.7 Évolution temporelle de la structure des isothermes à  $Z = 0.5$  pour le cas IV et aux temps  $\tau$ ,  $\tau + \tau_0/4$ ,  $\tau + \tau_0/2$  et  $\tau + 3\tau_0/4$  respectivement

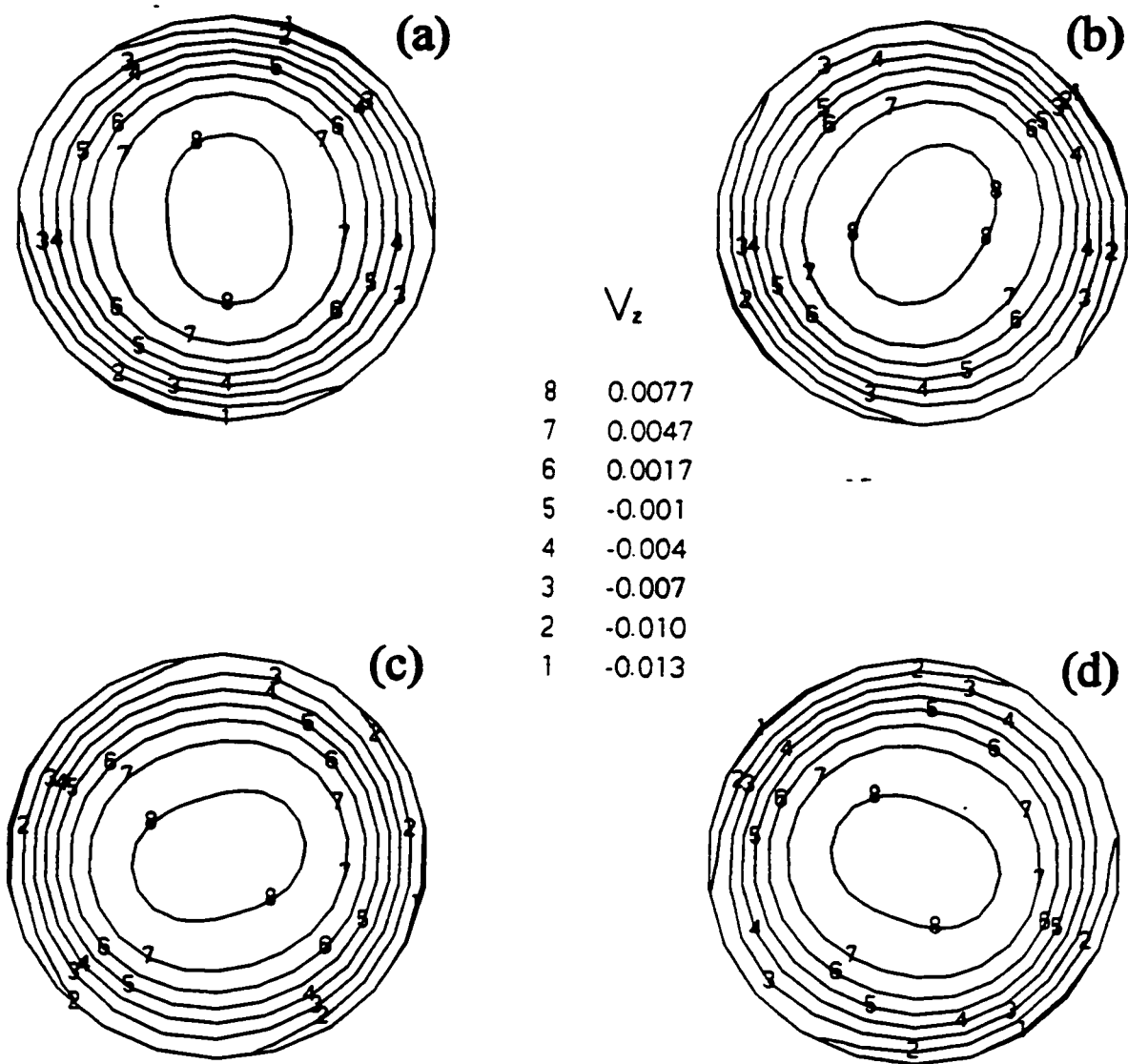


Figure 7.8 Evolution temporelle de la structure des iso-contours de  $V_z$  à  $Z = 0.5$  pour le cas IV et aux temps  $\tau$ ,  $\tau + \tau_0/4$ ,  $\tau + \tau_0/2$  et  $\tau + 3\tau_0/4$  respectivement

En comparant les quatre composantes de la figure 7.8, on peut constater la rotation des iso-contours de  $V_z$  avec le temps autour de l'axe principal de la zone dans le sens des aiguilles d'une montre. Un comportement analogue a été observé par Rupp et al. (1989) pour une zone flottante à faible nombre de Prandtl.

### 7.3.5 Évolution temporelle de la structure de la vitesse transversale à $Z = 0.5$ , cas IV

La figure 7.9 montre l'évolution temporelle de la structure de la vitesse transversale au milieu de la zone à quatre temps différents ( $\tau$ ,  $\tau + \tau_0 / 4$ ,  $\tau + \tau_0 / 2$ ,  $\tau + 3\tau_0 / 4$ ) durant une période des oscillations.

À partir de la figure 7.9a, on observe généralement que la circulation du fluide est importante sur la surface libre de la zone. La structure de la vitesse transversale est plutôt complexe. On note la présence d'une grande région autour de l'axe  $XX$ , où la vitesse transversale est assez prononcée. En effet, il s'agit dans cette dernière région d'une superposition de deux courants provenant de la surface libre. Par contre, l'écoulement autour de l'axe  $YY$  est assez faible. Ce comportement est dû à la séparation de deux courants contre sens sur la surface libre tout près de l'axe  $YY$ .

À partir de la figure 7.9a, on peut tracer une vue globale de l'écoulement au sein de la zone flottante. On note que la circulation du fluide sur la surface libre n'est plus purement axiale comme dans le cas axisymétrique, une composante de vitesse circonférentielle vient se superposer à celle axiale. À l'endroit noté par "Y", le fluide provenant du côté du disque chaud se divise en deux courants qui se dirigent vers la frontière froide. D'autre part, à l'endroit marqué "X", on assiste à une superposition de deux courants. Dans la région centrale de la section, l'écoulement de retour provenant du côté froid subit aussi une déviation selon la direction  $\theta$ .

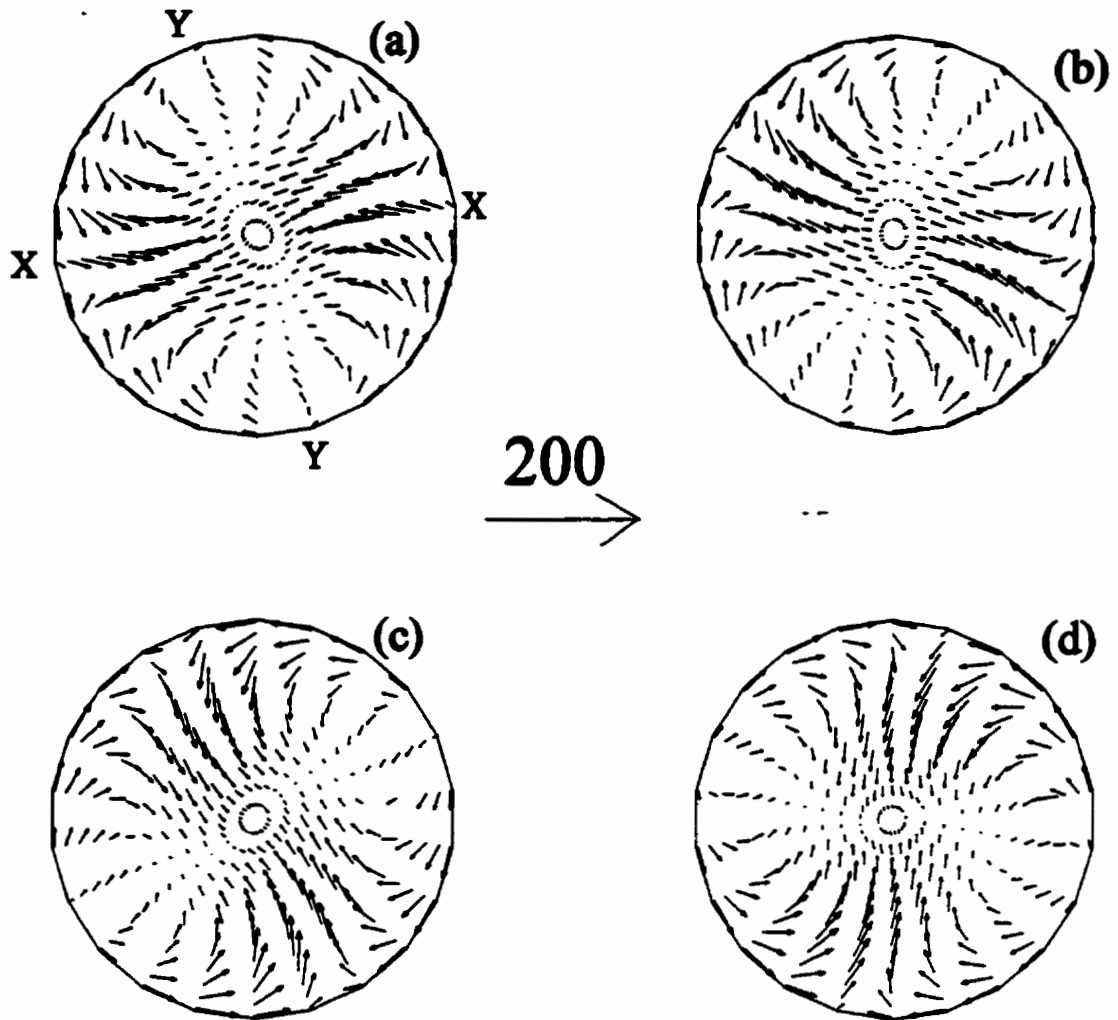


Figure 7.9 Évolution temporelle de la structure de la vitesse transversale à  $Z = 0.5$  pour le cas IV et aux temps  $\tau$ ,  $\tau + \tau_0/4$ ,  $\tau + \tau_0/2$  et  $\tau + 3\tau_0/4$  respectivement

Au fur et à mesure que le temps augmente, la structure de la vitesse transversale observée au figure 7.9a, tourne autour de l'axe principal de la zone dans le sens des aiguilles d'une montre.

Finalement, l'examen des figures 7.7 et 7.9 montre que le fluide sur la surface libre circule de la région chaude vers celle froide. Ce comportement est conforme au mécanisme de la convection thermocapillaire.

### **7.3.6 Mode des instabilités**

Étant donné que les champs hydrodynamique et thermique (obtenus dans le cadre de cette étude) tournent autour de l'axe principal de la zone et vue que l'axe des tourbillons est parallèle aux génératrices de la zone cylindrique, on peut constater que le deuxième mode de l'instabilité (ou le mode symétrique) domine selon la classification de Preisser et al. (1983) et Chun (1984). Ce mode est caractérisé par le fait que la position du centre du vortex dans le plan  $R-\theta$  est symétrique par rapport au point de singularité de la section. Toutefois, pour le premier mode (ou le mode asymétrique), l'axe des tourbillons est incliné par rapport à l'axe principal de la zone et tout le champ d'écoulement tourne lentement autour de ce dernier axe.

Il importe de noter que Preisser et al. (1983) ont effectué une série de mesures expérimentales dans une zone flottante de  $\text{NaNO}_2$  opérant sur terre. Ils ont observé que le premier et le deuxième mode existent respectivement pour  $A < 0.77$  et  $0.71 < A < 1.3$ . Le rapport géométrique considéré dans cette étude,  $A = 0.732$ , est situé dans la zone de transition où les deux modes d'instabilité peuvent exister.

### **7.3.7 Évolution temporelle de la distribution de la température et des lignes de courant sur la surface libre pour $Ma = 12500$**

La figure 7.10, illustre l'évolution temporelle de la distribution de la température sur la surface libre de la zone, à quatre temps différents, durant une période  $\tau_0$ , pour  $Ma = 12500$  (cas IV).

À partir de l'examen de la figure 7.10, on remarque que près de deux disques, les isothermes sont presque des lignes parallèles. Par contre, dans la région centrale, les isothermes se déforment d'une manière considérable. En suivant en particulier l'allure des isothermes 7 et 8 avec le temps, on observe tout d'abord la forme ondulée de ces isothermes qui crée une alternance des régions froide et chaude selon  $\theta$ . Cette alternance donne naissance à un gradient de température non-nul selon la direction circonférentielle. En deuxième lieu, on peut constater clairement la présence d'une onde thermique qui se propage périodiquement dans le temps selon la direction circonférentielle. L'existence de cette onde thermique a été démontré expérimentalement par Schwabe et Scharmann (1983). En effet, la figure 7.11a montre la distribution de la température sur la surface libre telle que schématisée par Schwabe et Scharmann pour une zone flottante de  $\text{NaNO}_2$  ( $Ma \approx 10000$ ). En comparant les différentes composantes de la figure 7.10 à la figure 7.11a, on peut déduire que la structure des isothermes obtenue numériquement est complexe. En effet, on peut constater que la concavité des isothermes, dans la partie centrale, change quatre fois comparé à deux fois dans les expériences de Schwabe et Scharmann (1983). Cette différence peut être attribuée au fait que ces chercheurs ont effectué leurs expériences sur terre et le rapport géométrique de la zone flottante est supérieur à 1.5. En 1-g, la déformation de la surface est importante et les effets de la convection naturelle s'opposent aux effets de la convection



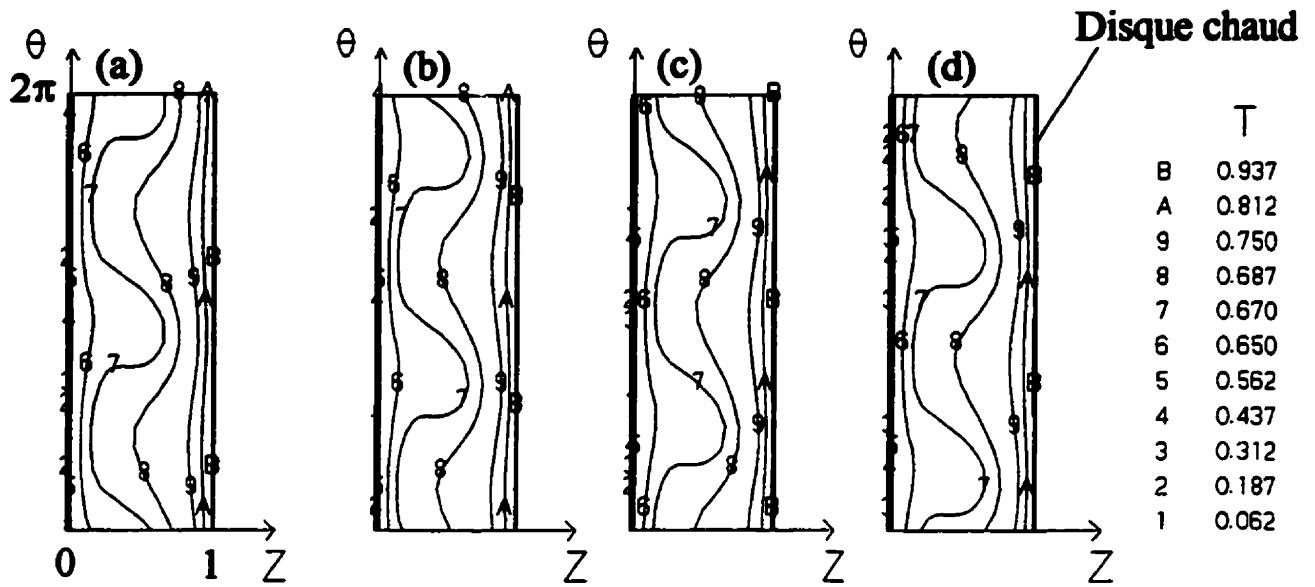


Figure 7.10 Évolution temporelle de la distribution de la température sur la surface libre pour le cas IV et aux temps  $\tau$ ,  $\tau + \tau_0 / 4$ ,  $\tau + \tau_0 / 2$  et  $\tau + 3 \tau_0 / 4$  respectivement

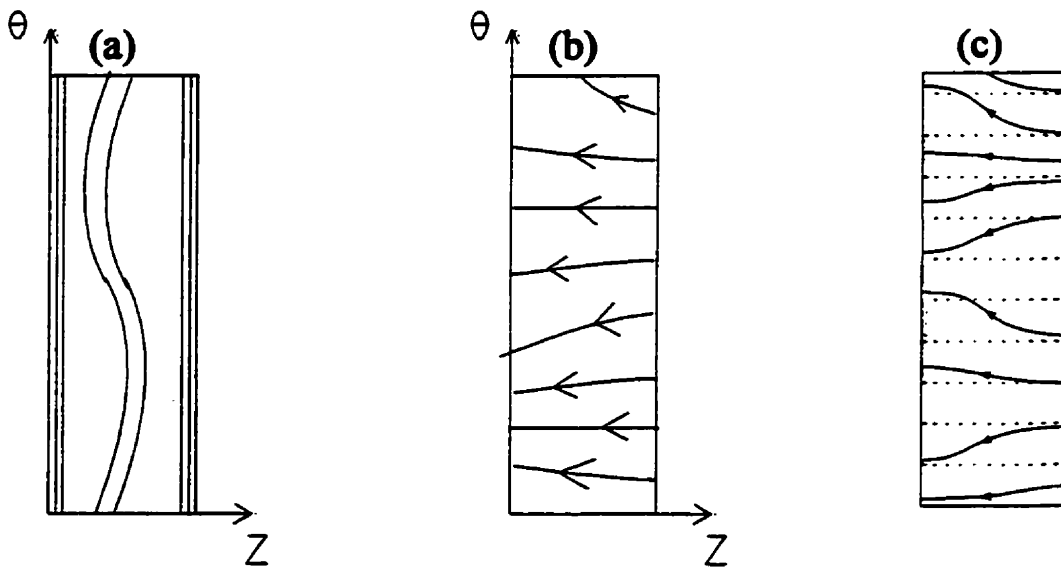


Figure 7.11 a, b) Structure des isothermes et des lignes de courant sur la surface libre de la zone telle que schématisée par Schwabe et Scharmann (1983), c) Solution numérique des lignes de courant pour le cas IV et au temps  $\tau$

thermocapillaire. Rappelons que pour tous les cas tridimensionnels simulés dans cette étude, on a considéré une zone flottante de  $\text{NaNO}_2$ , opérant en  $\mu\text{-g}$  et le rapport géométrique est fixé à 0.732.

D'autre part, il importe de noter que Savino et Monti (1996) ont prouvé numériquement que sous l'influence de la propagation d'une onde qui se propage dans une zone flottante des huiles de Silicone ( $Pr = 30, 74$ ), les champs thermique et hydrodynamique tournent périodiquement dans le temps autour de l'axe du cylindre.

La figure 7.11c illustre la structure des lignes de courant sur la surface libre de la zone pour le temps  $\tau$  et  $Ma = 12500$ . Notons que les isothermes de la figure 7.10a et les lignes de courant de la figure 7.11c correspondent exactement au même temps  $\tau$ .

Il est intéressant de mentionner que pour  $Ma < 12500$  (cas I, II, III et VI), les lignes de courant sont des lignes parallèles (écoulement purement axial) et elles se dirigent du côté du disque chaud vers celui du disque froid. Cependant pour  $Ma = 12500$  (Fig. 7.11c), les lignes de courant sur la surface libre sont courbées. Cette déformation des lignes de courant est due à la présence des gradients de température selon la direction  $\theta$  (Fig.7.10a) sur la surface libre. Ces gradients engendrent une composante de vitesse  $V_\theta$ . Il importe de noter que la circulation du fluide sur la surface libre, pour le cas IV, respecte le mécanisme de la convection thermocapillaire.

Les discussions déjà présentées pour expliquer l'écart entre nos résultats numériques et les résultats expérimentaux de Schwabe et Scharmann (1983) pour la distribution de la température sur la surface libre restent valables pour le cas des lignes de courant sur la surface libre.

## **7.4 ÉVOLUTION TEMPORELLE DE LA TEMPÉRATURE D'UN POINT SITUÉ SUR LA SURFACE LIBRE POUR LES CAS IV ET VII, $Ma = 12500$**

La figure 7.12 illustre l'évolution temporelle de la température d'un point particulier ( $Z = 0.5, \theta = 180^\circ$ ) situé sur la surface libre de la zone pour les cas IV et VII ( $Ma = 12500$ ). Rappelons que le cas VII est caractérisé par une pente de chauffage relativement douce ( $dt_1 / dt = 5 \text{ }^\circ\text{C} / \text{min}$ ). Les conditions initiales du cas VII correspondent à la solution axisymétrique du cas VI ( $Ma = 12000$ ). Par contre, le cas IV est caractérisé par une pente de chauffage relativement élevée ( $dt_1 / dt = 40 \text{ }^\circ\text{C} / \text{min}$ ).

Il est intéressant de mentionner que le nombre de Marangoni critique de la transition axisymétrique / oscillatoire ne varie pas d'une manière significative avec les valeurs de  $dt_1 / dt$  considérées dans cette étude. D'autre part, en examinant la figure 7.12, on peut constater que le début des oscillations est retardé en diminuant la pente de chauffage. En effet, pour le cas VII, les oscillations de la température sont détectées sur le palier (lorsque la différence de température entre les deux disques devient constante). En outre, pour le cas IV, la naissance des oscillations a eu lieu durant le processus du chauffage du disque no.1.

Cependant, il importe de noter que la structure de l'écoulement (lorsque le régime oscillatoire est pleinement établi) semble posséder des caractéristiques communes qui sont propres à la valeur du nombre de Marangoni considérée. Par exemple, les deux profils de température illustrés à la figure 7.12 ont la même fréquence (0.4 Hz) et la même valeur moyenne. Le fait d'avoir la même valeur moyenne de température indique que l'écoulement qui correspond à l'état d'équilibre, est le même pour les cas IV et VII. Cependant, les déviations par rapport à cet état d'équilibre, qui sont dues à l'instabilité, peuvent être

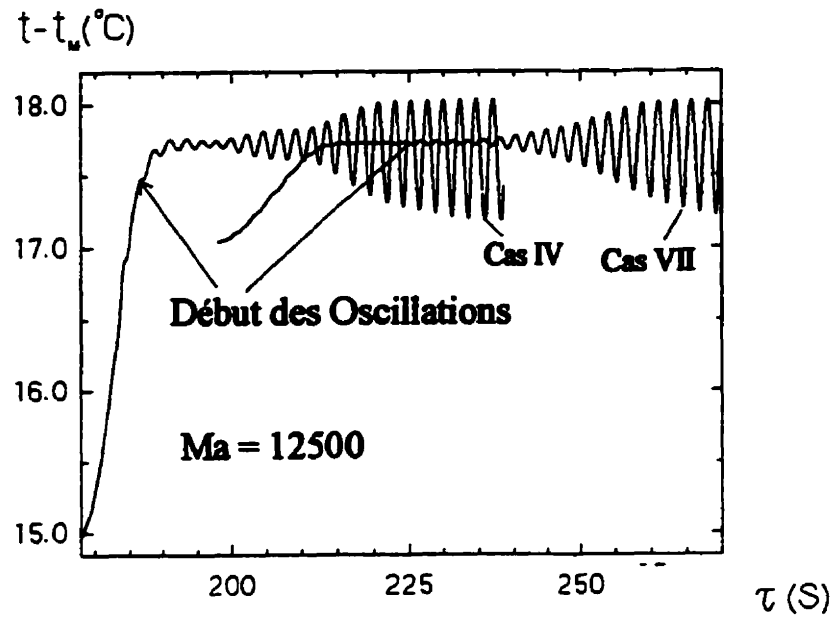


Figure 7.12 Évolution temporelle de la température d'un point particulier situé sur la surface libre pour les cas IV et VII

différentes et elles dépendent de la manière selon laquelle les perturbations s'amplifient au sein de la zone.

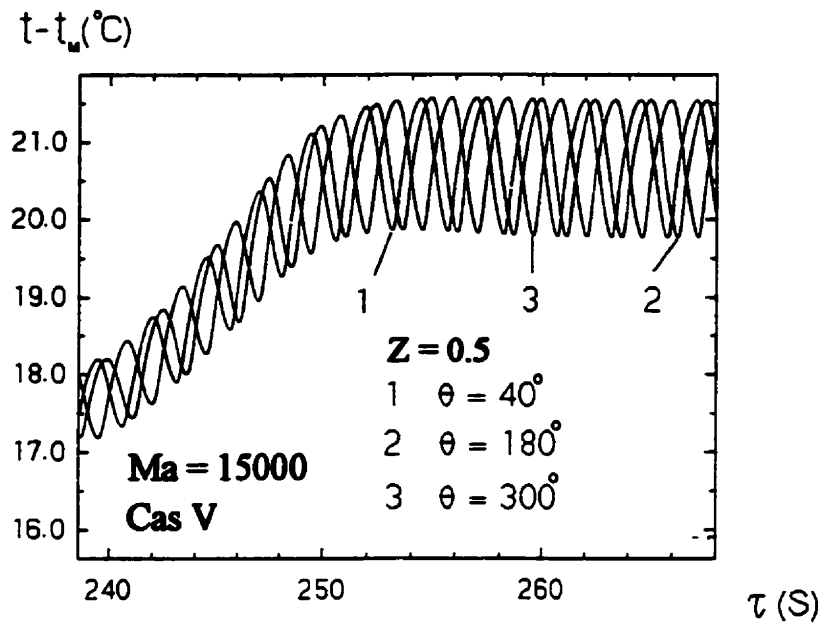
Nos récentes études ont démontré que le nombre de Marangoni critique décroît en diminuant la pente de chauffage du disque no.1. Ainsi,  $Ma_c$  est de l'ordre de 10500 pour  $dt/dt = 15$  °C/min. Ce même comportement a été observé par Savino et Monti (1996) qui ont étudié l'influence de la pente de chauffage d'une zone flottante d'huile de Silicone sur la transition axisymétrique / oscillatoire. Ils ont montré que pour des faibles pentes de chauffage, la valeur de  $Ma_c$  se rapproche de celle obtenue à l'aide de la théorie de la stabilité linéaire.

## **7.5 STRUCTURE DE L'ÉCOULEMENT ET DU CHAMP THERMIQUE POUR $Ma = 15000$**

Pour des nombres de Marangoni relativement élevés, soit  $Ma = 15000$  (cas V), les effets de l'instabilité sur les champs thermique et hydrodynamique deviennent plus prononcés comparés au cas où  $Ma = 12500$ . Dans ce qui suit, on présente l'évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre ainsi que la structure des isothermes et de la vitesse transversale dans le plan  $R-\theta$  à  $Z = 0.5$  et finalement, la structure des isothermes sur la surface libre de la zone.

### **7.5.1 Évolution temporelle de la température de trois points particuliers sur la surface libre, $Ma = 15000$ (cas V)**

La figure 7.13 montre l'évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre de la zone pour  $Ma = 15000$  (cas V). Rappelons que les conditions initiales du cas V correspondent à l'écoulement oscillatoire simulé au cas IV.



**Figure 7.13 Évolution temporelle de la température de trois points situés sur la surface libre pour le cas V**

L'examen de cette dernière figure nous permet de constater que les perturbations de température sont plus prononcées que celles observées aux cas IV et VII ( $Ma = 12500$ ). En effet, pendant le processus de chauffage du disque no.1, l'amplitude crête à crête augmente. Une fois que le régime oscillatoire est développé, on remarque que cette amplitude est de l'ordre de  $1.75\text{ }^{\circ}\text{C}$  comparée à  $0.83\text{ }^{\circ}\text{C}$  pour le cas IV. Il est à signaler que la fréquence des oscillations reste identique à celle des cas étudiés auparavant, soit  $0.4\text{ Hz}$ .

### **7.5.2 Structure des isothermes et de la vitesse transversale dans le plan $R-\theta$ à $Z = 0.5$ et la structure des isothermes sur la surface libre pour $Ma = 15000$ (cas V)**

Les figures 7.14a et b montrent la structure des isothermes et de la vitesse transversale au milieu de la zone telle qu'obtenue à  $\tau = 275\text{ s}$  (lorsque le régime oscillatoire est pleinement établi) pour  $Ma = 15000$ .

À partir de la figure 7.14a, on observe que la forme des isothermes (en particulier, les isothermes 5, 6 et 7) est considérablement déformée comparée au cas où  $Ma = 12500$  (Fig.7.7). Ce comportement est attribué au fait que les effets des instabilités, pour le cas caractérisé par  $Ma = 15000$ , sont plus importants. D'autre part, on note une alternance des régions froide et chaude (délimitée par l'isotherme 9) sur la surface libre selon la direction circonférentielle.

La distribution de la vitesse transversale pour  $Ma = 15000$  (Fig. 7.14b) est similaire à celle observée pour le cas où  $Ma = 12500$  (Fig. 7.9). Cependant, il faudra noter la différence suivante: pour  $Ma = 15000$ , la déviation de l'écoulement par rapport à l'écoulement purement axial est plus prononcée que celle observée pour le cas caractérisé par  $Ma = 12500$ . Ce comportement est dû à l'amplification des effets de l'instabilité pour  $Ma = 15000$ . Notons aussi que les figures 7.9 et 7.14b sont dessinées à la même échelle.

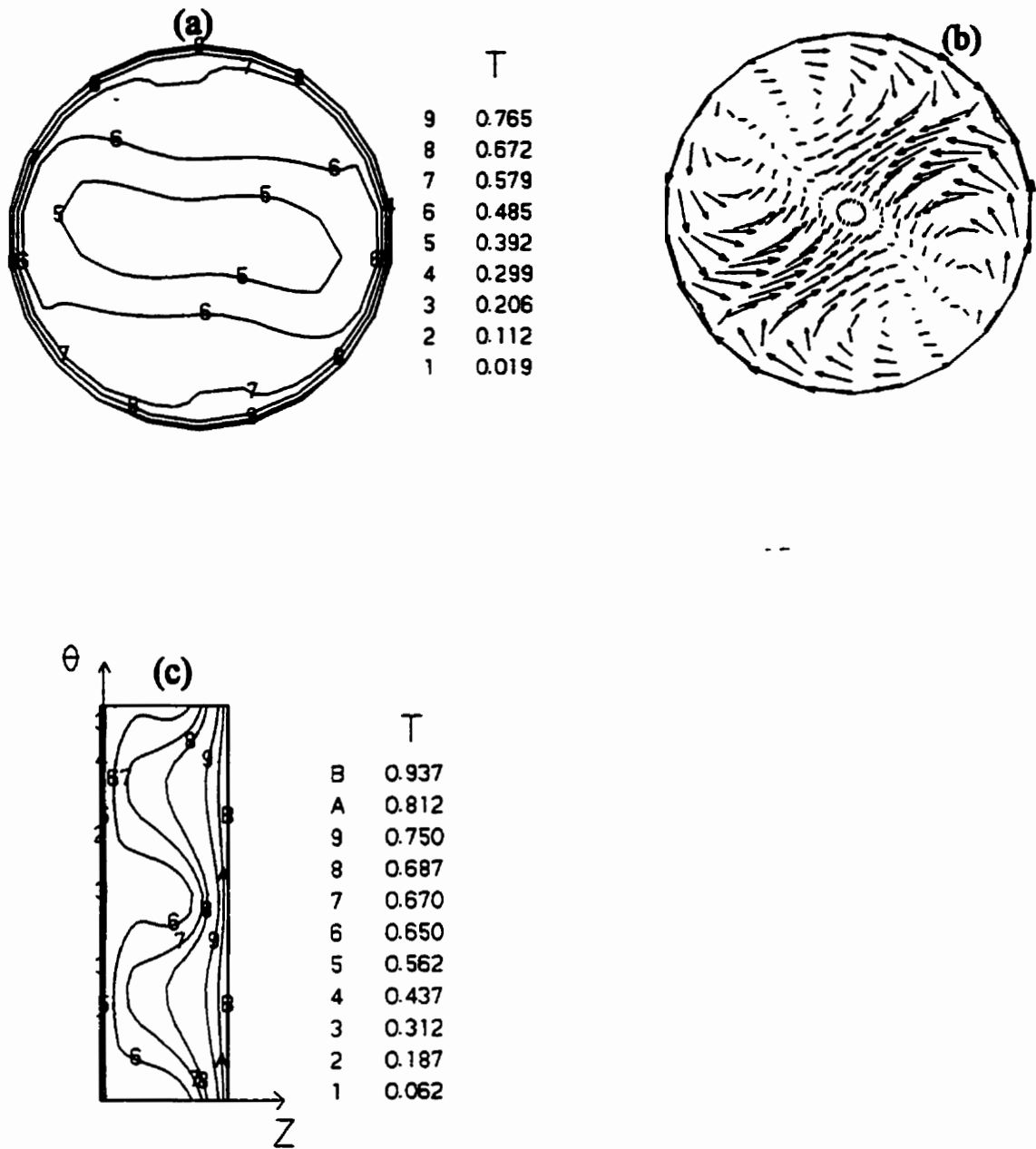


Figure 7.14 a) Structure des isothermes à  $Z = 0.5$ , b) Structure de la vitesse transversale à  $Z = 0.5$ , c) Structure des isothermes sur la surface libre de la zone pour  $Ma = 15000$



D'autre part, en comparant les figures 7.14a et 7.14b, on peut remarquer que le fluide, sur la surface libre de la zone, circule du côté chaud vers celui froid selon la direction  $\theta$ . Ce comportement est tout à fait en accord avec le mécanisme de la convection thermocapillaire.

La figure 7.14c illustre la structure des isothermes sur la surface libre de la zone pour  $Ma = 15000$ . En premier lieu, on observe que dans la région adjacente aux deux disques, les isothermes sont presque parallèles. Tandis que dans la partie centrale de la zone, on assiste à une déformation drastique des isothermes et qui est plus importante que celle observée pour le cas où  $Ma = 12500$  comme on l'a déjà observé en examinant la figure 7.10.

## **7.6 ORIGINE DES INSTABILITÉS**

À partir de l'analyse des résultats présentés aux paragraphes précédents, il faut retenir que la circulation du fluide sur la surface libre, en particulier celle selon la direction circonférentielle, est conforme au mécanisme de la convection thermocapillaire. On peut conclure que les perturbations, qui sont à l'origine des oscillations des champs thermique et d'écoulement, sont d'une nature thermique. En effet, sous l'influence d'une onde thermique (Fig. 7.10) qui se propage périodiquement dans le temps sur la surface libre, les champs thermique et hydrodynamique tournent autour de l'axe principal de la zone.

Dans ce qui suit, on expliquera le mécanisme physique régissant les instabilités de la convection thermocapillaire. L'origine de ces instabilités est due à l'amplification des perturbations de la température sur la surface libre de la zone. Une telle perturbation de la température cause la fluctuation des gradients circonférentiels de température, ce qui engendre à son tour une perturbation de gradient de la tension superficielle. Cette perturbation de la tension superficielle conduit à son tour à la distorsion du champ de vitesse qui sera responsable de la distorsion du champ thermique au sein de la zone flottante et particulièrement sur la surface libre de la zone.

L'amplification ou l'amortissement des perturbations de la température sur la surface libre dépend du rapport de transfert de chaleur par convection thermocapillaire à celui de la diffusion, en d'autres termes du nombre de Marangoni. Il importe de noter que la viscosité et la conductivité ont des effets bénéfiques sur l'amortissement des perturbations. Selon Chun et Schwabe (1982), si le nombre de Marangoni dépasse un certain seuil critique  $Ma_{\sigma}^u$  ( $Ma_{\sigma}^u = 12500$  pour le rapport géométrique considéré dans cette étude), les perturbations de la température peuvent s'amplifier étant donné que les effets stabilisateurs de la viscosité et de la conductivité deviennent faibles et insuffisants comparés à ceux de la convection thermocapillaire. Ainsi, pour des valeurs élevées du nombre de Marangoni, l'écoulement est, en général, plus vulnérable à l'amplification des perturbations et par conséquent, les effets de l'instabilité sur le champ de l'écoulement et le champ thermique deviennent plus importants. Les résultats montrés aux figures 7.13 et 7.14 concernant le cas V ( $\bar{Ma} = 15000$ ) confirment cette dernière hypothèse.

Par ailleurs, il importe de noter qu'Ostrach et al. (1985) ont attribué la transition axisymétrique / oscillatoire au retard en réponse entre l'écoulement thermocapillaire superficielle et l'écoulement de retour provenant de l'intérieur de la zone. Selon Kamotani et al. (1984), l'existence d'une très mince couche limite thermique le long de la surface libre pourrait être une cause possible d'une telle transition axisymétrique / oscillatoire.

## 7.7 COMPARAISON AVEC LES RÉSULTATS ANTÉRIEURS

Le tableau 7.3 montre une comparaison entre les valeurs du nombre de  $Ma_{\sigma}^u$  et de la fréquence obtenues dans le cadre de cette étude avec celles des travaux expérimentaux et numériques existant.

En ce qui concerne la fréquence, la concordance de nos résultats avec les données expérimentales de Schwabe et Scharmann (1984) et les résultats numériques de Rupp et al. (1989) peut être qualifiée de satisfaisante. Cependant, il existe un certain écart entre la valeur

du  $Ma_c^u$  obtenue numériquement et celle trouvée expérimentalement en  $\mu$ -g. Cette différence peut être attribuée à plusieurs facteurs. En premier lieu, il existe une différence dans la façon utilisée pour déterminer ce nombre de Marangoni critique. En effet, dans ce travail,  $Ma_c^u$  correspond à un cas spécifique où les oscillations sont détectées directement à partir du tracé de la distribution temporelle de la température de points particuliers situés sur la surface libre. Il est à rappeler que l'amplitude des oscillations est égale à  $0.83^\circ\text{C}$  pour  $Ma_c^u = 12500$ . Expérimentalement, Schwabe et Scharmann (1984) et Preisser et al. (1983) ont déterminé le  $Ma_c^u$  en extrapolant l'amplitude des oscillations versus  $Ma$ : le nombre de Marangoni critique est caractérisé par une amplitude pratiquement nulle. D'autre part, il convient de noter que lors des expériences, l'amplitude des oscillations a été mesurée durant le processus du chauffage de la zone. En second lieu, dans la plupart des installations expérimentales, on ne peut pas s'assurer que le champ thermique est symétrique au début des essais. Comme conséquence possible, selon Rupp et al. (1989), la transition axisymétrique / oscillatoire peut se produire à une valeur de  $Ma$  relativement faible. Ensuite, les propriétés physiques des substances liquides utilisées ne sont pas connues d'une manière très précise. Ceci peut engendrer, selon Rupp et al. (1989), une différence appréciable pouvant aller jusqu'à 20 % entre la valeur de  $Ma_c^u$  calculée numériquement et celle observée expérimentalement.

Il importe aussi de remarquer, à partir du tableau 7.3, que la valeur de  $Ma_c^u$  sur terre (selon Schwabe et Scharmann, 1984) est plus faible que celle obtenue en  $\mu$ -g. Ce comportement peut être attribué au fait que la déformation de la surface libre sur terre est beaucoup plus importante que celle observée en milieu microgravitationnel. Cette déformation de la surface libre en 1-g peut aboutir à l'amplification des perturbations et par conséquent la transition axisymétrique / oscillatoire aura lieu à un niveau de  $Ma_c^u$  relativement plus faible.

**Tableau 7.3 Comparaison avec les résultats antérieurs pour le  $\text{NaNO}_3$**

	(1)	(2)	(3)		(4)	(5)
	$\mu\text{-g}$	$\mu\text{-g}$	$\mu\text{-g}$	l-g	$\mu\text{-g}$	l-g
$\text{Ma}_w$	12500	11633	$9444 \pm 250$	$8907 \pm 150$	9000	8000
Fréquence (Hz)	0.4	0.56	0.48	0.51	0.5	0.57
$dt / d\tau$	40,	-	0.21	0.21	6	0.1
$^\circ\text{C} / \text{min.}$	5					

(1) Résultats numériques (Pr = 8.9)

(2) Résultats numériques de Rupp et al. (1989), Pr = 8.9

(3) Mesures expérimentales de Schwabe et Scharmann, 1984 (Pr = 9.2)

(4) Mesures expérimentales de Schwabe et Scharmann, 1983 (Pr = 9.2)

(5) Mesures expérimentales de Preisser et al. (1983), Pr = 8.9

## **7.8 TRANSITION OSCILLATOIRE / AXISYMETRIQUE, LE PHENOMENE DE L'HYSTERESIS**

Dans le cadre de ce travail, on s'est intéressé à étudier la transition inverse i.e. la transition oscillatoire / axisymétrique durant le processus de refroidissement du disque no.1 (disque chaud). Le phénomène de l'hystérésis a été bel et bien démontré, expérimentalement, par Schwabe et Scharmann (1984).

### **7.8.1 Évolution temporelle de la température du disque chaud durant son refroidissement**

La figure 7.15 présente l'évolution temporelle de la température du disque no.1 durant le processus de refroidissement pour deux chemins différents.

Notons que pour les deux chemins, on part de la même origine, le point 1. Ce dernier point correspond au cas IV et à  $\tau = 238.5$  s où l'écoulement oscillatoire est pleinement établi.

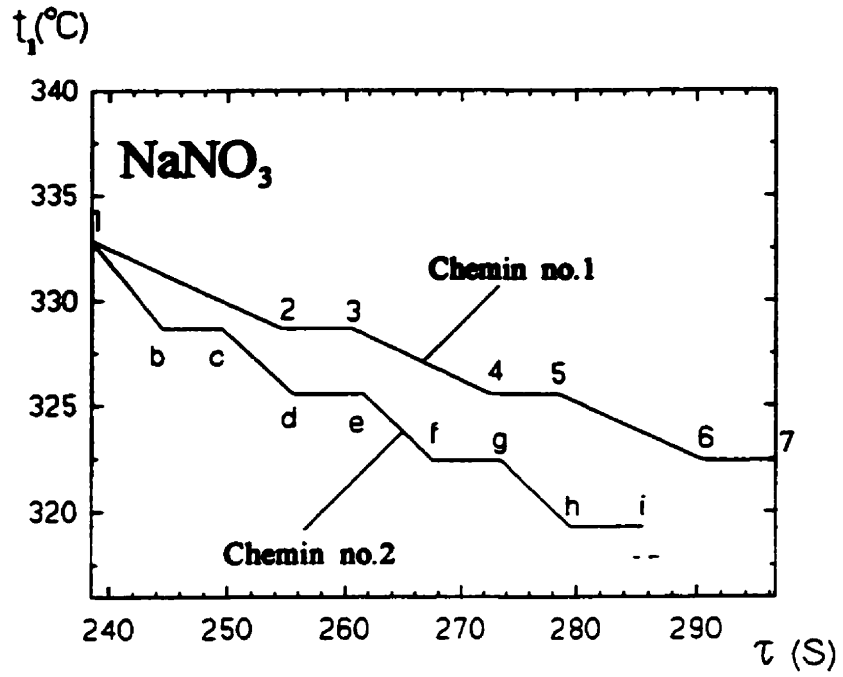


Figure 7.15 Évolution temporelle de la température du disque no.1 pour deux chemins de refroidissement

Il importe de mentionner que pour le chemin (1-b-c-d-e-f-g-h-i) ou le chemin de refroidissement no.2, le taux temporel du refroidissement du disque chaud adopté est le même que celui utilisé durant le processus du chauffage du disque no.1. Cependant, selon le chemin (1-2-3-4-5-6-7) ou le chemin de refroidissement no.1,  $dt_i / d\tau$  est fixé à  $-15^\circ\text{C} / \text{min}$ . Il convient de signaler finalement que le tableau 7.4 résume les valeurs de  $dt_i / d\tau$  imposées et la nature de l'écoulement observée pour les différents cas testés.

Tableau 7.4 Cas simulés pour le refroidissement du disque no. 1 ( $A = 0.732$ )

Cas	Profil de température	$dt_i / d\tau$ ( $^\circ\text{C} / \text{min}$ .)	Ma	Structure de l'écoulement
A	(1-2-3)	-15	10500	Oscillatoire
B	(3-4-5)	-15	9000	Oscillatoire
C	(5-6-7)	-15	7500	Axisymétrique
D	(1-b-c)	-40	10500	Oscillatoire
E	(c-d-e)	-30	9000	Oscillatoire
F	(e-f-g)	-30	7500	Oscillatoire
G	(g-h-i)	-30	6000	Axisymétrique

### 7.8.2 Évolution temporelle de la distribution de la température de trois points situés sur la surface libre

Les figures 7.16 et 7.17 illustrent l'évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre, respectivement pour les chemins de refroidissement no.1 (cas A, B et C) et no.2 (cas D, E, F et G).

On observe tout d'abord que l'amplitude crête à crête de la température décroît avec la diminution de l'écart de température  $\Delta T$  entre les deux disques. En effet, pour le chemin de refroidissement no.1 ( $dt_i / d\tau = -15^\circ\text{C} / \text{min}$ ), l'amplitude crête à crête passe, respectivement

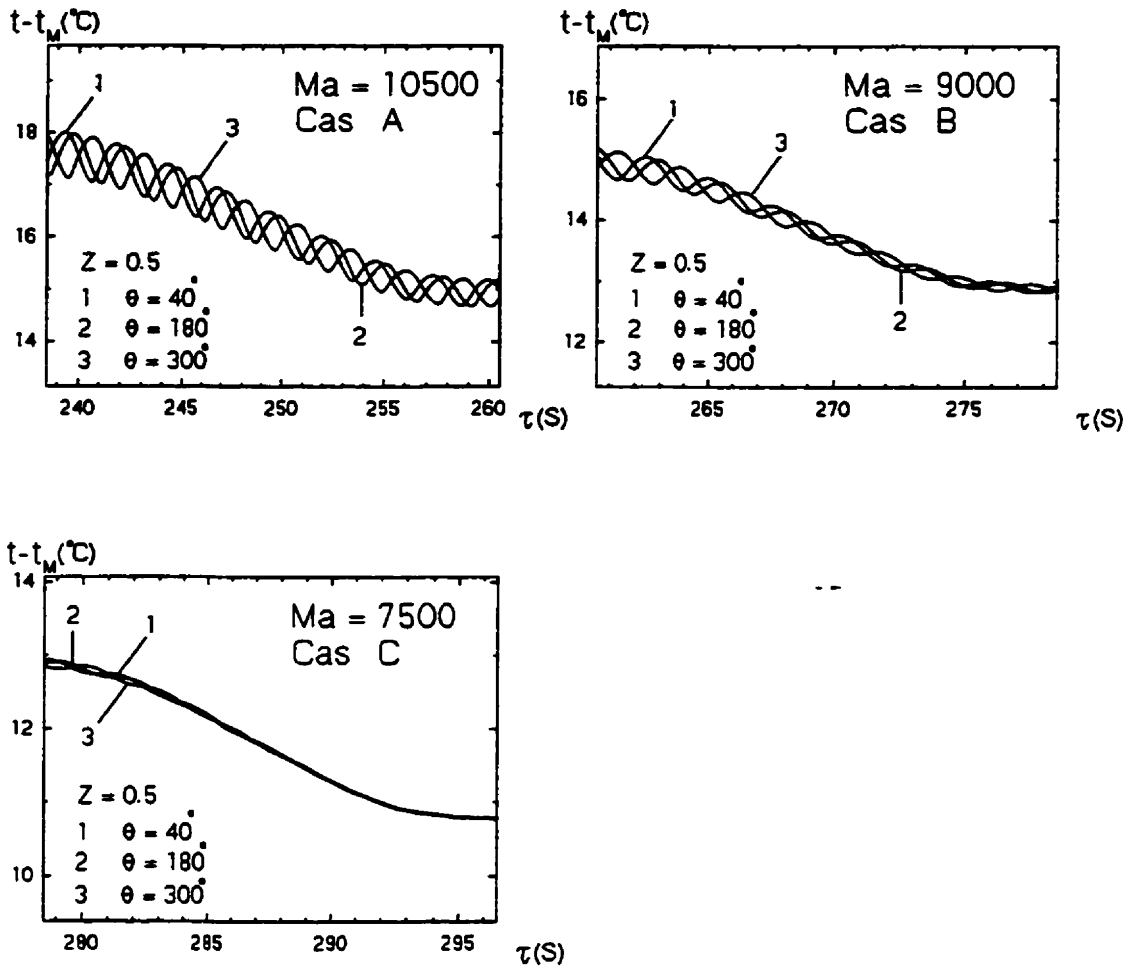
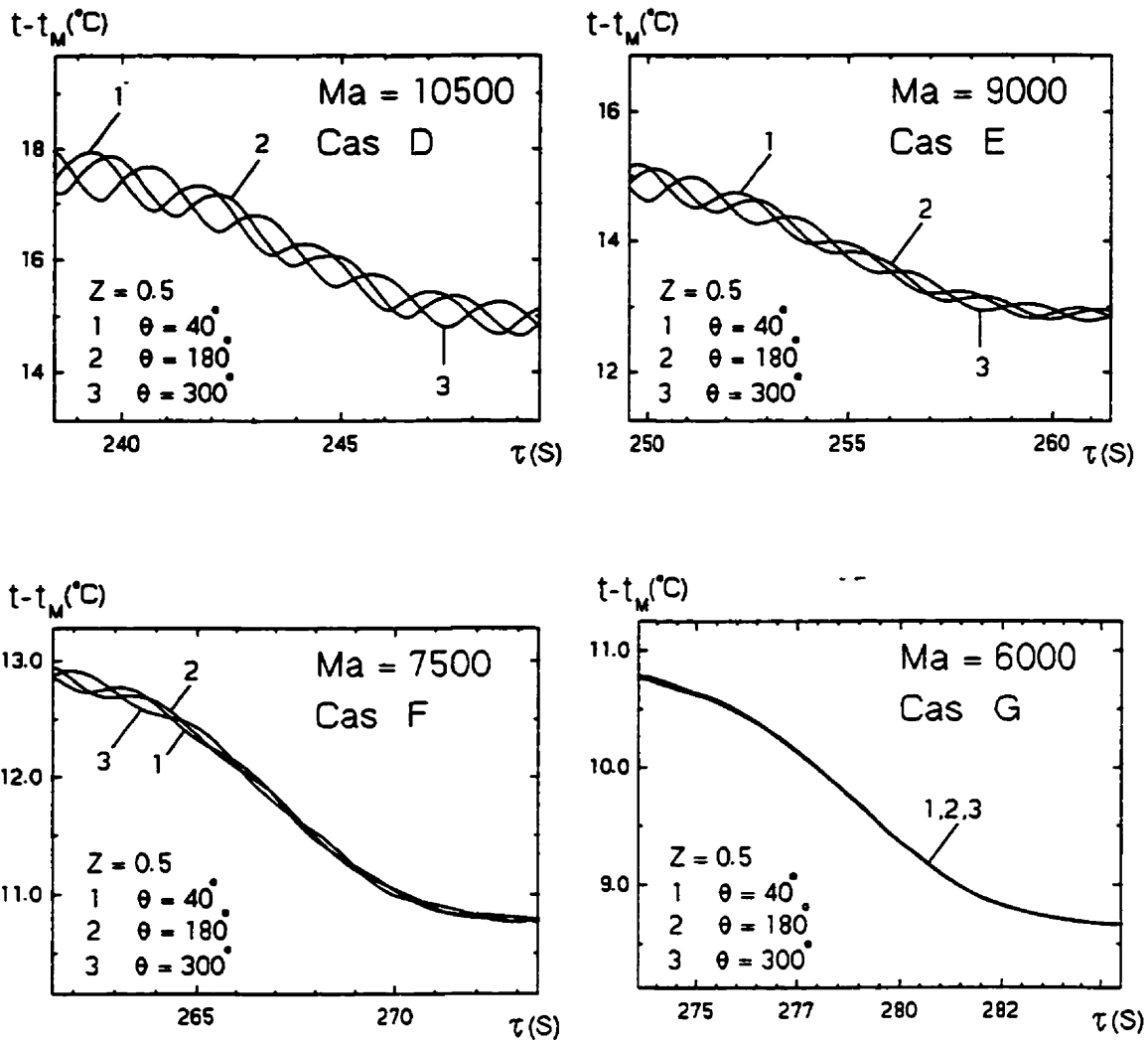


Figure 7.16 Évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre (cas A, B et C)



**Figure 7.17** Évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre (cas D, E, F et G)



pour  $Ma = 12500, 10500$  et  $9000$ , de  $0.83\text{ °C}$  à  $0.52\text{ °C}$  et à  $0.1\text{ °C}$ . Alors, pour le chemin de refroidissement no.2, cette amplitude décroît de  $0.83\text{ °C}$ , à  $0.45\text{ °C}$ , à  $0.26\text{ °C}$  et à  $0.11\text{ °C}$  quand  $Ma$  diminue respectivement de  $12500$ , à  $10500$ , à  $9000$  et à  $7500$ . Ce comportement s'explique comme suit: en diminuant le nombre de Marangoni, les effets stabilisateurs de la diffusion deviennent importants par rapport à ceux de la convection et par conséquent on assiste à un amortissement des perturbations. Le tableau 7.5 résume les valeurs de l'amplitude crête à crête pour les deux chemins de refroidissement du disque chaud. Il importe de noter que la fréquence des oscillations reste toujours égale à  $0.4\text{ Hz}$ .

Tableau 7.5 Amplitude crête à crête pour deux chemins différents de refroidissement du disque no.1

Conditions initiales Amplitude crête à crête = $0.83\text{ °C}$			Ma = 12500	
Case	Amplitude crête à crête $\text{°C}$		Case	Ma
A	0.52	0.45	D	10500
B	0.10	0.26	E	9000
C	Axisym. $\approx 0$	0.11	F	7500
		Axisym. $\approx 0$	G	6000

En examinant la figure 7.16, on peut constater que les oscillations de température disparaissent complètement pour  $Ma = 7500$ , cas C. Pour ce cas, les profils de température de trois points particuliers situés sur la surface libre de la zone sont identiques, ce qui indique que l'écoulement axisymétrique est rétabli. Donc,  $Ma_c^L = 7500$  est le nombre de Marangoni critique de la transition oscillatoire / axisymétrique pour le chemin de refroidissement no.1 ( $dt_f / dt = -15\text{ °C / min}$ ).

La figure 7.17 révèle que la structure axisymétrique de l'écoulement est rétablie pour  $Ma = 6000$ , cas G pour lequel les profils de température des points localisés sur la surface

libre sont confondus. On peut donc déclarer que  $Ma_q^L = 6000$  est le nombre de Marangoni critique de la transition oscillatoire / axisymétrique pour le chemin de refroidissement no. 2.

On peut conclure que  $Ma_q^L$  n'est pas unique, il dépend du taux temporel de refroidissement du disque chaud. En effet,  $Ma_q^L$  augmente avec la diminution de  $|dt_c / dt_c|$ . Ce comportement peut être expliqué par le fait suivant: un refroidissement plus rapide du disque no.1 signifie que le temps alloué aux effets stabilisateurs de diffusion pour vaincre les instabilités de l'écoulement oscillatoire est plus court. Par conséquent, les perturbations persistent plus longtemps. Ainsi, pour le chemin de refroidissement no.1 ( $dt_c / dt_c = -15$  °C / min), les oscillations disparaissent pour  $Ma_q^L = 7500$ . Tandis que pour le chemin de refroidissement no. 2, le nombre de Marangoni de la transition oscillatoire / axisymétrique est égale à 6000.

- Discussions sur le phénomène de l'hystérésis

Le phénomène de l'hystérésis observé est dû essentiellement aux effets de l'inertie du matériau en fusion. Ces effets, qui sont présents dans le transfert de chaleur et de la quantité de mouvement, résultent en un retard en réponse des champs thermique et hydrodynamique correspondant au changement des conditions limites thermiques de la zone. D'autre part, la nature non-linéaire du couplage entre la température et la vitesse conduit à une variation complexe des effets de la convection thermocapillaire ainsi que ceux de la diffusion. La combinaison de ces effets peut affecter d'une façon importante la croissance ou l'amplification des perturbations thermiques, qui sont à l'origine de l'apparition du régime oscillatoire.

### 7.8.3 Comparaison avec les données expérimentales

Rappelons que le nombre de  $Ma_q^U$  est de l'ordre de 12500. Alors  $Ma_q^L$  est compris entre 6000 et 7500. On peut donc confirmer l'existence du phénomène de l'hystérésis. Pour  $Ma_q^L \leq Ma \leq Ma_q^U$ , les états axisymétrique et oscillatoire peuvent exister selon le type de

transfert de chaleur, soit le chauffage ou le refroidissement du disque no.1. La comparaison des résultats numériques avec les données expérimentales de Schwabe et Scharmann (1984) s'avère satisfaisante. Cette comparaison est basée sur l'intervalle du paramètre  $Ma$  où le phénomène de l'hystérésis peut prendre naissance. On trouve:

$$8340 \leq Ma \leq 9444, dt_1 / d\tau = - 0.43 \text{ }^\circ\text{C} / \text{min (Schwabe et Scharmann, 1984)}$$

$$7500 \leq Ma \leq 12500, dt_1 / d\tau = - 15 \text{ }^\circ\text{C} / \text{min (résultats numériques)}$$

$$6000 \leq Ma \leq 12500, dt_1 / d\tau = - 30 \text{ }^\circ\text{C} / \text{min (résultats numériques)}$$

En ce qui concerne  $Ma_c^L$ , la concordance expérimentale / numérique peut être qualifiée comme acceptable malgré qu'on n'utilise pas la même valeur de  $|dt_1 / d\tau|$ . En se basant sur l'allure de  $Ma_c^L$  versus  $|dt_1 / d\tau|$ , on peut prédire qu'en diminuant davantage le taux temporel de refroidissement du disque no.1,  $Ma_c^L$  sera plus proche de la valeur de  $Ma_c^L = 8340$  déterminée expérimentalement par Schwabe et Scharmann (1984).

## 7.9 CONCLUSION

Au terme de ce chapitre, nous avons présenté et analysé la transition axisymétrique / oscillatoire et la transition inverse au sein d'une zone flottante de  $\text{NaNO}_2$ . Il est intéressant de noter:

- Pour  $Ma < 12500$ , la structure de l'écoulement et du champ thermique est parfaitement axisymétrique.
- $Ma_c^U = 12500$  est le nombre de Marangoni critique qui correspond à la transition axisymétrique / oscillatoire.
- Sous l'influence d'une onde thermique qui se propage sur la surface libre de la zone flottante, les champs hydrodynamique et thermique tournent autour de l'axe principal de la zone.

- Le phénomène de l'hystérésis a été démontré. Il a été observé que pour  $Ma_c^L \leq Ma \leq Ma_c^U$ , les états axisymétrique et oscillatoire peuvent exister selon le type de transfert de chaleur, soit le chauffage ou soit le refroidissement de la zone.  $Ma_c^L$  dépend du taux temporel de refroidissement du disque no.1.

## CHAPITRE 8

### RÉSULTATS OBTENUS EN 3D POUR LE SILICONE

Dans le cadre de ce chapitre, on présente l'évolution transitoire d'une zone flottante opérant en  $\mu$ -g avec le Silicone ( $Pr = 0.016$ ) comme fluide. Le rapport géométrique est fixé à 0.7 qui correspond aux dimensions suivantes de la zone:  $H \approx 4$  mm et  $R_0 \approx 3$  mm. On s'intéresse à l'évaluation du nombre de Marangoni critique,  $Ma_c^1$ , pour lequel la transition axisymétrique / 3D permanent a lieu. On détermine également le second nombre de Marangoni critique,  $Ma_c^2$  qui correspond à la transition 3D stationnaire / oscillatoire.

#### 8.1 ÉVOLUTION TEMPORELLE DE LA TEMPÉRATURE DU DISQUE CHAUD

La figure 8.1 montre la distribution temporelle de la température du disque chaud et résume la nature de l'écoulement pour les différents cas testés.

Pour chaque cas étudié, les conditions initiales correspondent à l'état du repos total de la zone où le liquide est à sa température de fusion  $t_r$ . Le choix d'avoir la même origine de départ, a été motivé par le fait que l'écart de température entre les deux disques pour le Silicone est faible (par exemple, pour le cas caractérisé par  $Ma = 128$ ,  $\Delta T = 2$  °C comparé à un écart de température de l'ordre de 26 °C ( $Ma = 12500$ ) pour le cas de  $NaNO_2$ ). Par conséquent, le temps de calcul est relativement court.

Pour chaque cas simulé, la température du disque chaud varie linéairement en fonction de temps ( $dt_1 / dt = 2$  °C / min) et puis demeure constante pour un certain intervalle de temps afin que l'écoulement se développe. Finalement, signalons qu'en se basant sur les

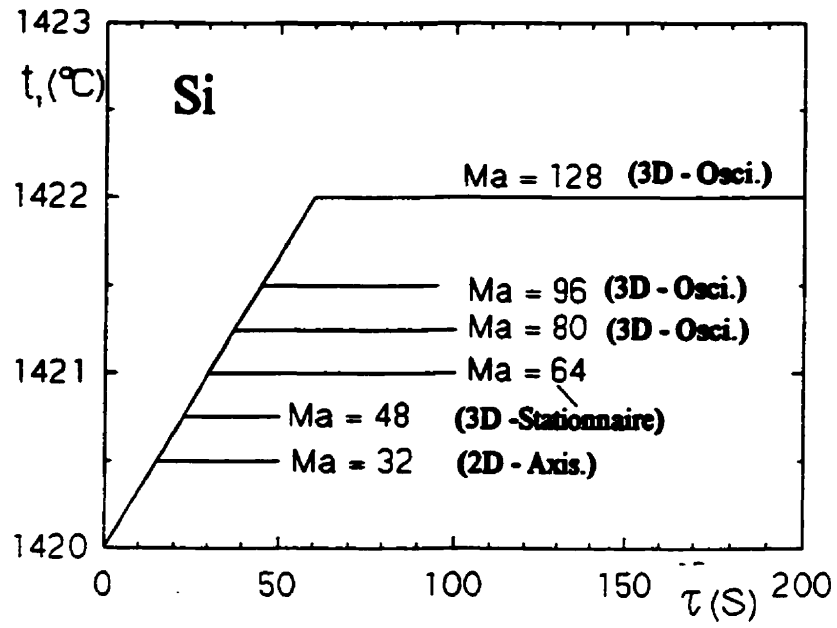


Figure 8.1 Évolution temporelle de la température du disque chaud pour une zone de Silicone en 3D

travaux numériques de Rupp et ses collègues (1989), on a adopté un pas de temps de l'ordre de  $1 / 20$  s.

## **8.2 STRUCTURE AXISYMETRIQUE POUR $Ma < 48$**

Les résultats obtenus pour les valeurs du nombre de Marangoni inférieures à 48 à l'aide du code numérique 3D, révèlent que la structure des champs thermique et hydrodynamique est parfaitement axisymétrique.

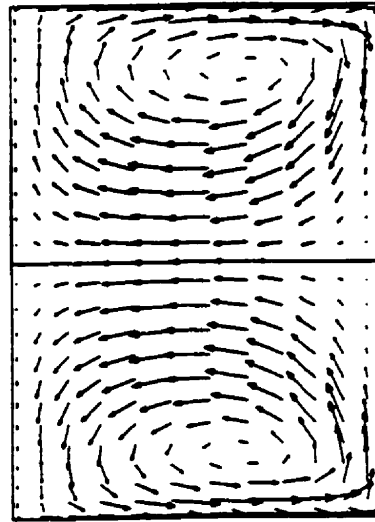
La figure 8.2a illustre l'évolution temporelle de la température aux trois points particuliers ( $\theta = 40^\circ, 180^\circ$  et  $300^\circ$ ) situés sur la surface libre de la zone à  $Z = 0.5$ . Le nombre de Marangoni est fixé à 32. On observe tout d'abord que les profils de température de ces trois points sont parfaitement identiques, ce qui indique en toute évidence que la structure du champ thermique est axisymétrique pour  $Ma = 32$ . D'autre part, on note que la température de ces trois points augmente linéairement au fur et à mesure qu'on chauffe la zone pour ensuite atteindre une valeur asymptotique de l'ordre de  $1420.14$  °C.

La figure 8.2b montre la structure axisymétrique du champ de vitesse telle qu'obtenue pour  $Ma = 32$ . On note que le long de la surface libre, le fluide se déplace de la droite (frontière chaude) vers la gauche (frontière froide). L'écoulement inverse est observé dans la partie centrale de la zone pour satisfaire la continuité. Le centre du vortex est localisé près de la surface libre du côté de disque froid. C'est une caractéristique bien connue pour les fluides à faible nombre de Prandtl.

## **8.3 LA TRANSITION AXISYMETRIQUE / 3D PERMANENT POUR $Ma_c^1 \approx 48$**

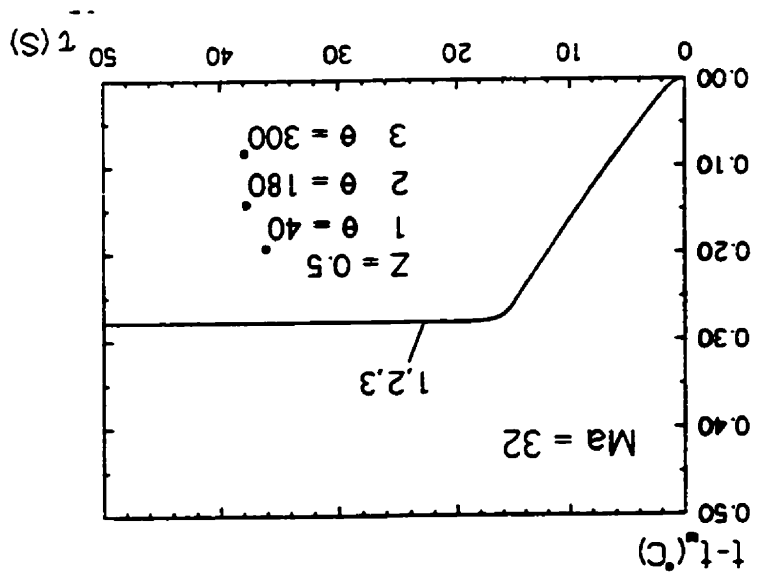
Dans le cadre de cette étude, il a été montré que pour des valeurs modérées du nombre de Marangoni, soit  $80 > Ma \geq 48 \approx Ma_c^1$ , la transition de l'état axisymétrique à l'état

Figure 8.2b Structure du champ de l'écoulement pour  $Ma = 32$



SI  
 $Ma = 32$   
 $A = 0.7$

Figure 8.2a Evolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre pour  $Ma = 32$





tridimensionnel permanent se produit. Les résultats concernant l'évolution transitoire du champ thermique et de la structure de l'écoulement, pour  $Ma = 64$ , sont présentés dans ce qui suit.

### **8.3.1 Évolution temporelle de la température des trois points particuliers situés sur la surface libre**

La figure 8.3 montre l'évolution temporelle de la température aux trois points ( $\theta = 40^\circ$ ,  $180^\circ$  et  $300^\circ$ ) situés sur la surface libre de la zone à  $Z = 0.5$  pour le cas  $Ma = 64$ .

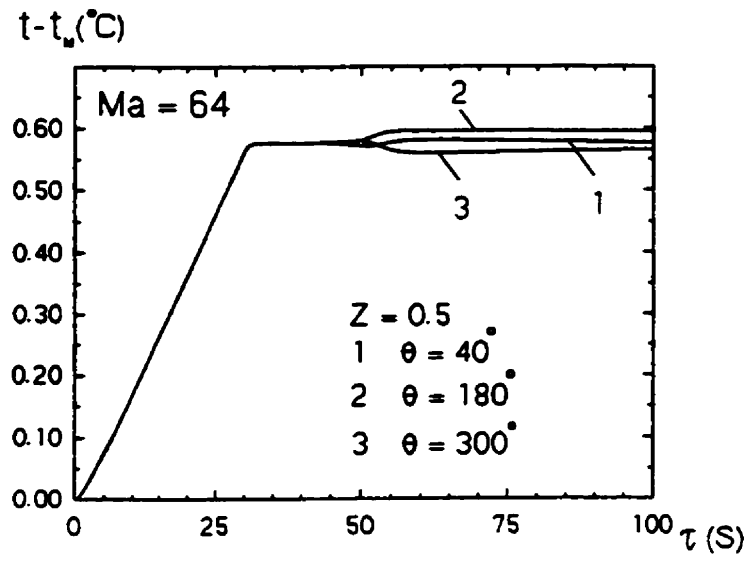
On observe tout d'abord que pour  $0 < \tau < 50$  s, les profils de température pour les trois points sont confondus, ce qui indique que l'écoulement reste axisymétrique. Cependant, pour  $\tau \geq 50$  s, on note que ces profils de température ne sont plus identiques. On peut donc constater que l'écoulement est tridimensionnel.

Il importe de noter que l'écoulement 3D demeure stationnaire. En effet, les températures des points 1, 2 et 3 atteignent respectivement les valeurs asymptotiques suivantes:  $1420.57^\circ\text{C}$ ,  $1420.59^\circ\text{C}$  et  $1420.56^\circ\text{C}$ .

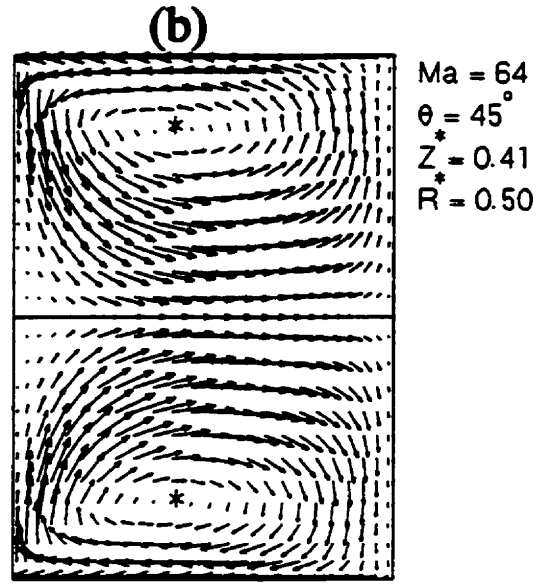
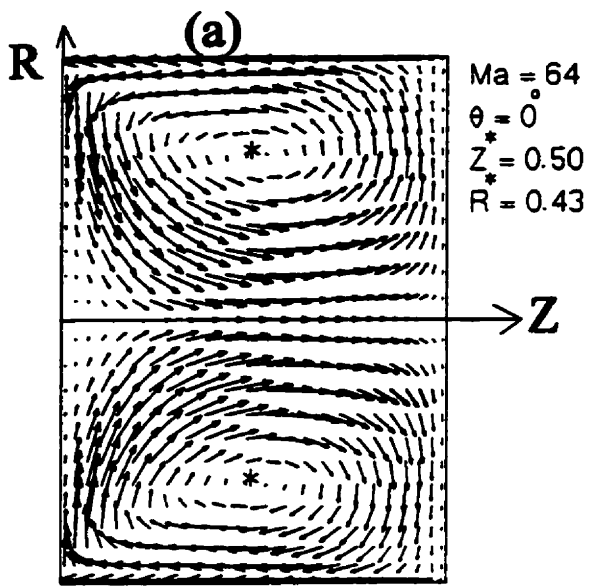
### **8.3.2 Structure du champ de l'écoulement et du champ thermique pour $Ma = 64$**

La figure 8.4 présente la structure de l'écoulement telle qu'obtenue à  $\tau = 100$  s pour quatre plans particuliers R - Z à  $\theta = 0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  et  $135^\circ$  respectivement.

En examinant la figure 8.4, on retrouve la structure toroïdale habituelle de l'écoulement thermocapillaire. Le centre du vortex est localisé près de la surface libre. Cependant, il importe de noter que la position de ce centre ainsi que le champ de vitesse dans la partie intérieure de la zone changent considérablement en passant d'un plan à



**Figure 8.3 Évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre pour  $Ma = 64$**



25  $\rightarrow$

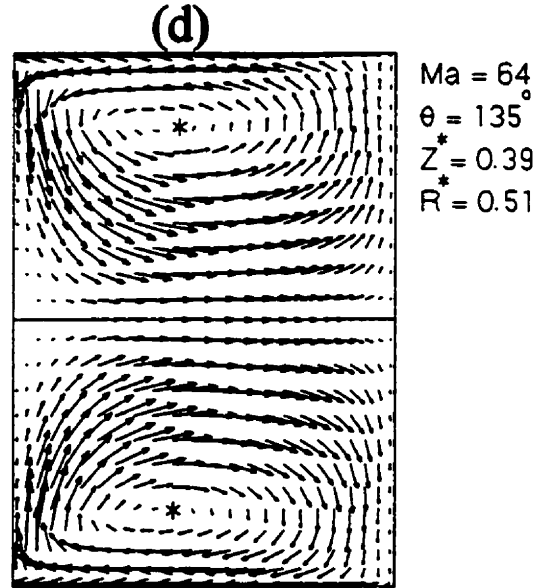
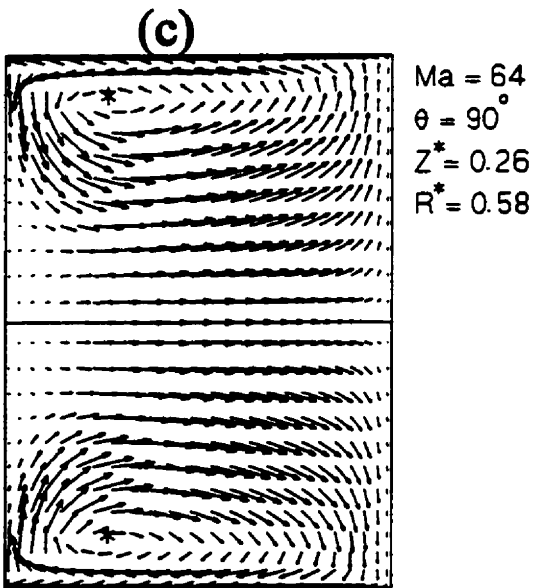


Figure 8.4 Structure de l'écoulement pour quatre plans R-Z,  $Ma = 64$

un autre. On remarque que le déplacement de la position du centre du vortex selon la direction axiale est plus important que celui selon la direction radiale. Ainsi, les coordonnées du centre du vortex pour  $\theta = 0^\circ$  sont ( $Z^* = 0.5$ ,  $R^* = 0.43$ ), elles passent à (0.41, 0.50), à (0.26, 0.58) et à (0.39, 0.51) pour  $\theta = 45^\circ$ ,  $90^\circ$  et  $135^\circ$  respectivement.

Les figures 8.5a et b illustrent respectivement la position du centre du vortex dans les plans  $R - \theta$  et  $R - Z$  telle qu'obtenue à  $\tau = 100$  s.

À partir de la figure 8.5a, on note que le lieu du centre du vortex n'est plus circulaire comme pour le cas axisymétrique. Ce lieu est plutôt elliptique. Il convient de noter que la position du centre du vortex est symétrique par rapport au point de singularité de la section.

La figure 8.5 c montre une vue tridimensionnelle globale du lieu du centre du vortex telle qu'obtenue à partir des figures 8.5a et b. Notons que le tore déformé du centre du vortex n'est pas dessiné à l'échelle.

La figure 8.6 illustre la structure du champ thermique telle qu'obtenue à  $\tau = 100$  s pour les quatre plans particuliers  $R - Z$  considérés.

L'examen de cette dernière figure montre que les contours des isothermes sont presque parallèles aux deux disques. Ce comportement est dû à la haute diffusivité thermique de Silicone. Cependant, la déformation des isothermes dans la région intérieure de la zone est attribuée aux effets de convection thermocapillaire. Notons aussi qu'en passant d'un plan à un autre, la structure des isothermes dans la partie centrale de la zone change. Il suffit de suivre, par exemple, la forme de l'isotherme 5 dans les quatre composantes de la figure 8.6.

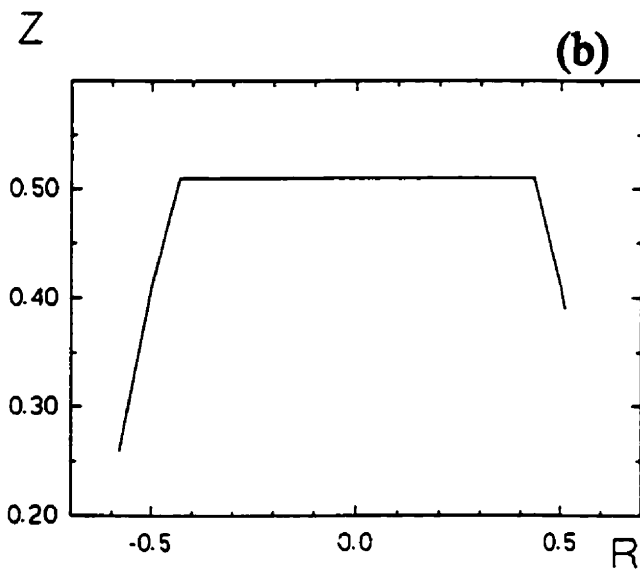
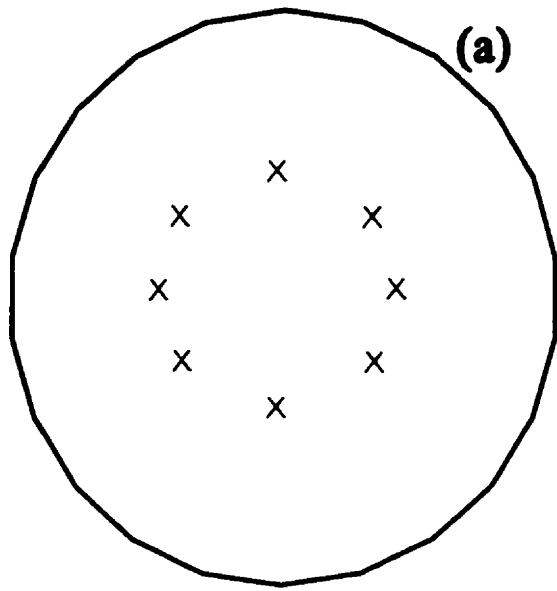
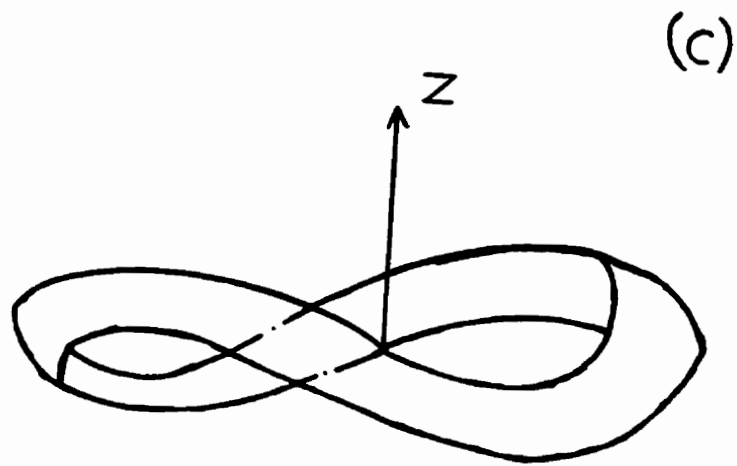


Figure 8.5a, b Position du centre du vortex pour  $Ma = 64$



**Figure 8.5c** Vue tridimensionnelle de la position du centre du vortex,  $Ma = 64$

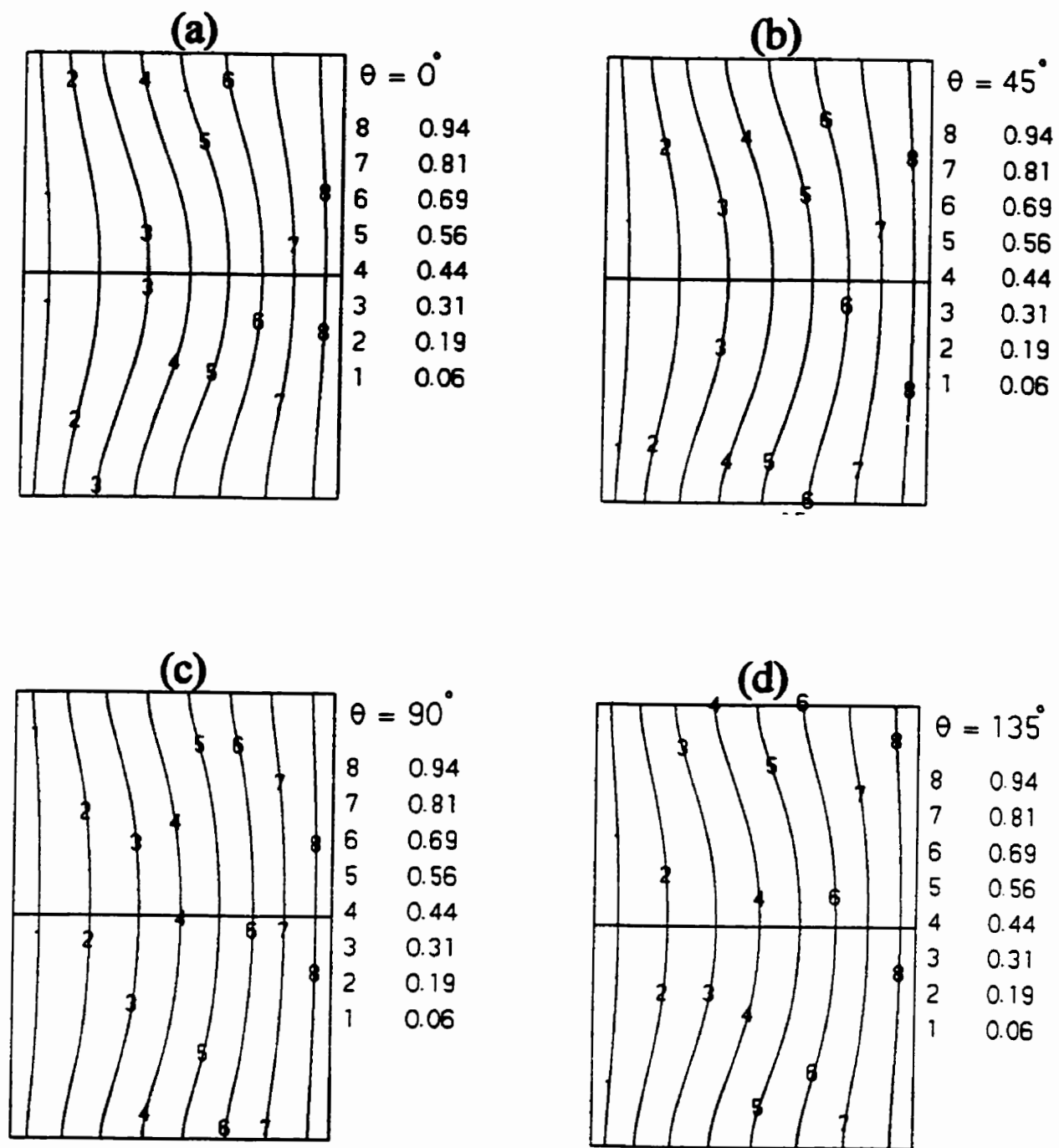


Figure 8.6 Structure du champ thermique pour quatre plans R-Z,  $Ma = 64$

### **8.3.3 Structure des isothermes, des iso-contours de $V_z$ et de la vitesse transversale dans le plan $R - \theta$ pour $Ma = 64$**

Les figures 8.7a et 8.7b montrent respectivement la distribution de la température et des iso-contours de  $V_z$  au milieu de la zone à  $\tau = 100$  s pour  $Ma = 64$ .

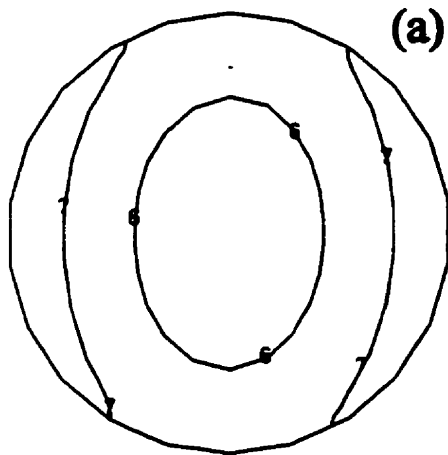
L'examen de la figure 8.7a révèle que la structure des isothermes n'est plus circulaire comme pour le cas axisymétrique. Cette structure est plutôt elliptique. Notons que le long de la surface libre, on remarque la présence d'une alternance des régions froide et chaude (délimitée par l'isotherme 7). D'autre part, il est intéressant de mentionner que les isothermes sont parfaitement symétriques par rapport au point de singularité de la section.

Concernant la structure des iso-contours de  $V_z$  montrée à la figure 8.7b, on observe tout d'abord que la forme de ces contours est plutôt elliptique, ce qui indique la destruction de symétrie du champ de  $V_z$ . En examinant attentivement cette dernière figure, on peut remarquer que le long de la surface libre, il existe une alternance des forts et des faibles gradients de  $V_z$  selon la direction radiale. D'autre part, la comparaison des figures 8.7a et 8.7b nous permet de constater que les forts gradients de  $V_z$  se situent à l'endroit qui coïncide avec la région froide. Les faibles gradients de  $V_z$  se trouvent, pour leur part, juste à l'endroit correspondant à la région chaude délimitée par l'isotherme 7.

La figure 8.7c présente la structure de la vitesse transversale au milieu de la zone pour  $Ma = 64$ .

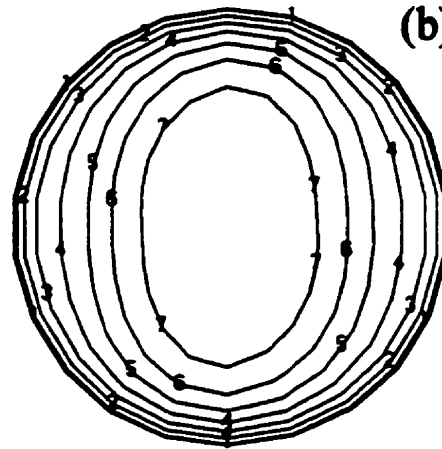
Pour l'écoulement axisymétrique, la composante tangentielle de vitesse est nulle. La situation change lorsque l'écoulement devient tridimensionnel, une composante circonférentielle vient se superposer à celle radiale dans la section comme le montre la figure 8.7c. À partir de l'examen de cette dernière figure, on remarque la présence des quatre zones





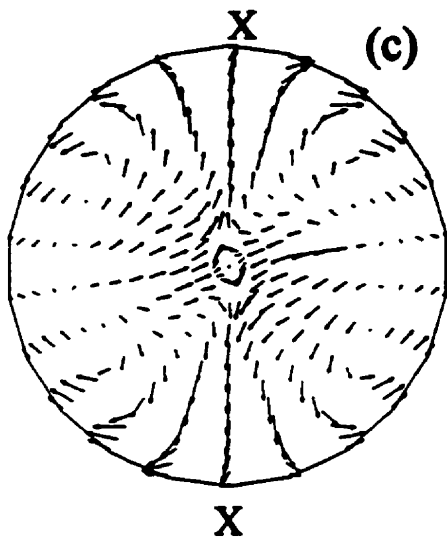
(a)

	$T$
7	0.51
6	0.43
5	0.35
4	0.27
3	0.19
2	0.11
1	0.03



(b)

	$V_z$
7	0.03
6	0.01
5	-0.00
4	-0.02
3	-0.04
2	-0.06
1	-0.07



(c)

Figure 8.7 a) Structure des isothermes à  $Z = 0.5$ , b) Structure des iso-contours de  $V_z$   
 c) Structure de la vitesse transversale pour  $Ma = 64$

de circulation qui sont symétriques par pair. Ces zones de circulation sont contre-sens par rapport au point de singularité de la section. Notons que l'écoulement autour de l'axe  $XX$  est dirigé presque radialement vers la surface libre où il se sépare en deux courants.

En comparant les figures 8.7a et 8.7c, il importe de noter que le fluide circule sur la surface libre du côté froid vers le côté chaud selon la direction circonférentielle. Ce comportement, qui paraît paradoxal avec le mécanisme de la convection thermocapillaire (chaud vers froid) nous laisse croire que l'instabilité observée pour le Silicone est d'une nature hydrodynamique comme on va voir plus loin au paragraphe 8.5. Notons que Levenstam et Amberg (1995) ont observé un comportement analogue en considérant une zone flottante d'un fluide à faible nombre de Prandtl ( $Pr = 0.01$ ).

La figure 8.8 montre la distribution de la température sur la surface libre de la zone pour le cas caractérisé par  $Ma = 64$ . En premier lieu, on observe que les isothermes proches des deux frontières sont presque des lignes parallèles. Par contre, les isothermes dans la partie centrale (isothermes 4, 5, 6 et 7) sont légèrement déformés, ce qui reflète la non-uniformité de la température selon la direction  $\theta$ . La déformation de ces isothermes n'est pas drastique comparée à celle observée expérimentalement par Schwabe et Scharmann (1983) pour le  $NaNO_3$ .

#### **8.4 TRANSITION 3D STATIONNAIRE / OSCILLATOIRE**

Il a été démontré que la deuxième transition (i.e. transition 3D stationnaire / oscillatoire) a eu lieu pour  $Ma_c^2 \approx 80$ . Dans cette section, on présente l'évolution temporelle de la température aux trois points particuliers situés sur la surface libre de la zone, ainsi que le champ de vitesse pour quatre plans  $R - Z$  et l'évolution transitoire des isothermes et de la vitesse transversale dans le plan  $R - \theta$ , à  $Z = 0.5$  pour  $Ma = 128$ .

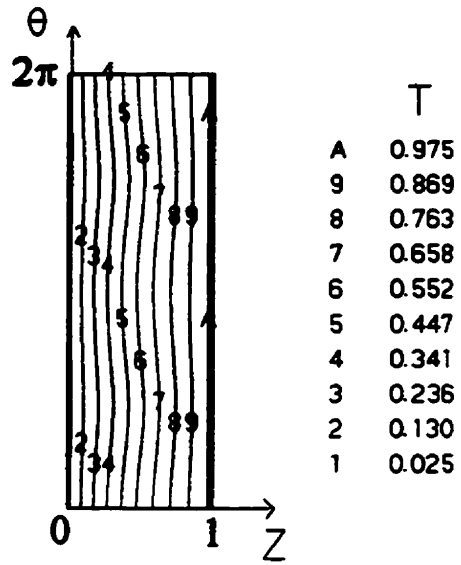


Figure 8.8 Structure des isothermes sur la surface libre pour  $Ma = 64$

#### **8.4.1 Évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre de la zone**

La figure 8.9 montre l'évolution temporelle de la température aux trois points ( $\theta = 40^\circ, 180^\circ$  et  $300^\circ$ ) situés sur la surface libre de la zone à  $Z = 0.5$  pour  $125 \text{ s} \leq \tau \leq 210 \text{ s}$ . Le nombre de Marangoni est fixé à 128.

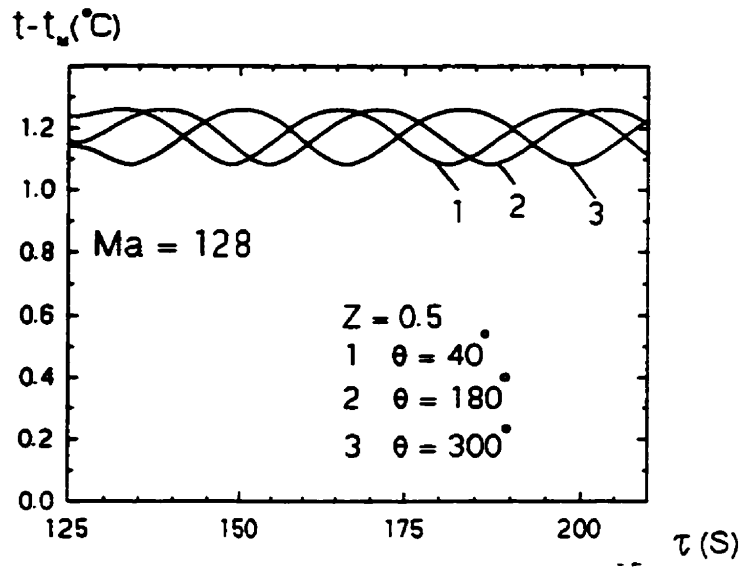
L'examen de cette dernière figure nous montre les oscillations de température pour les trois points considérés. La fréquence de ces oscillations, déterminée à l'aide de la technique FFT, est égale à 0.0267 Hz. La période des oscillations est estimée à 37.5 s. Notons finalement que l'amplitude crête à crête des oscillations de température est égale à  $0.18^\circ\text{C}$ .

#### **8.4.2 Structure du champ de vitesse pour $Ma = 128$**

La figure 8.10 présente la structure du champ de vitesse telle qu'obtenue à  $\tau = 200 \text{ s}$  pour quatre plans particuliers R - Z à  $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  et  $135^\circ$ .

On observe tout d'abord que la structure de l'écoulement est toroïdale, et elle est similaire à celle observée pour le cas axisymétrique. Il s'agit d'une grande zone de recirculation dont le centre de tourbillon est proche de la surface libre. Notons aussi que la circulation du fluide est intense le long de la surface libre et le fluide circule axialement du côté du disque chaud vers celui du disque froid conformément au mécanisme de la convection thermocapillaire.

D'autre part, il est intéressant de mentionner que le champ de vitesse dans la partie intérieure de la zone ainsi que la position du centre du vortex varient en passant d'un plan à un autre. Par exemple, la position du centre du vortex ( $Z^* = 0.42, R^* = 0.49$ ) pour  $\theta = 0^\circ$



**Figure 8.9 Évolution temporelle de la température de trois points particuliers situés sur la surface libre pour  $Ma = 128$**

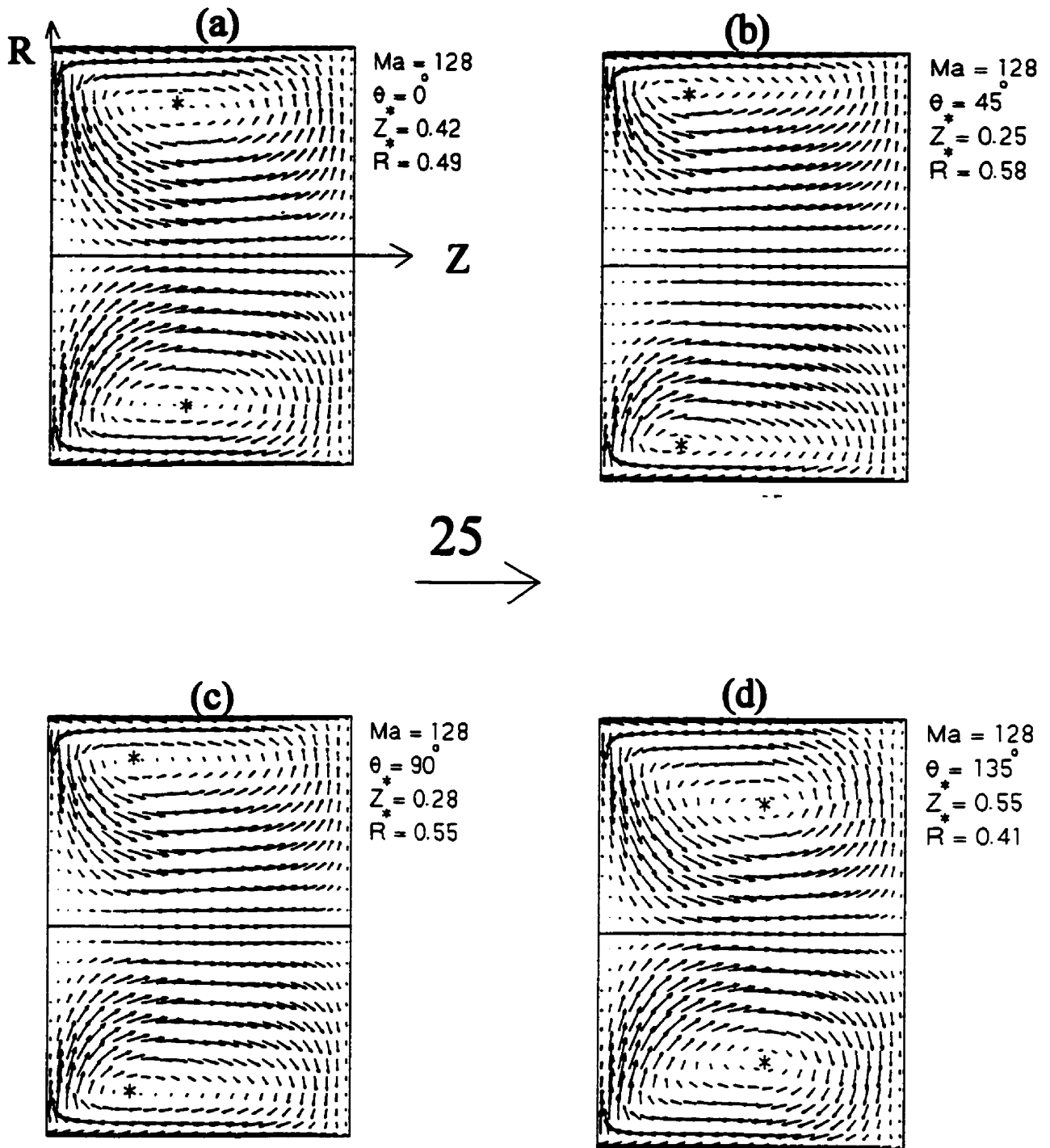


Figure 8.10 Structure de l'écoulement pour quatre plans R-Z pour  $Ma = 128$

passe à (0.28, 0.55) pour  $\theta = 90^\circ$ . Le tableau 8.1 résume les coordonnées du centre du vortex pour les quatre plans R - Z considérés. On remarque que le déplacement du centre du vortex selon la direction axiale est plus important que celui selon la direction radiale. Notons aussi que le changement de la position du centre du vortex pour le Silicone est plus prononcé que celui observé pour le cas du  $\text{NaNO}_3$ . Ce comportement s'explique comme suit: la viscosité de  $\text{NaNO}_3$  est beaucoup plus importante que celle du Silicone et par conséquent, les effets stabilisateurs de viscosité pour le  $\text{NaNO}_3$ , tentent à amortir les perturbations du champ hydrodynamique.

Tableau 8.1 Coordonnées de la position du centre du vortex

$\theta$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$
$Z^*$	0.42	0.25	0.28	0.55
$R^*$	0.49	0.58	0.55	0.41

La figure 8.11a et 8.11b montrent le lieu du centre du vortex dans les plans R- $\theta$  et R-Z respectivement pour  $\tau$  et  $\tau + \tau_0 / 2$  ( $\tau_0$  est la période des oscillations estimée à 37,5 s et  $\tau = 162,5$  s).

L'examen de ces deux dernières figures montre que le centre du vortex varie avec le temps. Cette variation, en particulier dans le plan R- $\theta$ , est plus prononcée que celle observée dans le cas de  $\text{NaNO}_3$ . Notons aussi que la forme du lieu de la position du centre du vortex dans le plan R- $\theta$ , pour un temps donné, est elliptique et elle est symétrique par rapport au point de singularité de la section. D'autre part, la vue tridimensionnelle globale de la position du centre du vortex est similaire à celle illustrée à la figure 8.5c pour le cas caractérisé par  $\text{Ma} = 64$ . Il faut mentionner cependant que le tore déformé tourne dynamiquement autour de son axe principal contrairement au cas  $\text{Ma} = 64$  où il est "fixé" dans l'espace et dans le temps.

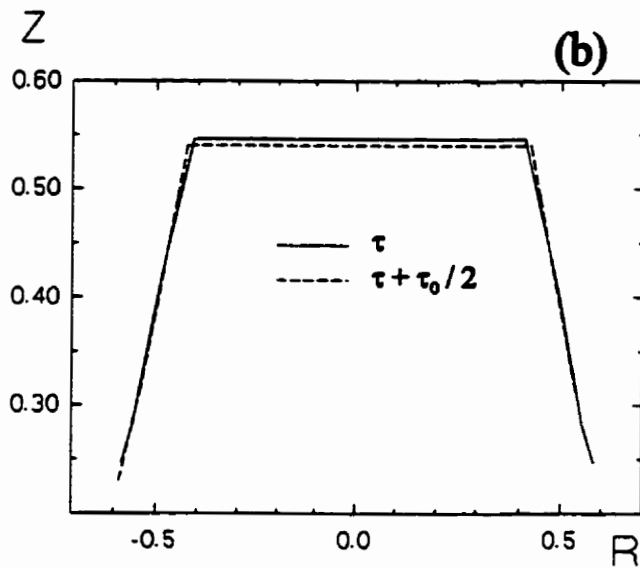
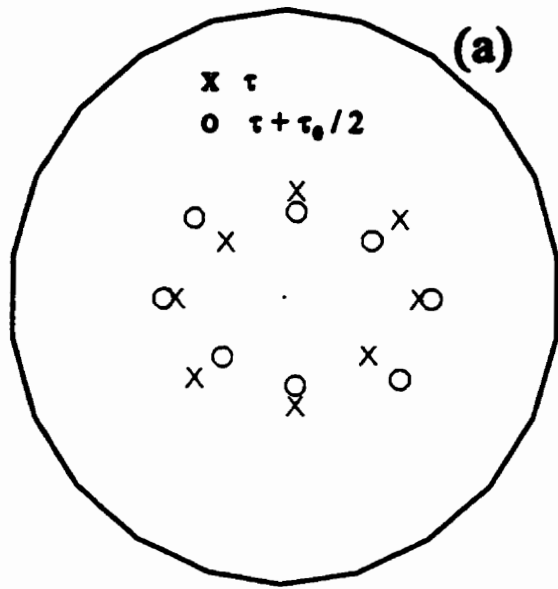


Figure 8.11 a, b Position du centre du vortex pour deux temps différents  $\tau$  et  $\tau + \tau_0/2$ ,  $Ma = 128$



### **8.4.3 Évolution temporelle de la structure des isothermes et de la vitesse transversale à $Z = 0.5$ , $Ma = 128$**

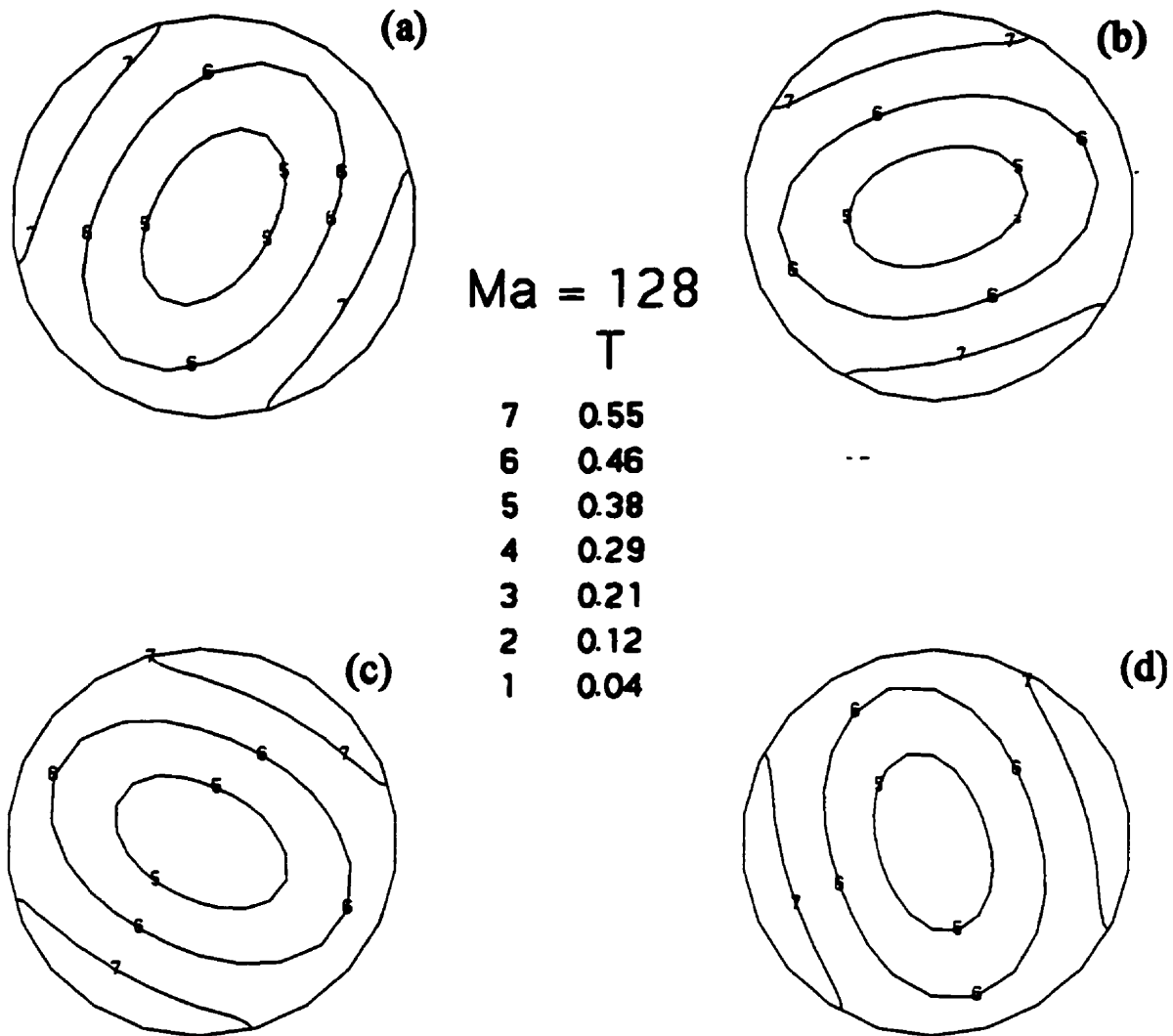
La figure 8.12 illustre l'évolution transitoire de la structure des isothermes au milieu de la zone à quatre temps différents ( $\tau$ ,  $\tau + \tau_0 / 4$ ,  $\tau + \tau_0 / 2$ ,  $\tau + 3 \tau_0 / 4$ ) durant une période des oscillations.

En premier lieu, on observe que les isothermes sont drastiquement déformés et ils ont une forme plutôt elliptique similaire à celle observée pour le cas où  $Ma = 64$ . D'autre part, on note la présence d'une alternance des zones froide et chaude (délimitée par l'isotherme 7,  $T = 0.55$ ) sur la surface libre selon la direction circonférentielle.

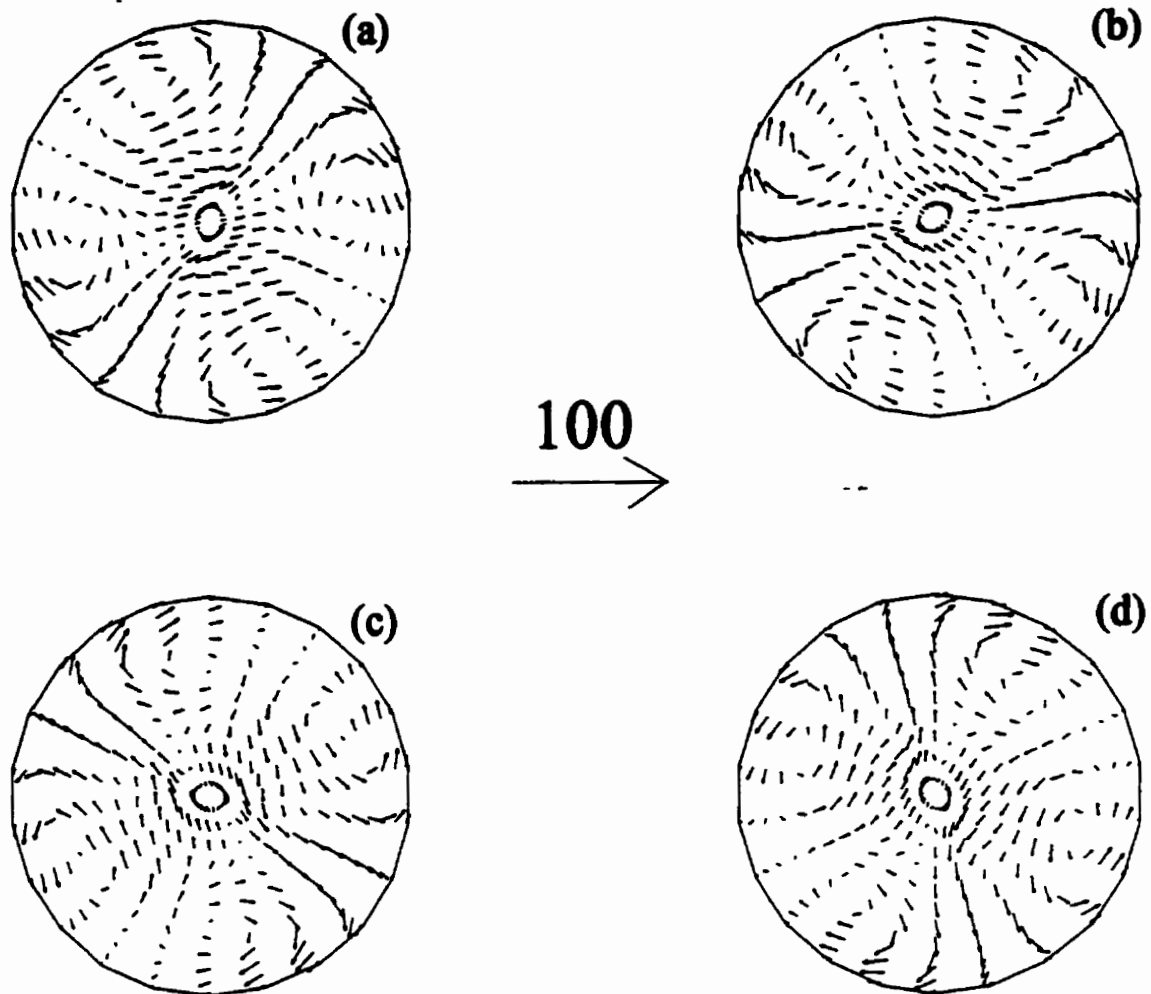
En comparant les différentes composantes de la figure 8.12, il est très intéressant de mentionner que les isothermes ne sont plus stationnaires comme pour le cas où  $Ma = 64$ , ils tournent périodiquement autour de l'axe principal de la zone dans le sens des aiguilles d'une montre. Il en résulte donc une alternance des régions froide et chaude pour chaque point situé sur la surface libre selon la direction  $\theta$ , ce qui peut expliquer les oscillations de température observées à la figure 8.9.

L'évolution transitoire de la structure de la vitesse transversale durant une période des oscillations, à  $Z = 0.5$ , est montrée à travers la figure 8.13.

On observe tout d'abord que la structure de la vitesse transversale est assez complexe. En effet, on note la présence de quatre zones de circulation dans la région intérieure de la section. Ces zones de circulation sont à contre sens par rapport au point de singularité de la zone. Cette structure de vitesse transversale a été observée auparavant pour le cas où  $Ma = 64$  (voir Fig. 8.7c). Cependant, il convient de noter que tout le champ de vitesse transversale tourne autour de l'axe principal de la zone dans le sens des aiguilles d'une montre. Ce champ décrit un tour complet durant une période  $\tau_0$  des oscillations.



**Figure 8.12** Évolution temporelle de la structure des isothermes durant une période des oscillations à  $Z = 0.5$ ,  $Ma = 128$



**Figure 8.13** Évolution temporelle de la structure de la vitesse transversale durant une période des oscillations à  $Z = 0.5$ ,  $Ma = 128$

En examinant attentivement les figures 8.12 et 8.13, on peut constater que le fluide sur la surface libre de la zone, selon la direction  $\theta$ , circule de la région froide vers celle chaude. Ce comportement déjà observé pour le cas où  $Ma = 64$ , nous laisse croire que l'instabilité observée pour le Silicone n'est pas d'une origine thermique comme dans le cas de  $\text{NaNO}_2$ , elle est plutôt d'une nature hydrodynamique comme on va voir au paragraphe 8.5. Signalons finalement, que Levenstam et Amberg (1995) ont observé un comportement analogue pour un fluide à faible nombre de Prandtl ( $Pr = 0.01$ ).

#### **8.4.4 Évolution temporelle de la distribution de la température sur la surface libre pour $Ma = 128$**

La figure 8.14 montre l'évolution temporelle de la distribution de la température sur la surface libre de la zone à quatre temps durant une période des oscillations pour  $Ma = 128$ .

On observe tout d'abord que près des deux frontières, les isothermes sont presque parallèles aux disques. Au contraire, dans la région centrale, les isothermes sont déformés. Cette déformation est plus prononcée que celle observée pour le cas où  $Ma = 64$ , ce qui indique l'amplification des perturbations en augmentant le nombre de Marangoni. Il est à rappeler que l'augmentation du paramètre  $Ma$  se traduit par une diminution des effets stabilisateurs de la diffusion. En effet, l'amplitude crête à crête des oscillations de la température, d'un point situé sur la surface libre à  $Z = 0.5$ , passe de  $0.07^\circ\text{C}$  à  $0.10^\circ\text{C}$  et à  $0.18^\circ\text{C}$ , respectivement pour  $Ma = 80, 96$  et  $128$ .

En comparant les quatre composantes de la figure 8.14, on peut remarquer l'existence d'une onde thermique qui se propage périodiquement dans le temps selon la direction  $\theta$  sur la surface libre de la zone flottante. Il est intéressant de mentionner que pour le cas de  $\text{NaNO}_2$ , on a observé également la propagation d'une onde (plus prononcée que pour le Silicone) sur la surface libre de la zone.

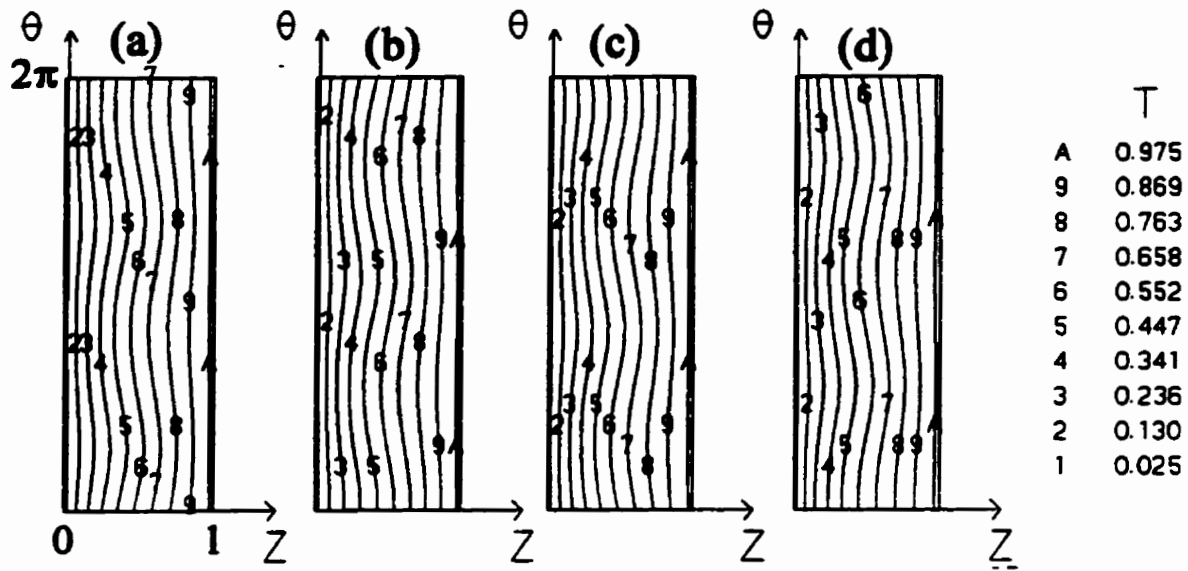


Figure 8.14 Évolution temporelle de la distribution de la température sur la surface libre durant une période des oscillations,  $Ma = 128$

## 8.5 ORIGINE DES INSTABILITÉS

Pour des faibles nombres de Marangoni, soit  $Ma < 48$ , les effets stabilisateurs de diffusion font vaincre les perturbations et par conséquent, l'écoulement est parfaitement axisymétrique. Pour  $Ma_{\theta}^1 = 48$ , la situation change complètement et l'écoulement observé est tridimensionnel, mais il demeure stationnaire. La circulation du fluide sur la surface libre, selon la direction circonférentielle, se fait de la région froide vers celle chaude contrairement au mécanisme de la convection thermocapillaire. Ce comportement nous conduit à penser que l'instabilité n'est pas de nature thermique comme pour le cas de  $\text{NaNO}_3$ , (où le fluide sur la surface libre, selon  $\theta$ , circule conformément au mécanisme de la convection thermocapillaire), mais elle est plutôt d'une nature hydrodynamique. Dans ce qui suit, on explique le mécanisme de cette instabilité.

Le tore déformé illustré à la figure 8.5c possède plusieurs propriétés communes avec la solution obtenue par la théorie d'anneau du vortex instable "unstable vortex rings". Widnall et Tsai (1977) ont analysé la stabilité d'un anneau ayant presque une vorticité constante. Ils ont trouvé que l'anneau du vortex est presque toujours instable. Cette instabilité est due à la déformation locale qu'un filament du vortex peut induire sur lui-même. Cet effet existe bien dans les problèmes de la zone flottante, mais la présence des disques et de la surface libre rend difficile de faire une analogie exacte entre les deux problèmes. Cependant, il existe une similitude entre les deux problèmes qui nous induit à croire que le mécanisme de l'instabilité de base est le même.

Selon Levenstam et Amberg (1995) et Widnall et Tsai (1977), la théorie de la stabilité de l'anneau du vortex prévoit que la position du vortex après la bifurcation se déplace d'une façon sinusoïdale le long du périmètre du tore du vortex. Le vortex se déplace aussi bien verticalement que radialement selon des lignes inclinées de  $45^\circ$  par rapport à l'axe vertical. L'inclinaison de ces lignes fait qu'une partie du tore qui se rapproche du centre se déplace aussi vers le bas. Tandis que l'autre partie restante du tore est déplacée vers le haut en se

rapprochant du centre. La seule différence entre la forme du tore illustrée à la figure 8.5c et celle prédite par la théorie de la stabilité des anneaux est que l'angle de l'inclinaison des lignes par rapport à l'axe vertical n'est pas tout à fait de  $45^\circ$ . Ceci peut être attribué à la présence des disques dans le cas d'une zone flottante.

En résumé, la déformation locale qu'un filament du vortex peut induire sur lui-même est la cause principale de l'instabilité qui donne naissance à une composante de vitesse selon la direction circonférentielle. En augmentant davantage le nombre de Marangoni, soit  $Ma_g^2 = 80$ , cette composante de vitesse,  $V_\theta$ , devient plus importante et provoque ainsi la rotation des champs hydrodynamique et thermique autour de l'axe principal de la zone et d'une façon périodique dans le temps.

Il est très intéressant de mentionner que Levenstam et Amberg (1995) ont prouvé que les oscillations pour un faible nombre de Prandtl ( $Pr = 0.01$ ) sont d'une nature hydrodynamique. En effet, ils ont considéré le cas où  $Pr \approx 0$ , et ils ont trouvé le même comportement oscillatoire observé en tenant compte du nombre de Prandtl ( $Pr = 0.01$ ).

## 8.6 COMPARAISON AVEC LES TRAVAUX ANTÉRIEURS

Étant donné que le Silicone est un matériau opaque, il est difficile de visualiser la structure de l'écoulement au sein d'une zone flottante. Pour cela, les chercheurs optent pour des fluides transparents tels que le  $NaNO_2$ , et les huiles de Silicone. Cröll et al. (1989) sont probablement les seuls chercheurs qui ont étudié expérimentalement le comportement oscillatoire d'une zone flottante de Silicone. Ils ont trouvé que le nombre de Marangoni critique correspondant à la transition axisymétrique / oscillatoire se situe dans l'intervalle suivant:  $61 \leq Ma_g^2 \leq 87$ . Le tableau 8.2 montre une comparaison entre les valeurs des nombres  $Ma_g^1$  et  $Ma_g^2$  obtenues dans le cadre de cette étude avec celles des travaux expérimentaux et numériques existants.

**Tableau 8.2 Comparaison avec les résultats antérieurs pour le Silicone**

	(1)	(2)	(3)	(4)
$Ma_c^1$	48	-	19.6	-
$Ma_c^2$	80	61 - 87	62.5	200

(1) Résultats numériques,  $Pr = 0.016$

(2) Mesures expérimentales de Cröll et al. 1989,  $Pr = 0.01$

(3) Résultats numériques de Levenstam et Amberg, 1995 ( $Pr = 0.01$ )

(4) Résultats numériques de Rupp et al., 1989 ( $Pr = 0.02$ )

Notons que la comparaison entre nos résultats numériques et les travaux expérimentaux de Cröll et al. (1989) s'avère satisfaisante. Cependant, les valeurs du nombre de Marangoni critique ( $Ma_c^1$  et  $Ma_c^2$ ) obtenues par Levenstam et Amberg (1995) sont plus faibles que celles obtenues dans notre étude. Cette différence peut être attribuée à deux facteurs. En premier lieu, le rapport géométrique adopté par Levenstam et Amberg (1995) est égal à 1. Il est à rappeler que le rapport géométrique pour tous les cas 3D est fixé à 0.7. En second lieu, le nombre de Prandtl du fluide utilisé par Levenstam et Amberg (1995) est égal à 0.01. Cependant, dans ce travail, le nombre de Prandtl est fixé à 0.016. Il importe de noter que pour un fluide à faible nombre de Prandtl, les effets stabilisateurs de viscosité sont faibles, et par conséquent, la transition axisymétrique / 3D permanent et celle 3D stationnaire / oscillatoire se produisent à un nombre de Marangoni plus faible.

## 8.6 CONCLUSION

Au terme de ce chapitre, on a étudié le comportement transitoire des champs thermique et hydrodynamique de l'écoulement au sein d'une zone de Silicone à l'aide du code 3D. Il a été montré que pour  $Ma < 48$ , la structure de l'écoulement est parfaitement axisymétrique. Pour  $Ma_c^1 \approx 48 < Ma < 80$ , la transition axisymétrique / 3D permanent a lieu. La structure de l'écoulement et du champ thermique est tridimensionnelle, mais elle demeure stationnaire. En augmentant davantage le nombre de Marangoni, soit  $Ma \geq Ma_c^2 \approx 80$ , la



transition de l'état 3D stationnaire à l'état oscillatoire se produit. Les champs hydrodynamique et thermique tournent périodiquement dans le temps autour de l'axe principal de la zone. Les deux transitions sont d'origine hydrodynamique.

## CONCLUSION

Dans le cadre de ce travail, on a effectué une étude numérique exhaustive sur le problème de l'écoulement thermocapillaire, en régime transitoire, au sein d'une zone flottante. Les fluides testés sont le  $\text{NaNO}_3$  ( $Pr = 8.9$ ) et le Silicone ( $Pr = 0.016$ ). La première partie de cette étude concerne le comportement transitoire de l'écoulement thermocapillaire à l'intérieur d'une zone flottante opérant en  $\mu\text{-g}$  et en  $1\text{-g}$ . Pour les cas simulés sur terre, on a tenu compte de la déformabilité de la surface libre. On a étudié également l'influence des paramètres  $Ma$  et  $A$  sur les champs thermique et hydrodynamique. Dans la deuxième partie, on a considéré le caractère tridimensionnel de l'écoulement et on a étudié en détails la transition axisymétrique / oscillatoire.

Pour ce faire, une méthode numérique, basée sur le principe d'intégrale local sur des volumes de contrôle finis, a permis de solutionner les équations de conservation du problème, soit l'équation de continuité, les équations de Navier-Stokes et celle de l'énergie avec les conditions aux limites et initiales appropriées. À l'aide d'une approche numérique spéciale, on a réussi à déterminer la forme dynamique de la surface libre pour les cas simulés en  $1\text{-g}$ . Le modèle numérique a été validé avec succès en se servant des résultats expérimentaux et théoriques antérieurs.

- Les résultats numériques, obtenus par le code 2D axisymétrique pour le cas d'une zone flottante de  $\text{NaNO}_3$ , opérant en  $\mu\text{-g}$ , ont montré que la structure de l'écoulement est unicellulaire. Le centre du vortex est localisé près de la surface libre du côté du disque chaud. En  $1\text{-g}$  et pour  $Ma \geq 7500$ , ce centre de recirculation se déplace vers le disque froid. D'autre part, l'intensité des courants thermocapillaires augmente durant le processus de chauffage de la zone et puis diminue légèrement vers une valeur asymptotique lorsque la différence de température entre les deux disques devient constante. L'intensité de ces courants de même que leurs perturbations au niveau du champ thermique augmentent considérablement avec le

nombre de Marangoni. L'écoulement devient nettement plus prononcé, en particulier dans la région avoisinant la surface libre. D'autre part, l'écoulement demeure stable même pour des nombres de Marangoni élevés de l'ordre de 20000.

- En ce qui concerne l'écoulement axisymétrique au sein d'une zone flottante de Silicone opérant en  $\mu$ -g, il a été montré que le nombre de Marangoni a une importante influence sur la structure des champs thermique et hydrodynamique et leur évolution temporelle. Plus  $Ma$  est grand, plus les effets de la convection thermocapillaire sont importants. L'intensité des courants thermocapillaires augmente au fur et à mesure qu'on chauffe la zone et également avec l'accroissement du nombre de Marangoni. Les isothermes dans la partie centrale de la zone deviennent de plus en plus déformés en augmentant le paramètre  $Ma$ . En ce qui est du rapport géométrique  $A$ , le fait d'augmenter ce dernier entraîne des zones de recirculation plus intenses en volume et en intensité.

Dans la deuxième partie de ce travail, on s'est intéressé à l'étude de la transition axisymétrique / oscillatoire au sein d'une zone flottante opérant en  $\mu$ -g. Les deux fluides testés sont le  $\text{NaNO}_3$  et le Silicone.

- Pour le  $\text{NaNO}_3$ , il a été clairement montré que pour  $Ma \leq 12000$ , la structure de l'écoulement est parfaitement axisymétrique. Il s'agit d'une grande zone de recirculation dont le centre du vortex est situé près de la surface libre du côté du disque chaud. Au delà du nombre de Marangoni critique,  $Ma_c^u \approx 12500$ , l'écoulement devient oscillatoire. Sous les effets d'une onde thermique qui se propage sur la surface libre, les champs thermique et hydrodynamique tournent autour de l'axe principal de la zone en suivant le deuxième mode ou le mode symétrique des instabilités. Le phénomène de l'hystérésis a été démontré. Il a été observé que pour un certain intervalle du paramètre  $Ma$ , les états axisymétrique et oscillatoire peuvent exister selon le type de transfert de chaleur, soit le chauffage ou soit le refroidissement de la zone. Il a été montré que le deuxième nombre de Marangoni critique qui

correspond à la transition oscillatoire / axisymétrique, dépend du taux temporel du refroidissement de la zone.  $Ma_c^1$  est compris entre 6000 et 7500.

- Pour le Silicone, il a été montré que pour un écart de température relativement faible entre les deux disques, l'écoulement est stationnaire et parfaitement axisymétrique avec une structure unicellulaire dont le centre est localisé près de la surface libre, du côté du disque froid. Pour  $48 \approx Ma_c^1 \leq Ma < 80$ , la transition axisymétrique / 3D permanent se produit. En augmentant davantage le nombre de Marangoni, soit  $Ma \geq Ma_c^2 \approx 80$ , l'écoulement 3D stationnaire passe à un état oscillatoire. Ces deux transitions sont de nature hydrodynamique.

En résumé, les résultats que nous avons obtenus dans ce travail constituent une contribution significative à la compréhension de la physique qui régit le problème de la transition axisymétrique / oscillatoire au sein d'une zone flottante. Ils permettent également d'identifier un certain nombre d'études futures s'inscrivant dans le prolongement du présent travail à savoir:

- Étude théorique sur les effets du rapport géométrique sur le nombre de Marangoni critique, correspondant à la transition de l'état axisymétrique à l'état oscillatoire.
- Modélisation d'un écoulement tridimensionnel et en régime transitoire, dans une zone flottante, opérant sur terre, en tenant compte de la déformabilité de la surface libre.

**ANNEXES**

## ANNEXE A

### LISTE DES SYMBOLES

<b>A:</b>	<b>Rapport géométrique caractéristique (Éqn. 3.53)</b>
<b><math>A_i</math>:</b>	<b>Aire total d'une interface (<math>i = e, w, n, s, t</math> et <math>b</math>)</b>
<b><math>A_1, A_0, A_z</math>:</b>	<b>Surface d'influence pour un volume de contrôle</b>
<b><math>a_i</math>:</b>	<b>Coefficient résultant de la convection et de diffusion, <math>i = E, N, S, T, B</math> et <math>P</math></b>
<b>Bd:</b>	<b>Nombre de Bond dynamique (Éqn. 3.56)</b>
<b>Bs:</b>	<b>Nombre de Bond statique (Éqn. 3.57)</b>
<b>b:</b>	<b>Terme de source dans les équations discrétisées, également masse résiduelle dans l'équation P'</b>
<b>Ca:</b>	<b>Nombre capillaire (Éqn. 3.58)</b>
<b>Cp:</b>	<b>Chaleur spécifique du fluide</b>
<b><math>D_i</math>:</b>	<b>Conductance à l'interface (<math>i = e, w, n, s, t</math> et <math>b</math>)</b>
<b>Ec:</b>	<b>Nombre d'Eckert (Éqn. B.4)</b>
<b>F(Z):</b>	<b>Rayon déformé adimensionnel</b>
<b>f(z):</b>	<b>Rayon déformé dimensionnel</b>
<b>FF<sub>i</sub>:</b>	<b>Débit massique traversant l'interface considérée (<math>i = e, w, n, s, t</math> et <math>b</math>)</b>
<b><math>f_0</math>:</b>	<b>Fréquence des oscillations</b>
<b>g:</b>	<b>Accélération gravitationnelle</b>
<b>H:</b>	<b>Hauteur de la zone</b>
<b>h(<math>\tau</math>):</b>	<b>Fonction de temps</b>
<b>k:</b>	<b>Conductivité thermique du fluide</b>
<b>Ma:</b>	<b>Nombre de Marangoni (Éqn. 3.55)</b>
<b>Ma<sub>c</sub><sup>u</sup>:</b>	<b>Nombre de Marangoni critique pour la transition axisymétrique / oscillatoire pour le NaNO<sub>3</sub></b>

$Ma_{\alpha}^1$ :	Nombre de Marangoni critique pour la transition oscillatoire / axisymétrique pour le $NaNO_3$
$Ma_{\alpha}^1$ :	Nombre de Marangoni critique pour la transition axisymétrique / 3D permanent pour le Silicone
$Ma_{\alpha}^2$ :	Nombre de Marangoni critique pour la transition 3D permanent / oscillatoire pour le Silicone
$n$ :	Vecteur normale
$P$ :	Pression adimensionnelle
$P^*$ :	Champ de pression arbitraire
$p$ :	Pression dimensionnelle
$p_a$ :	Pression ambiante
$P_1$ :	Pression modifiée adimensionnelle
$p_1$ :	Pression modifiée dimensionnelle
$P'$ :	Correction de pression
$Pr$ :	Nombre de Prandtl (Éqn. 3.54)
$R$ :	Coordonnée radiale adimensionnelle
$r$ :	Coordonnée radiale dimensionnelle
$R_0$ :	Rayon de la zone
$R_1$ et $R_2$ :	Rayons principales de courbure
$R_m$ :	Rayon moyen du volume de contrôle
$R_n$ et $R_s$ :	Position radiale de l'interface n et s respectivement
$R_p$ :	Position radiale du point considéré P
$Re$ :	Nombre de Reynolds
$Re_{zs}$ :	Nombre de Reynolds thermocapillaire à la surface libre de la zone (Éqn. 4.47)
$S$ :	Terme de source
$T$ :	Température adimensionnelle
$Td(I)$ :	Température désirée le long de la surface libre
$TL(I)$ :	Température des derniers volume de la zone liquide
$t$ :	Température dimensionnelle

$t_t$ :	Température du disque chaud lorsqu'on atteint un des paliers durant le chauffage ou le refroidissement
$\zeta$ :	Vecteur unitaire tangentielle
$V$ :	Vitesse adimensionnelle
$V^*$ :	Champ estimé de vitesse
$v$ :	Vitesse dimensionnelle
$We_d$ :	Nombre de Weber dynamique
$Z$ :	Coordonnée axiale adimensionnelle
$z$ :	Coordonnée axiale dimensionnelle

### **Symboles grecs:**

$\alpha$ :	Diffusivité thermique de matériau, aussi coefficient de relaxation (Éqn. 4.45)
$\beta$ :	Coefficient d'expansion thermique
$\Gamma$ :	Coefficient de diffusion (Éqn. 4.1)
$\gamma$ :	Angle de contact entre le liquide et la paroi solide
$\Delta R, \Delta Z$ :	Dimension selon R et Z du volume de contrôle
$\Delta t$ :	Différence de température de référence
$\Delta V$ :	Volume du volume de contrôle considéré
$\Delta \theta$ :	Incrément angulaire
$\Delta \tau$ :	Pas de temps
$\theta$ :	Coordonnée polaire
$\mu$ :	Viscosité dynamique du fluide
$\mu\text{-g}$ :	Milieu microgravitationnel
$\nu$ :	Viscosité cinématique du fluide
$\rho$ :	Masse volumique du fluide
$\sigma$ :	Tension superficielle
$\tau$ :	Temps dimensionnel
$\tau^*$ :	Temps adimensionnel



$\tau_o$ :	Période des oscillations
$\tau_y$ :	Contraintes de cisaillement
$\Phi$ :	Variable physique dépendante (Éqn. 4.1)
$\phi_1$ :	Fonction de dissipation d'énergie
$\psi$ :	Fonction de courant
$\epsilon_y$ :	Contraintes de déformation

**Indices:**

<b>M:</b>	se rapporte à la température de fusion $t_m$
<b>E, W, N,</b> <b>S, T, B</b>	désignent les noeuds adjacents du point P considéré
<b>P:</b>	désigne le noeud considéré
<b>e, w, n,</b> <b>s, t, b</b>	désignent les interfaces d'un volume de contrôle, ou les centres géométriques des interfaces
<b>r, z, <math>\theta</math></b> ou <b>R, Z, <math>\theta</math></b>	se réfèrent respectivement à la direction radiale, axiale et circonférentielle
<b>ref</b>	se rapporte à la grandeur de référence
<b>max</b>	valeur maximale
<b>1, 2</b>	désignent les disques 1 et 2

## ANNEXE B

### ANALYSE ADIMENSIONNELLE DE L'ÉQUATION D'ÉNERGIE

Pour un écoulement laminaire incompressible, l'équation d'énergie, en 3D, s'écrit sous forme dimensionnelle selon:

$$\rho_m C_p \frac{Dt}{D\tau} - \frac{Dp}{D\tau} = k_m \nabla^2 t + \phi_i \quad (\text{B. 1})$$

où les opérateurs mathématiques  $\nabla^2$  et  $D/D\tau$  sont donnés respectivement par les équations (3.6 a et b).  $\phi_i$ , la fonction de dissipation d'énergie due aux forces visqueuses dans le fluide, est donnée par:

$$\phi_i = 2\mu_m \left[ \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)^2 + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \right] \quad (\text{B. 2})$$

Dans l'équation (B. 1), le terme  $Dp / D\tau$  représente en fait le travail des forces de pression.

En utilisant les variables adimensionnelles définies par (3.26 a) à (3.26 e), on obtient alors la forme adimensionnelle de l'équation (B. 1) comme suit:

$$\frac{DT}{D\tau'} - Ec \left( \frac{DP}{D\tau'} \right) = \frac{1}{Ma} \nabla'^2 T + \frac{EcPr}{Ma} \Phi_i \quad (\text{B. 3})$$

où  $Ec$  est le nombre d'Eckert:

$$Ec = \frac{v_{mf}^2}{C_{pm}\Delta T} = \frac{\left[ \frac{\partial \sigma}{\partial t} \frac{\Delta T}{\mu_m} \right]^2}{C_{pm}\Delta T} \quad (B. 4)$$

Les nombres de  $Pr$  et de  $Ma$  sont donnés par (3. 54) et (3. 55) respectivement.

En étudiant l'ordre de grandeur de différents coefficients de l'équation (B. 3), le fluide utilisé est le  $NaNO_3$ , pour un cas typique caractérisé par:  $Pr = 8.9$ ;  $Ma = 10000$ , on obtient:

$$1 / Ma = 10^{-4}, \quad Ec \approx 10^{-6} \quad \text{et} \quad Ec Pr / Ma \approx 10^{-9}$$

On peut déduire que le nombre d'Eckert est faible par rapport aux autres paramètres tels que  $Ma$  et  $Pr$  de sorte que les termes qui sont multipliés par ce nombre d' Eckert dans l'équation d'énergie (B. 3) peuvent être négligés. Il importe de noter que cette analyse d'ordre de grandeur reste valide pour le Silicone.

## ANNEXE C

### DÉRIVATION DES CONDITIONS AUX LIMITES SUR LA SURFACE LIBRE POUR LE CAS 2D AXISYMETRIQUE

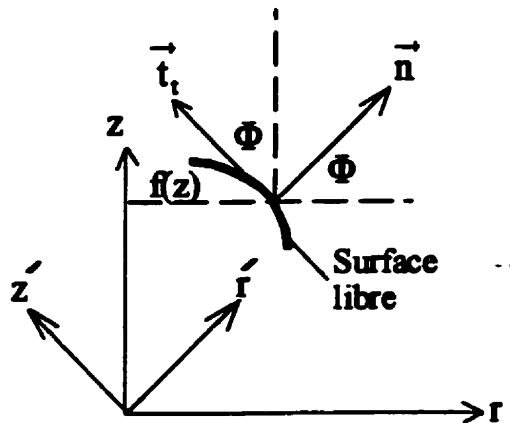


Figure C. 1 Relation entre  $(r, z)$  et  $(r', z')$

Soit  $\Phi$  l'angle entre le système des coordonnées  $(r, z)$  et celui de  $(r', z')$ . Les coordonnées  $(r', z')$  sont choisies de la manière suivante:

$(r', 0)$  est normale à la surface libre

$(0, z')$  est tangente à la surface libre

Les vecteurs unitaires normales et tangentiels s'écrivent comme suit:

$$\vec{t}_t = \frac{-\sin\Phi \vec{r} + \cos\Phi \vec{z}}{\sqrt{\cos^2\Phi + \sin^2\Phi}} = \frac{-\text{tg}\Phi \vec{r} + \vec{z}}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\Phi}} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \vec{r} + \vec{z}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \quad (\text{C. 1})$$

ou

$$\bar{t}_i = \left( \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \right) \quad (\text{C. 2})$$

$$\bar{n}_i = \left( \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \frac{-\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \right) \quad (\text{C. 3})$$

Le tableau 1 résume le cosinus des angles entre les deux systèmes de coordonnées.

	r	z
r	$l_1 = \cos r \cdot r$	$n_1 = \cos r \cdot z$
z	$l_2 = \cos z \cdot r$	$n_2 = \cos z \cdot z$

\* Équilibre des contraintes sur la surface libre selon la direction normale

D'après Lai (1984), l'équilibre des contraintes sur la surface libre selon la direction normale s'écrit comme suit:

$$-(p - p_-) + 2\mu \epsilon_{rr} = -\sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{C. 4})$$

$$-(p - p_-) + 2\mu (l_1^2 \epsilon_{rr} + n_1^2 \epsilon_{zz} + 2n_1 l_1 \epsilon_{rz}) = -\sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{C. 5})$$

où  $\epsilon_y$  : sont les contraintes de déformation

$R_1$  et  $R_2$  sont les rayons principales de courbure et ils sont donnés par les expressions suivantes (Adamson 1982):

$$\frac{1}{R_1} = \left( \frac{-\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right]^{3/2}} \right) \quad (\text{C. 6})$$

$$\frac{1}{R_2} = \left( \frac{1}{f \left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right]^{3/2}} \right) \quad (\text{C. 7})$$

Après substitution, l'équation (C. 5) devient:

$$p - p_0 - \frac{2 \mu_M}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right]} \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right] = \frac{\sigma_M}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right]^{3/2}} \left[ \frac{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}{f} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right] \quad (\text{C. 8})$$

\* Équilibre des contraintes sur la surface libre selon la direction tangentielle

$$2\mu \epsilon_{rz} = \frac{\partial \sigma}{\partial z} = - \left| \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right| [(\nabla t) \cdot \bar{t}_t] \quad (\text{C. 9})$$

$$2\mu [l_1 l_2 \epsilon_{rr} + n_2 n_1 \epsilon_{zz} + (n_2 l_1 + l_2 n_1) \epsilon_{rz}] = - \left| \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right| [(\nabla t) \cdot \bar{t}_t] \quad (\text{C. 10})$$

ou:

$$\frac{\partial f}{\partial z} 2\mu_\nu \left[ \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] + \mu_\nu \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right] \left[ \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] = - \left| \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right| \left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \left[ \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial t}{\partial z} \right] \quad (\text{C. 11})$$

\* Condition thermique d'une surface libre adiabatique

$$- (k \bar{n} \nabla t) = 0 \quad (\text{C. 12})$$

ou

$$-k \left[ \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}} \right] \left( \frac{\partial t}{\partial r} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial t}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{C. 13})$$

\* Condition de flux massique nulle le long de la surface libre

$$(\bar{v} \cdot \bar{n}) = 0 \quad (\text{C. 14})$$

ou

$$\left[ \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}} \right] \left( v_r - \frac{\partial f}{\partial z} v_z \right) = 0 \quad (\text{C. 15})$$



## ANNEXE D

### ORDRE DE GRANDEUR DE $(\partial F / \partial Z)^2$

Z	$(\partial F / \partial Z)^2$
2.263993E-02	1.721036E-01
4.143351E-02	1.044209E-01
6.189856E-02	6.203249E-02
8.360512E-02	3.424177E-02
1.063164E-01	1.654359E-02
1.298789E-01	6.161818E-03
1.541840E-01	1.149633E-03
1.791501E-01	3.177233E-05
2.047136E-01	1.633493E-03
2.308231E-01	4.991773E-03
2.574364E-01	9.302360E-03
2.845178E-01	1.389270E-02
3.120369E-01	1.820756E-02
3.399676E-01	2.179818E-02
3.682869E-01	2.432189E-02
3.969745E-01	2.554639E-02
4.260124E-01	2.535689E-02
4.553844E-01	2.375402E-02
4.850760E-01	2.086946E-02
5.149240E-01	1.700370E-02
5.446156E-01	1.282434E-02
5.739876E-01	8.920008E-03
6.030256E-01	5.539975E-03
6.317131E-01	2.859719E-03
6.600324E-01	1.017570E-03
6.879631E-01	1.005989E-04
7.154822E-01	1.385252E-04
7.425636E-01	1.096341E-03
7.691768E-01	2.871715E-03
7.952864E-01	5.293610E-03
8.208499E-01	8.124125E-03
8.458160E-01	1.106188E-02
8.701211E-01	1.375259E-02

8.936836E-01	1.579232E-02
9.163949E-01	1.675282E-02
9.381015E-01	1.619718E-02
9.585665E-01	1.374180E-02
9.773601E-01	9.190997E-03
9.931340E-01	2.889647E-03

**ANNEXE E**

**RÉSULTATS OBTENUS EN 2D POUR UNE ZONE FLOTTANTE DE  
NaNO<sub>3</sub>, OPÉRANT EN  $\mu$ -g (Ma = 7500, 20000)**

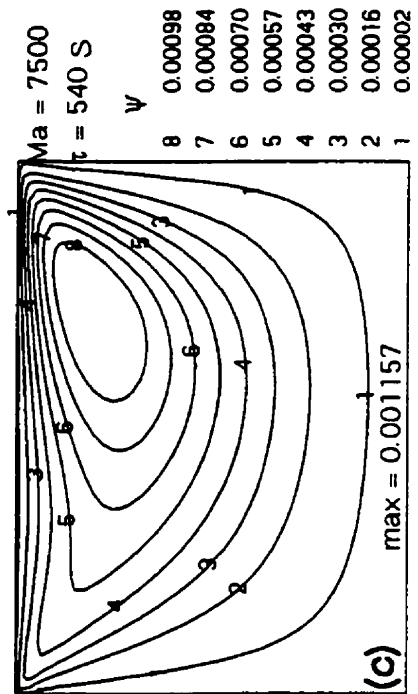
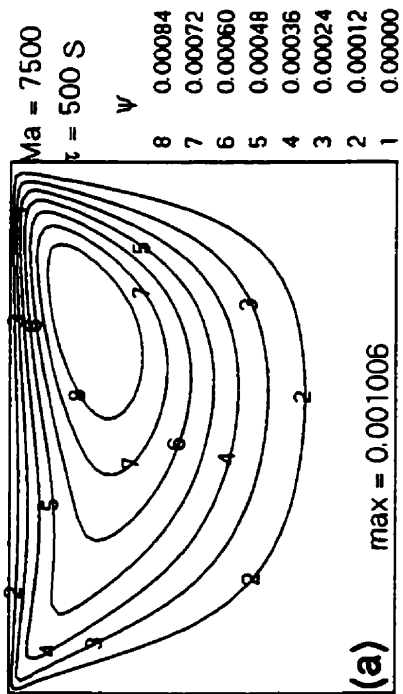
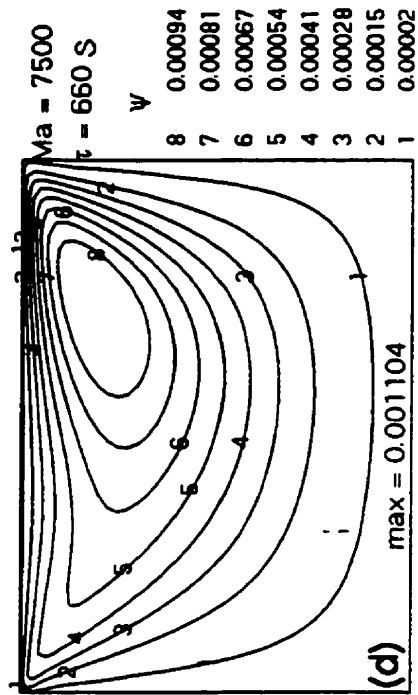
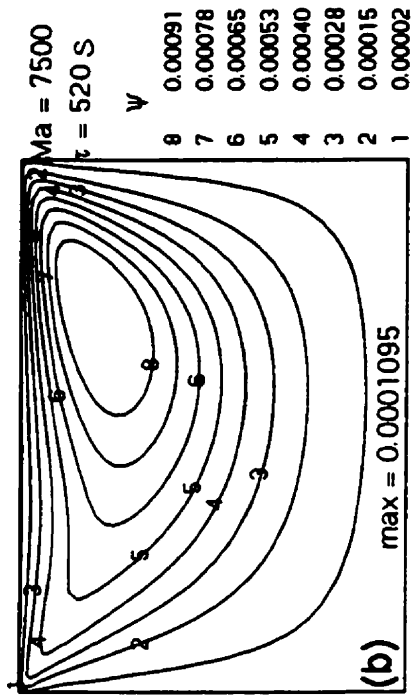


Figure E.1 Évolution temporelle de la structure des lignes de courant pour  $Ma = 7500$ ,  $\mu-g$

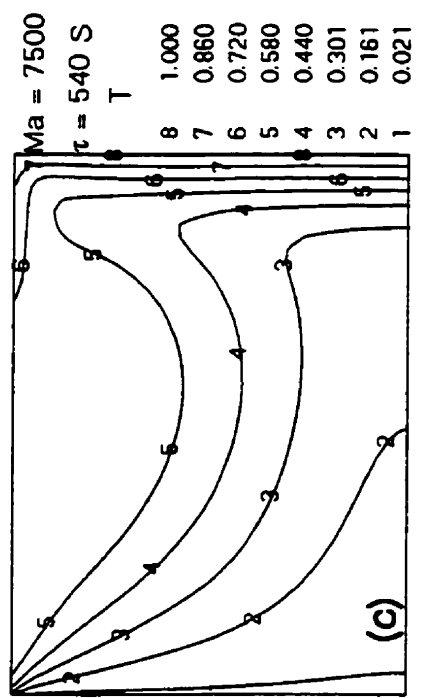
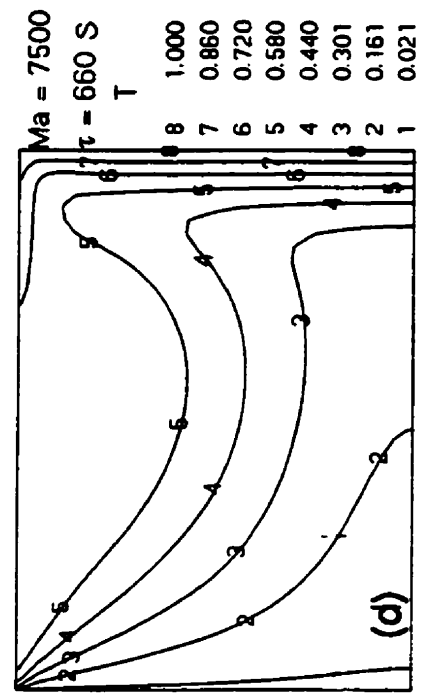
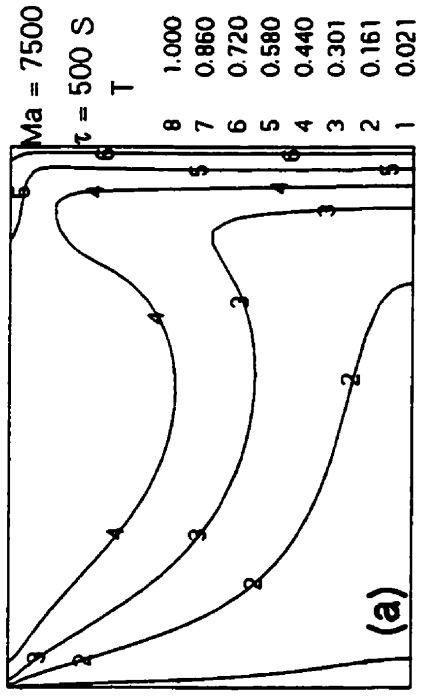
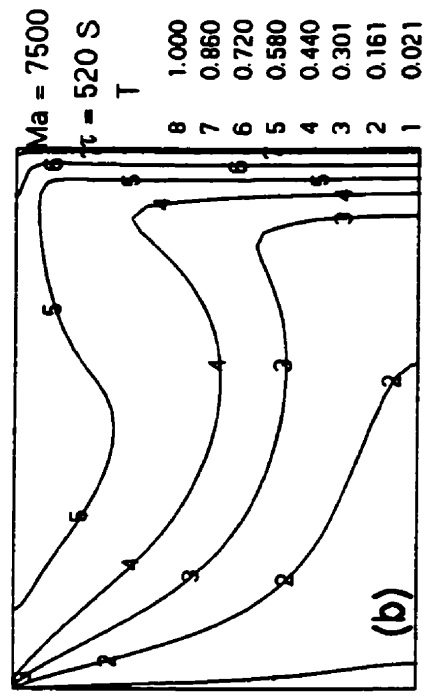


Figure E.2 Évolution temporelle du champ thermique pour Ma = 7500,  $\mu$ -g

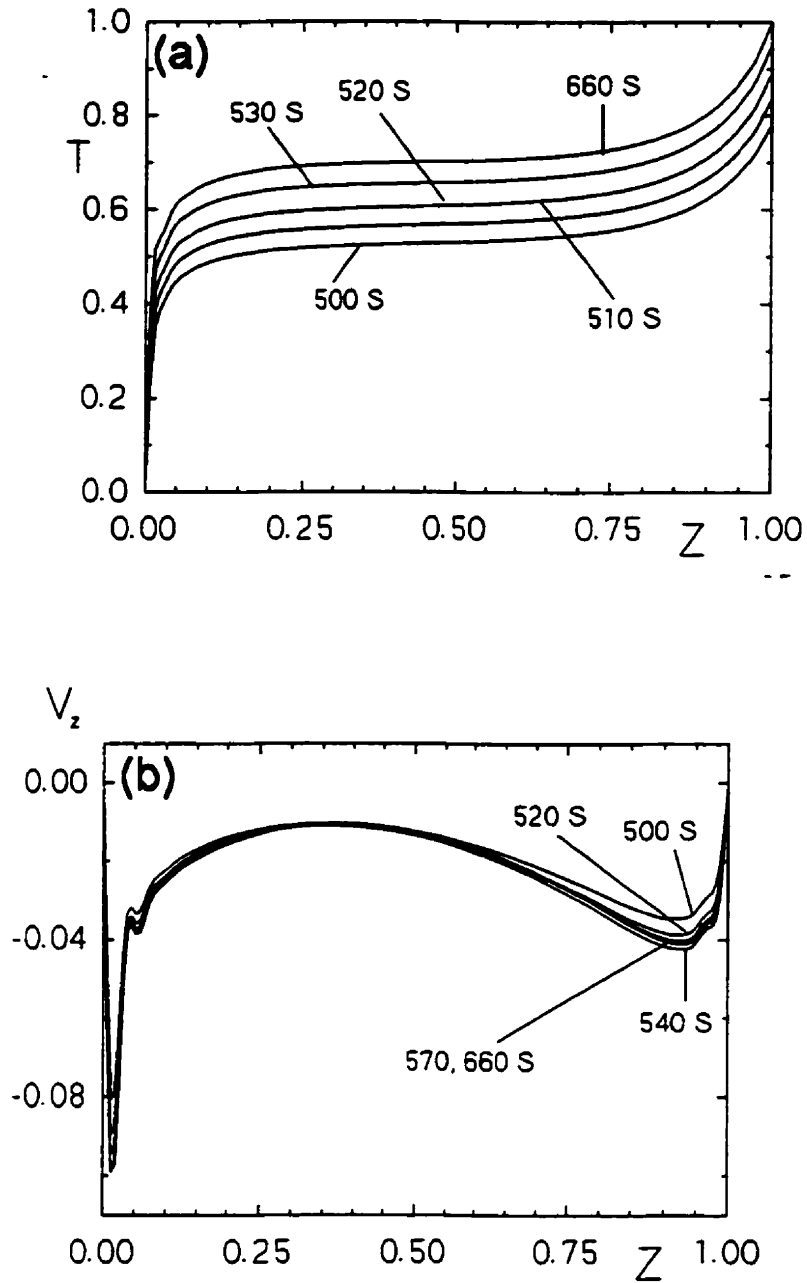


Figure E.3 Évolution temporelle de la température et de la vitesse axiale le long de la surface libre pour  $Ma = 7500$ ,  $\mu-g$

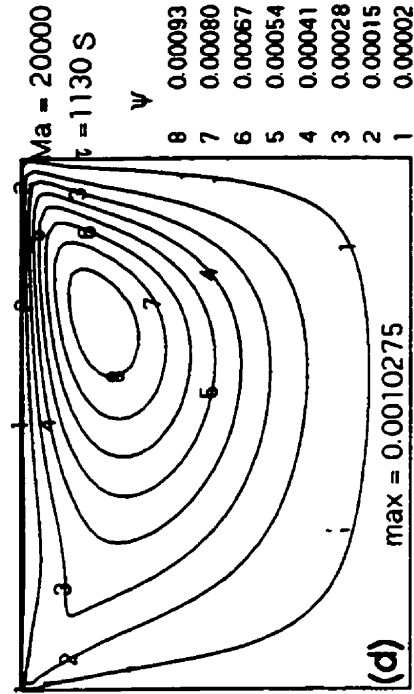
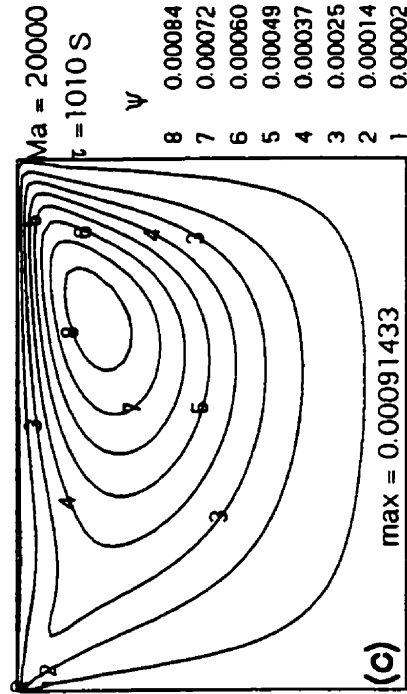
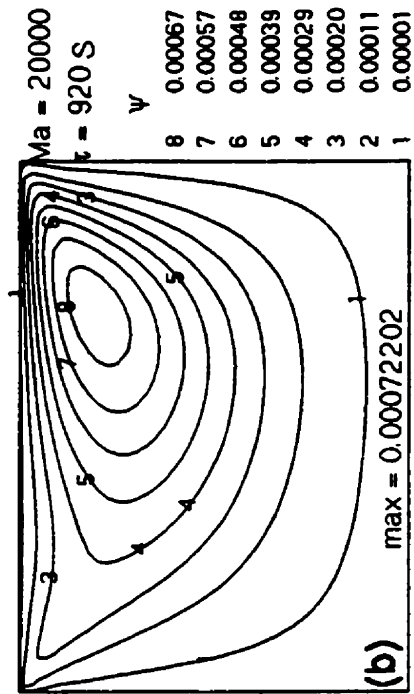
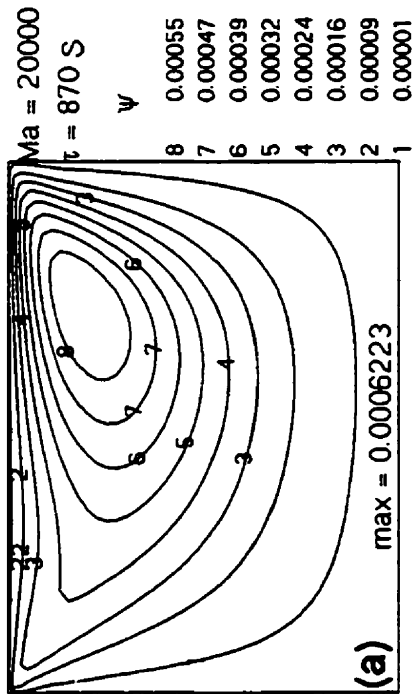


Figure E.4 Évolution temporelle de la structure des lignes de courant pour  $Ma = 20000$ ,  $\mu-g$

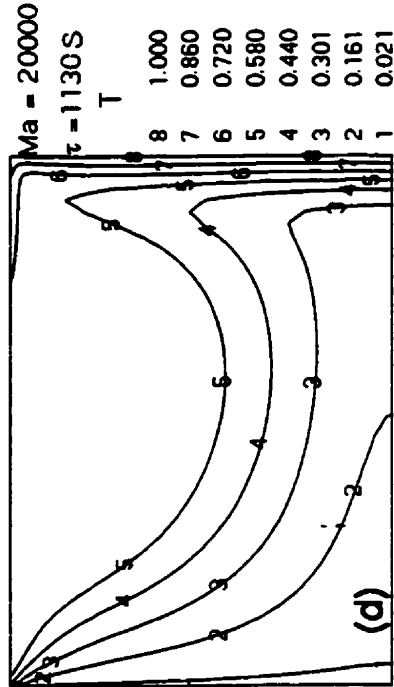
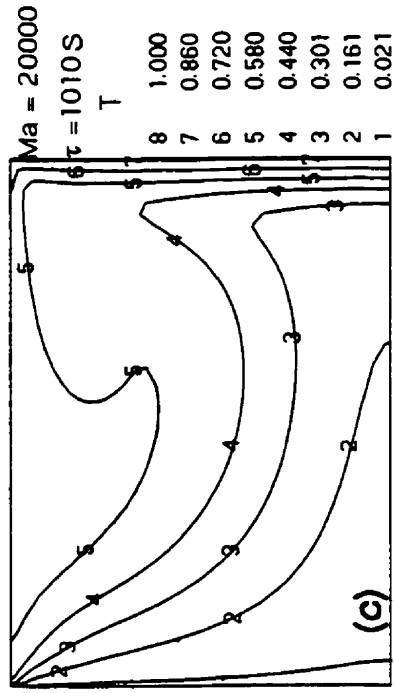
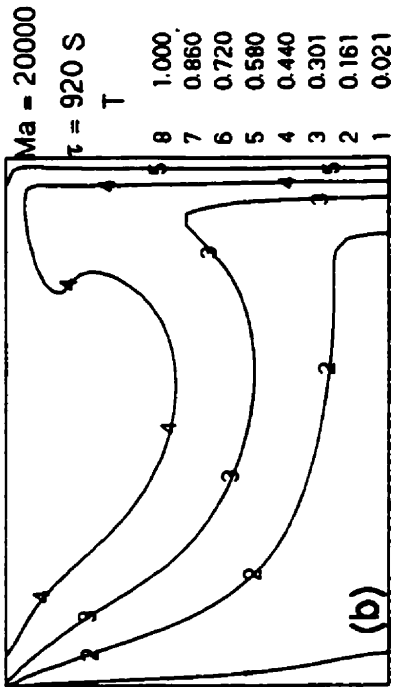
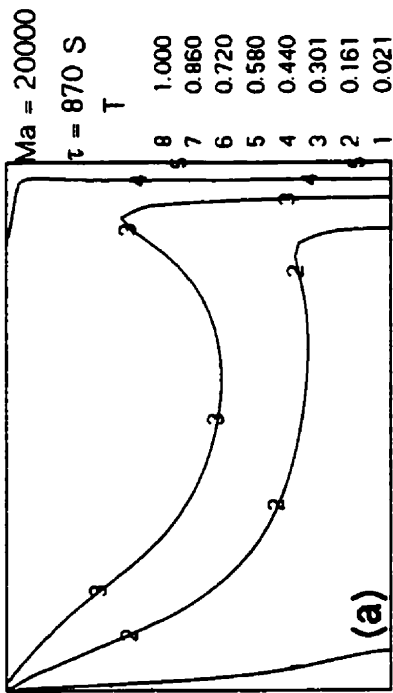


Figure E.5 Évolution temporelle du champ thermique pour Ma = 20000,  $\mu$ -g



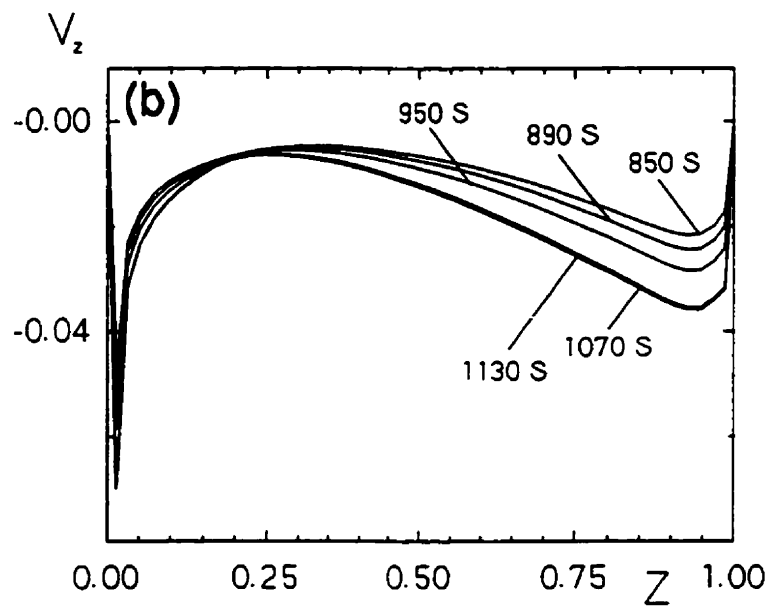
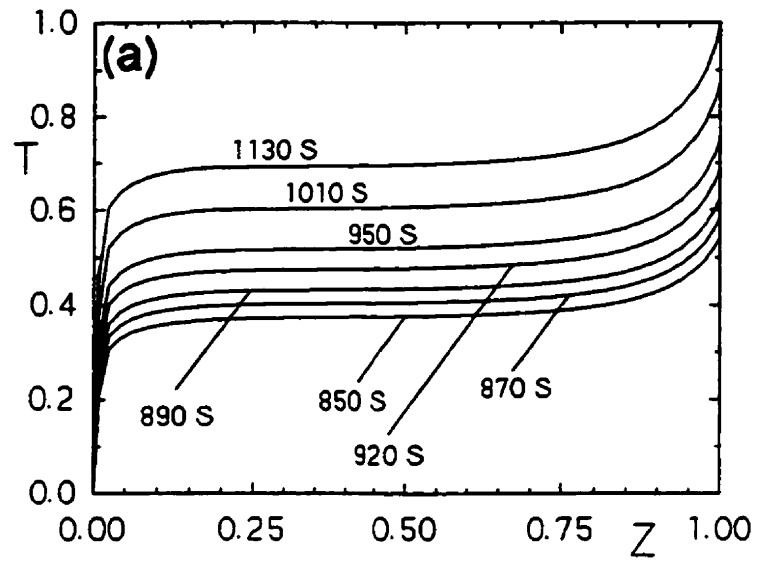


Figure E.6 Évolution temporelle de la température et de la vitesse axiale le long de la surface libre pour  $Ma = 20000$ ,  $\mu$ -g

## **ANNEXE F**

**ÉVOLUTION TRANSITOIRE DU CHAMP THERMIQUE POUR UNE  
ZONE FLOTTANTE DE NaNO, OPÉRANT EN 1-g (Ma = 2500,7500 et  
20000)**

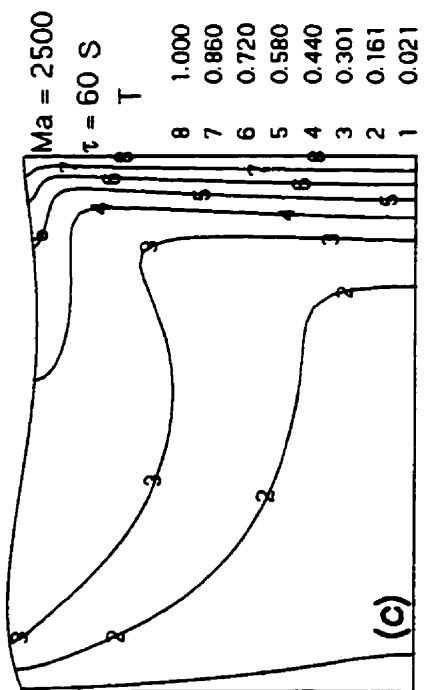
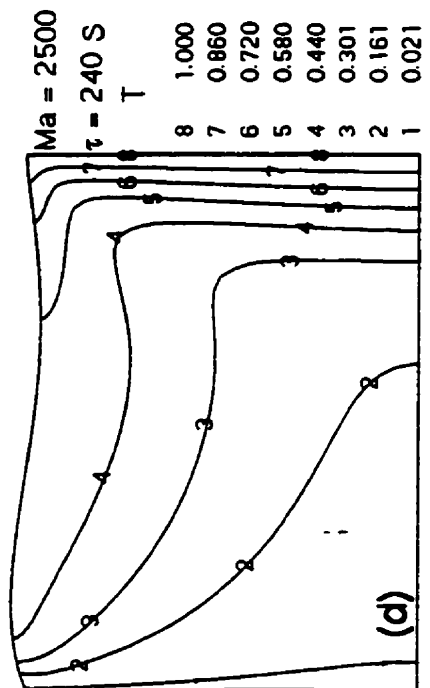
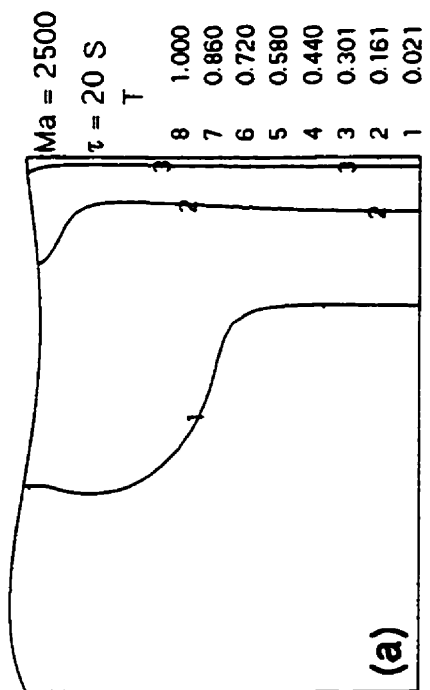
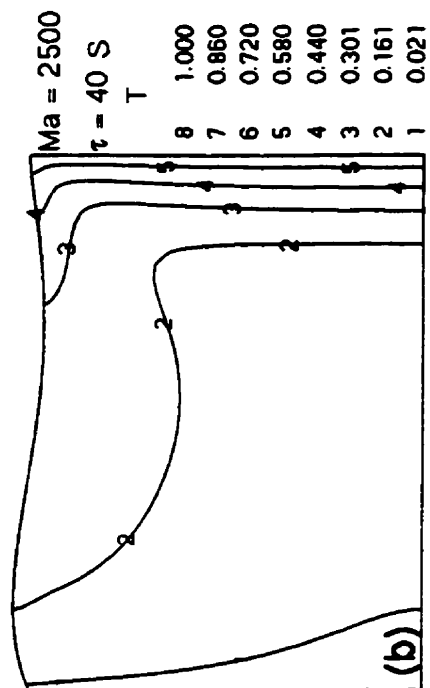


Figure F.1 Évolution temporelle du champ thermique pour  $Ma = 2500$ , 1-g

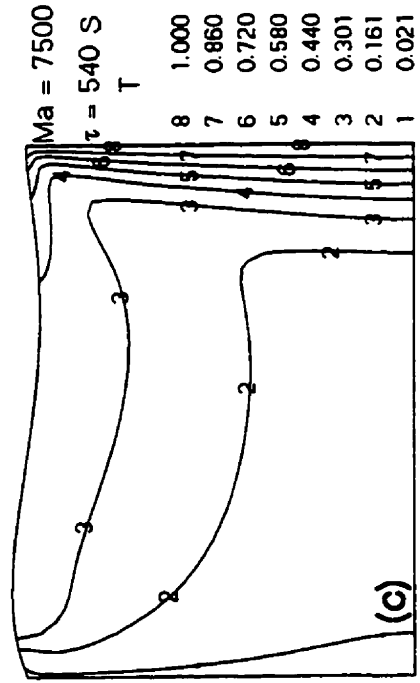
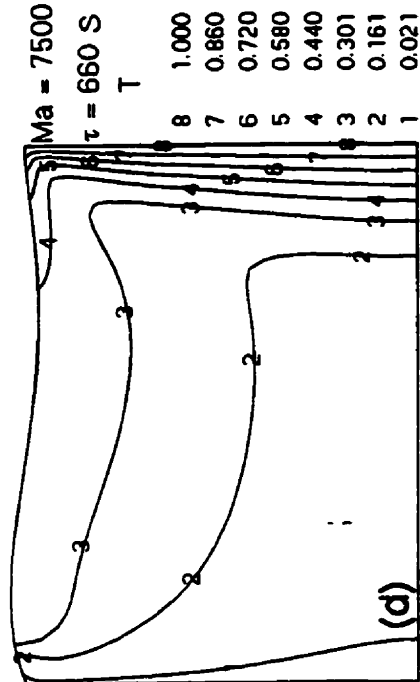
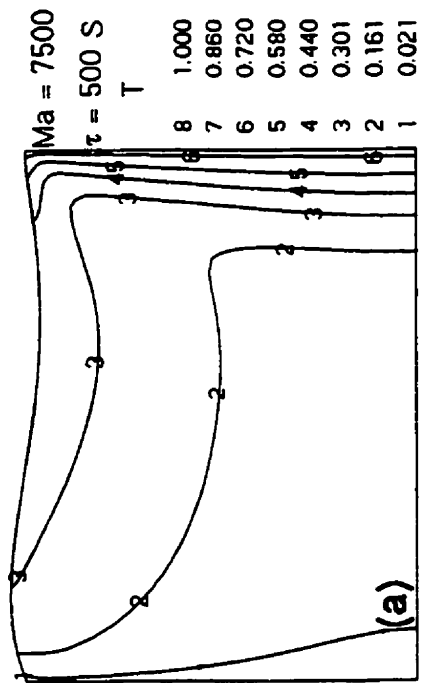
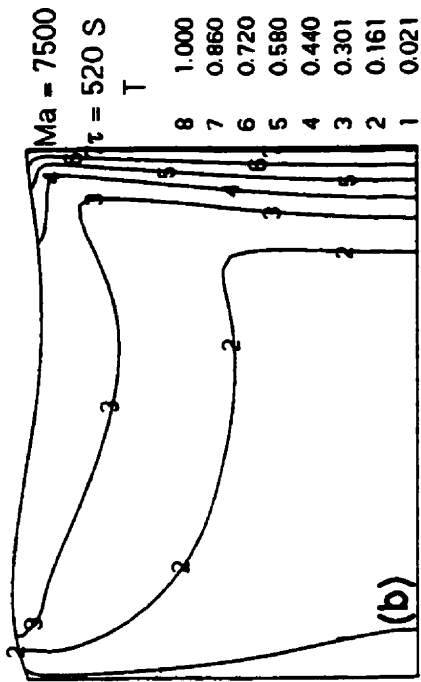


Figure F.2 Évolution temporelle du champ thermique pour  $Ma = 7500$ , 1-g

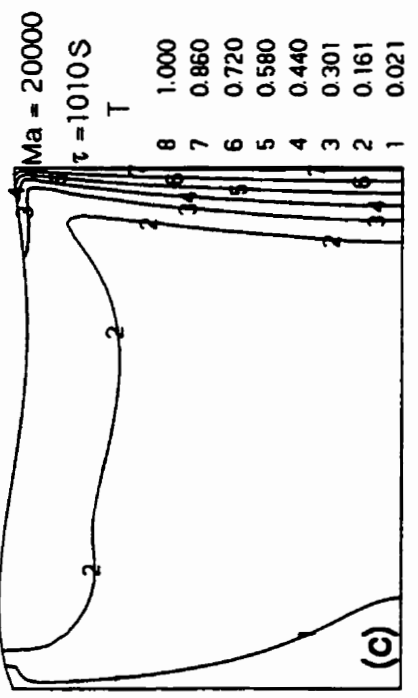
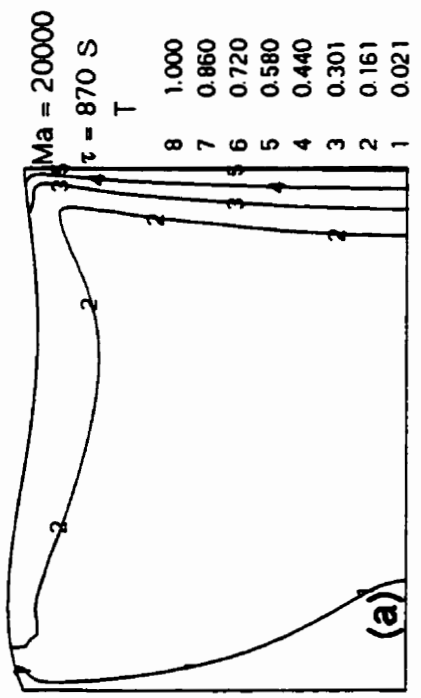
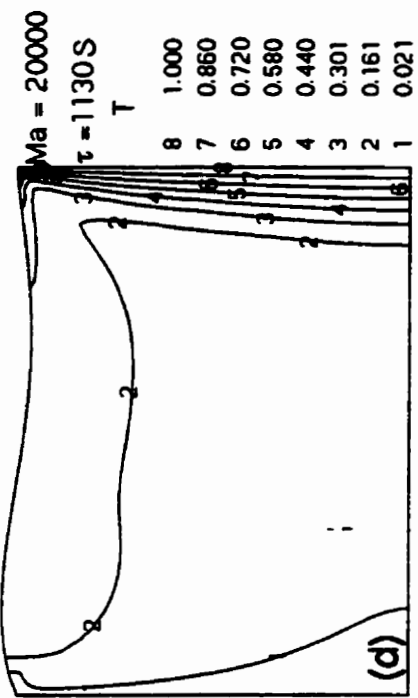
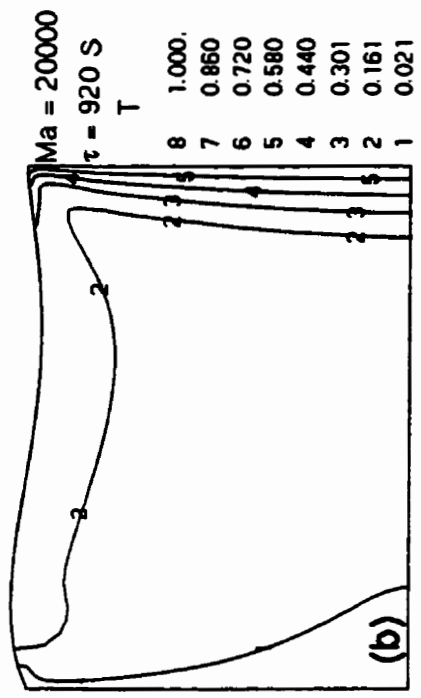


Figure F.3 Évolution temporelle du champ thermique pour Ma = 20000, 1-g

## ANNEXE G

### RÉSULTATS OBTENUS EN 2D POUR LE SILICONE, $Ma = 256$

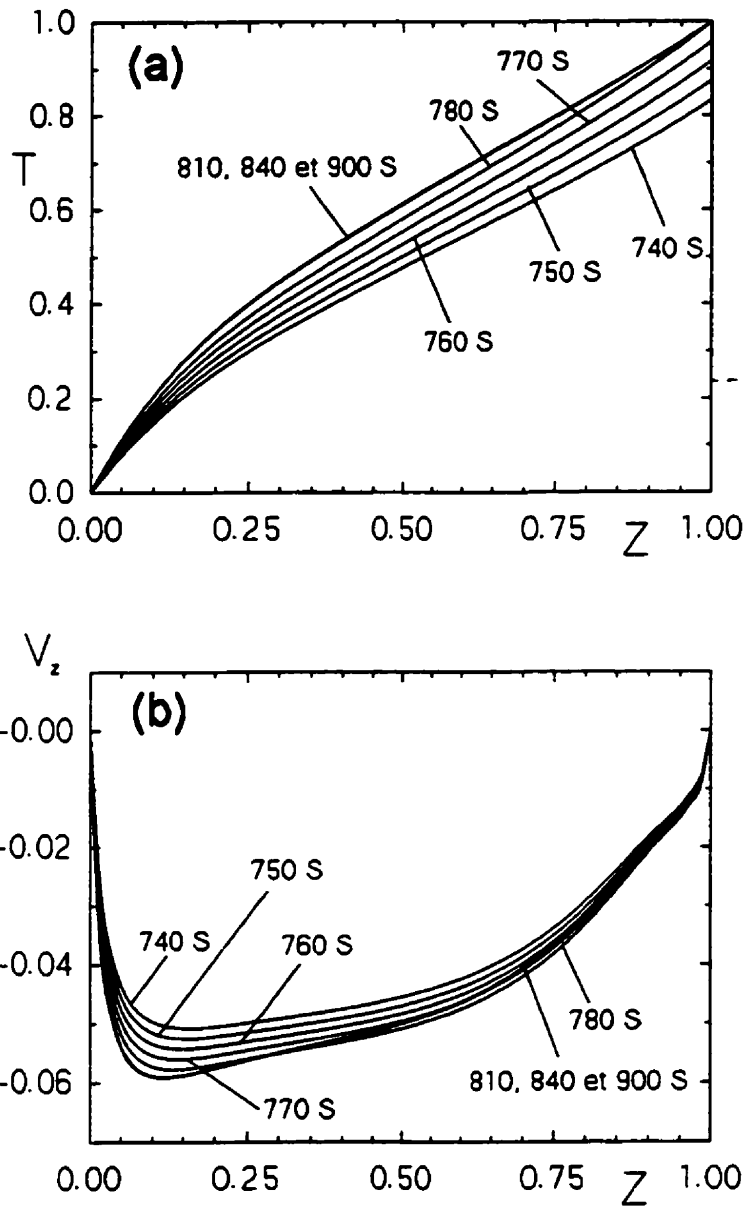


Figure G.1 Évolution temporelle de la température et de la vitesse axiale le long de la surface libre pour  $Ma = 256$ ,  $\mu$ -g

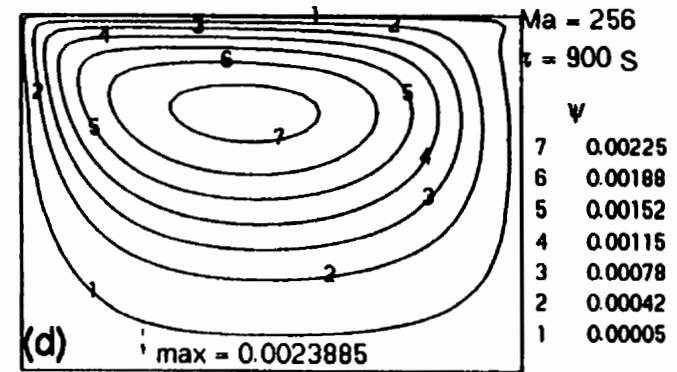
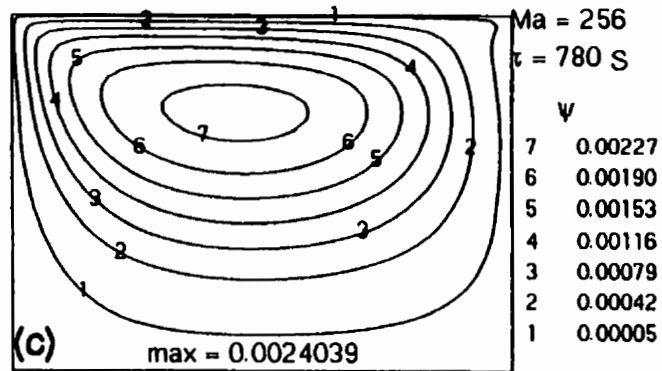
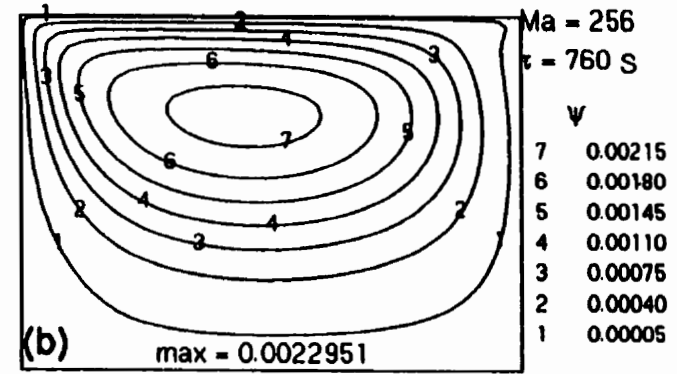
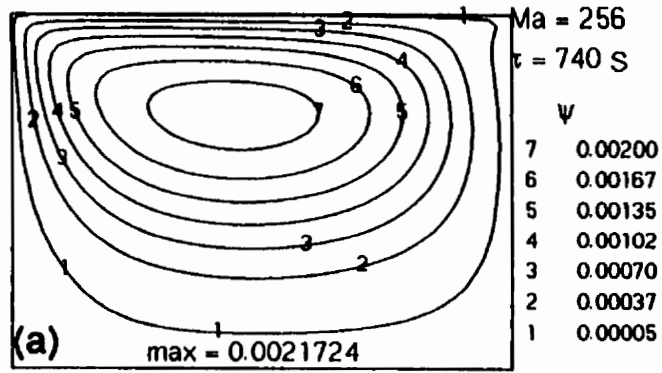


Figure G.2 Évolution temporelle de la structure des lignes de courant pour  $Ma = 256$ ,  $\mu$ -g

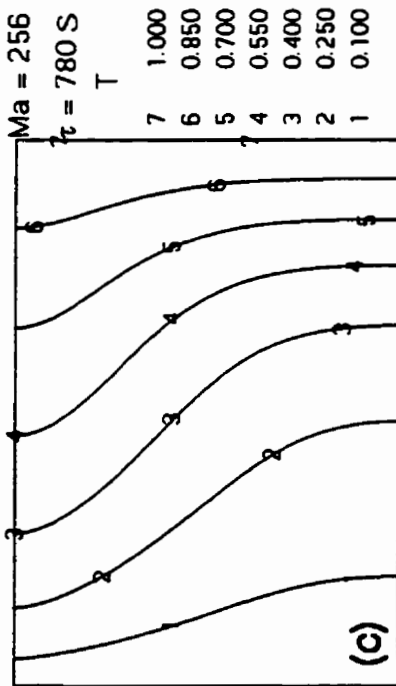
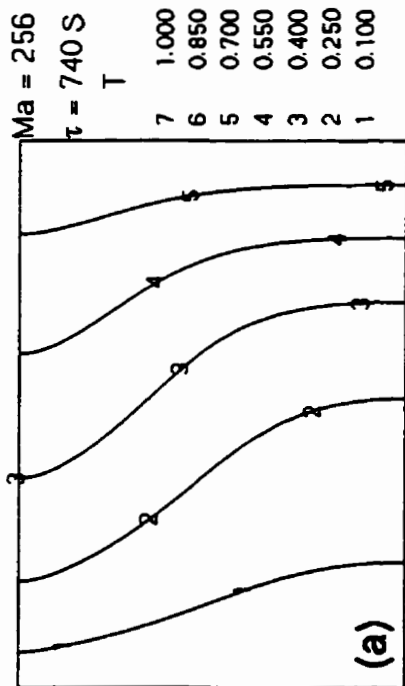
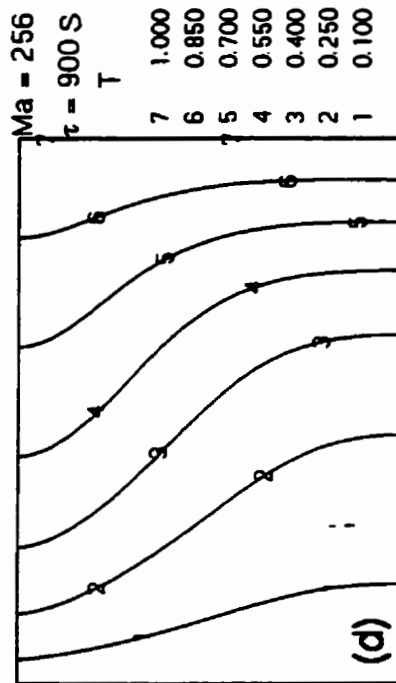
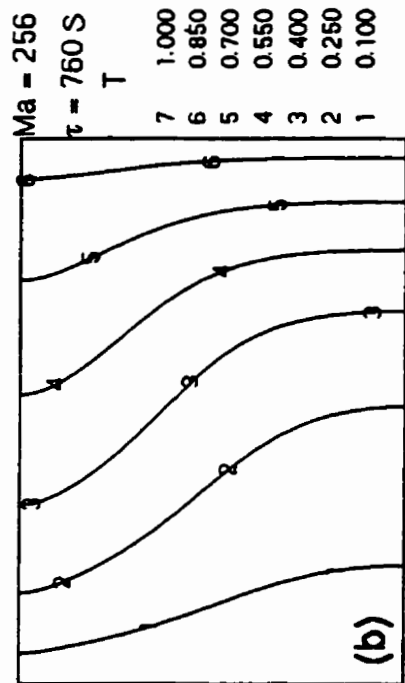


Figure G.3 Évolution temporelle du champ thermique pour  $Ma = 256$ ,  $\mu$ -g



## RÉFÉRENCES

- ADAMSON, P. (1982) *Physical chemistry of surface*, 4<sup>ème</sup> édition, New York.
- BOUDREAU, R. (1984) *Numerical Simulation of Convection in the Microgravity Environment*, ESA SP 222, p. 259-264.
- CARLBERG, T. (1986) *Floating Zone Experiments with Germanium Crystals in Sounding Rockets*, Acta Astronautica, vol. 13, p. 639-643.
- CARRUTHERS, J. R., GRASSO, M. (1972) *Studies of Floating Liquid Zones in Simulated Zero Gravity*, J. Appl. Phys., vol. 43, No. 2, p. 436-443.
- CARRUTHERS, J.R., WITT, A.F., (1975) *Crystal Growth and Characterization*, Ed. R. Veda and J. B. Mullin, North Holland, Amsterdam.
- CARRUTHERS, J.R., (1976) *The Applications of Drops and Bubbles to the Science and Space Processing of Materials*, Bell Laboratories, New Jersey.
- CARRUTHERS, J. R. (1977) *Studies of Rotating Liquid Floating Zones on Skylab IV*, Prog. Astronaut. Aeronaut., vol. 52, p. 207-221.
- CHANG, C.E., WILCOX, W.R. (1975) *Inhomogeneities due to Thermocapillary Flow in Floating Zone Melting*, J. Crystal Growth, vol. 28, p. 8-12.
- CHANG, C.E., WILCOX, W.R. (1976) *Analysis of Surface Tension Driven Flow in Floating Zone Melting*, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 19, No. 3, p. 355-366.
- CHEN, G., ROUX, B. (1992) *Instability of Thermocapillary Convection in Floating Zones* Proc. 8th European Symp. On Material and Fluid Sciences in Microgravity, ESA SP-333.
- CHEN, H., SAGHIR, M. Z. (1994) *Three-Dimensional Marangoni Convection in the Asymmetrically Heated Float Zone* Micrograv. Q.4, p. 39.
- CHUN, CH. H. (1980) *Marangoni Convection in a Floating Zone under Reduced Gravity*, J. Crystal Growth, vol. 48, p. 600-610.
- CHUN, CH. H. (1984) *Verification of Turbulence Developing From the Oscillatory Marangoni Convection in a Liquid Column* Proc. 5th European Symp. On Material and Fluid Sciences in Microgravity, ESA SP-222, p. 271 - 280 .

CHUN, CH. H. (1985) *Numerical Study of the Thermal Marangoni Convection and Comparison with Experimental Results from the Texas-Rocket Program*, Acta Astronautica, vol. 11, No. 3-4, p. 227-232.

CHUN, C.H., SCHWABE, D. (1982) *Marangoni Convection in Floating Zones*, in Convective Transport and Instability Phenomena, Ed. J. Zierep et al., p. 277-317. Braun, Karlsruhe.

CHUN, CH. H., WUEST, W. (1979) *Flow Phenomena in Rotating Floating Zones with and without Marangoni Convection*, Proc. 3rd European Symposium on Materials Sciences in Space, ESA SP-142, p. 283-288.

CHUN, CH. H., WUEST, W. (1981) *Correlation of Oscillations of Flow and Temperature in Floating Zone under Microgravity*, Adv. Space Res., vol. 1, No. 5, p. 17-20.

CHUN, CH. H., WUEST, W. (1982) *Suppression of Temperature Oscillations of Thermocapillary Marangoni Convection in a Floating Zone by Superimposing of Rotating Flows*, Acta Astronautica, vol. 9, No. 4, p. 225-230.

CHUN, CH. H., WUEST, W. (1983) *Free-Surface Vibration of a Floating Zone Induced by Surface-Tension-Driven Oscillating Flow*, Proc. 4th European Symposium on Materials Sciences under Microgravity, ESA SP-191, p. 205-211.

CLARK, P.A., WILCOX, W.R. (1980) *Influence of Gravity on Thermocapillary Convection in Floating Zone Melting of Silicon*, J. Crystal Growth, vol. 50, p. 461-469.

CRÖLL, A., MÜLLER-SEBERT, W., NITSCHKE, R. (1989) *The Critical Marangoni Number for the Onset of Time-dependent Convection in Silicone Materials* Res. Bull, vol. 24 p.995-1004.

CRÖLL, A., MÜLLER-SEBERT, W., NITSCHKE, R. (1990) *Transition from Steady to Time-Dependent Marangoni Convection in Partially Coated Silicon Melt Zone*, ESA SP- 295, p. 263-269.

DURANCEAU, J., BROWN, R. (1986) *Thermal-Capillary Analysis of Small-Scale Floating Zone : Steady-State Calculations*, J. Crystal Growth, vol. 75, p. 367-389.

EYER, A., LEISTE, H. (1985) *Striation-Free Silicon Crystals by Float-Zoning with Surface-Coated Melt*, J. Crystal Growth, vol. 71, p. 249-252.

FU, B.I., OSTRACH, S. (1983) *Numerical Simulation of Thermocapillary Flows in Floating Zones*, in Transport Phenomena in Materials Processing, ASME PED- vol. 10, HTD- vol. 29.

HARIZ, W. (1995) *Étude Numérique des Effets de l'Iso-rotation sur une Zone Flottante du Germanium dans un Champ Gravitationnel Normal et Réduit*, Mémoire de Maîtrise, Université de Moncton, NB, Canada.

HARRIOT, G. M., BROWN, R. A. (1983) *Flow in a Differentially Rotated Cylindrical Drop at Low Reynolds Number*, J. Fluid Mech., vol. 126, p. 269-285.

HARRIOT, G. M., BROWN, R. A. (1984) *Flow in a Differentially Rotated Cylindrical Drop at Moderate Reynolds Number*, J. Fluid Mech., vol. 144, p. 403-418.

HU, W.R. (1988) *The Influence of Buoyancy on the Oscillatory Thermocapillary Convection with Small Bond Number*, 39th IAF Congress, Paper No. IAF-88-365.

HU, W. R., TANG, Z. M. (1990) *Thermocapillary Convection in Floating-Zone Simulation*, Proc. 7th European Symposium on Materials and Fluid Sciences in Microgravity, ESA SP-295, p. 279-284.

HYER, J.R., JANKOWSKI, D.F., NEITZEL, G.P. (1991) *Thermocapillary Convection in a Model Floating Zone*, J. Thermophysics Heat Transfer, vol. 5, No. 4, p. 577-582.

JORDAN, A.S., CARUSO, R., VON NEIDA, A. R. (1980) *A Thermoelastic Analysis of Dislocation Generation in Pulled Ga As Crystals*, The Bell System Tech. Journal, vol.59, no.4, p. 593-637.

KAMOTANI, Y., KIM, J. (1988) *Effect of Zone Rotation on Oscillatory Thermocapillary Flow in Simulated Floating-Zones*, J. Crystal Growth, vol. 87, p. 62-68.

KAMOTANI, Y., LEE, K.J. (1989) *Oscillatory Thermocapillary Flow in a Liquid Column Heated by a Ring Heater*, Physico-Chemical Hydrodynamics, vol. 11, p. 729-736.

KAMOTANI, Y., OSTRACH, S., VARGAS, M. (1984) *Oscillatory Thermocapillary Convection in a Simulated Floating-Zone Configuration*, J. Crystal Growth, 1984, p. 83-90.

KAZARINOFF, N.D., WILKOWSKI, J.S. (1989) *A Numerical Study of Marangoni Flows in Zone-Refined Silicon Crystals*, Phys. Fluids, vol. A1, p. 625-627.

KAZARINOFF, N.D., WILKOWSKI, J.S. (1990a) *Marangoni Flows in a Cylindrical Liquid Bridge of Silicon*, in Numerical Simulation of Oscillatory Convection in Low Pr Fluids, p. 65-73, Ed. B. Roux, Vieweg, Braunschweig.

KAZARINOFF, N.D., WILKOWSKI, J.S. (1990b) *Period Tripling and Subharmonic Oscillations in Marangoni Flows in a Cylindrical Liquid Bridge*, in Proc. Int. Symp. on

Asymptotic Comput. Anal., vol. 24 of Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Ed. R. Wong, p. 265-283.

KAZARINOFF, N.D., WILKOWSKI, J.S. (1990c) *Bifurcation of Numerically Simulated Thermo-capillary Flows in Axially Symmetric Float Zones*, Phys. Fluid, vol. A2, No. 10.

KOZHOUKHAROVA, ZH., SLAVCHEV, S. (1986) *Computer Simulation of the Thermocapillary Convection in a Non-Cylindrical Floating Zone*, J. Crystal Growth, vol. 74, p. 236-246.

KUHLMANN, H.C., RATH, H.J. (1993) *Hydrodynamic Instabilities in Cylindrical Thermocapillary Liquid Bridges*. J. Fluid Mech. vol. 247, p. 247-274.

LAI, C. L. (1984), *Studies of Thermocapillary Oscillation Phenomena*, Ph.D. Thesis, Case Western Reserve University, Cleveland, Ohio, U.S.A.

LAN, C.W., KIM, Y.J., KOU, S. (1990) *Half-Zone Study of Marangoni Convection in Floating Zone Crystal Growth under Microgravity*, J. Crystal Growth, vol. 104, No. 4, p. 801-808.

LAN, C.W., KOU, S. (1990) *Thermocapillary Flow and Melt/Solid Interfaces in Floating Zone Crystal Growth under Microgravity*, J. Crystal Growth, vol. 102, p. 1043-1058.

LEVENSTAM, M., AMBERG, G. (1995) *Hydrodynamical Instabilities of Thermocapillary Flow in a Half-Zone*. J. Fluid Mech., vol. 297, p. 357-372.

MCNEIL, TH. J. et AL. (1985), J. Amer. Ceramic Soc., vol. 68, p. 254.

MONTI, R., FORTEZZA, R. (1991) *The Scientific Results of the Experiment on Oscillatory Marangoni Flow Performed in Telescience on Texas 23*, Micrograv. Q.1, p.163

MONTI, R., NAPOLITANO, L.G., RUSSO, R. (1983) *Influence of the Geometry on the Oscillatory Marangoni Flows*, ESA SP 191, p. 219-228.

NAPOLITANO, L.G. (1982) *Surface and Buoyancy Free Convection*, Acta Astronautica, vol. 9, No. 4, p. 199-215.

NAPOLITANO, L.G., MONTI, R. (1987) *Surface Driven Flows: Recent Theoretical and Experimental Results*, ESA SP 256, p. 551-555.

NAPOLITANO, L.G., VIVIANI, A. (1992) *Marangoni-Stokes Flow in Axisymmetric Bridges*. Micrograv. Q.2, p. 179.

NEITZEL, G.P., LAW, C.C., JANKOWSKI, D.F., MITTELMANN, H.D. (1991) *Energy Stability of Thermocapillary Convection in a Model of the Float-Zone Crystal Growth Process* Phys. Fluids vol. 3, p. 2841.

NEITZEL, G.P., CHANG, D.F., JANKOWSKI, D.F., MITTELMANN, H.D. (1992) *Linear Stability of Thermocapillary Convection in a Model of the Float-Zone Crystal Growth Process*. AIAA-92-0604.

NGUYEN, C. T., ORFI, J., BAZZI, H. (1994) *Étude de l'Instabilité d'une Zone Flottante Opérant dans les Conditions Critiques en 1-g et  $\mu$ -g*, Rapport préparé pour le compte de L'Agence Spatiale Canadienne (Contrat no. 9F007-3-6037/01-SW), 129p.

OKANO, Y., HATANO, A. AND HIRATA, A. (1989) *Natural and Marangoni Convection in a Floating Zone*, J. Chem. Engng. Japan, vol. 22, No. 4, p. 385-388.

OSTRACH, S. (1982) *Low-Gravity Fluid Flows*, Ann. Rev. Fluid Mech., vol. 14, p. 313-345.

OSTRACH, S., KAMOTANI, Y., LAI, C. L. (1985) *Oscillatory Thermocapillary Flows*, Physico-Chemical Hydrodynamics, vol. 6, p. 585-599.

PARKER, R.L. (1977) *Current Topics in Materials Science*, Ed. E. Kaldis and H. H. Scheel, vol. 2, North Holland, Amsterdam.

PATANKAR, S. V. (1980) *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corp./McGraw-Hill.

PATANKAR, S. V. (1996) *MicroCOMPACT V. 4.1- Reference Manual*, Innovative Research Inc., Maple Grove, Minnesota, USA.

PELTIER, L. J., BIRINGEN, S. (1993) *Time-Dependent Thermocapillary Convection in a Rectangular Cavity: Numerical Results for a Moderate Prandtl Fluid*, J. Fluid Mech., vol. 257, p. 339-357.

PFANN, W.G. (1966) *Zone Melting*, 2nd Edition, Wiley, New York.

PREISSER, F., SCHWABE, D., SCHARMANN, A. (1983) *Steady and Oscillatory Thermocapillary Convection in Liquid Columns with Free Cylindrical Surface*, J. Fluid Mech., vol. 126, p. 545-567.

RYBICKI, A., FLORIAN, J.M. (1987a) *Thermocapillary Effects in Liquid Bridges. I. Thermocapillary Convection* Phys. Fluids vol. 30, p. 1956.

- RYBICKI, A., FLORIAN, J.M. (1987b) *Thermocapillary Effects in Liquid Bridges. II. Deformation of the Interface and Capillary Instability* Phys. Fluids vol. 30, p. 1973 .
- RUPP, R., MÜLLER, G., NEUMANN, G. (1989) *Three-Dimensional Time-Dependent Modelling of the Marangoni Convection in Zone Melting Configuration of GaAs*, J. Crystal Growth, vol. 97, No. 1, p. 34-41.
- SAGHIR, M. Z., (1987), *A Study of the Marangoni Convection on the Germanium Float Zone*, Low Gravity Sciences, Sciences and Technologies Series, Amer. Astronautical Society AAS 86- 554, Vol. 67, p. 77-100.
- SAGHIR, M. Z. (1988) *High Purity Germanium Float Zone Modelling Report*, CAL Rpt. No. 388A-1012, 1988; see also Appl. Microgravity Tech., vol. 1, No. 2, p. 85-92.
- SAGHIR, M. Z., ROSENBLAT, S. (1990) *Numerical Simulation of Tetracosane and Cadmium Mercury Telleride in 1-g and 10<sup>-3</sup> g Environment*. Proc.7th European Symp. On Material and Fluid Sciences in Microgravity, ESA SP-295
- SAGHIR, M. Z., HIRATA, A. AND NISHIZAWA, S. (1992) *Experimental and Numerical Results of Silicone Oil Column in Earth Environment*, Proc. 8th Int. Symp. on Space Tech. and Sci., Kagoshima (Japan), p. 2193-2198.
- SAVINO, R., MONTI, R. (1996) *Oscillatory Marangoni Convection in Cylindrical Liquid Bridges* Phys. Fluids, vol.8, No 11, p. 2906 - 2922.
- SCHLICHTING, H. (1979) *Boundary Layer Theory*, 7th Edition, McGraw-Hill.
- SCHWABE, D. ET AL. (1978) *Experiments on Surface Tension Driven Flow in Floating Zone Melting*, J. Crystal Growth, vol. 43, p. 305-312.
- SCHWABE, D. (1988) *Surface- Tension- Driven Flow in Crystal Growth Melts*, Crystals, vol. 11, p. 75-112.
- SCHWABE, D., SCHARMANN, A. (1979) *Some Evidence for the Existence and Magnitude of a Critical Marangoni Number for the Onset of Oscillatory Flow in Crystal Growth Melts*, J. Crystal Growth, vol. 46, p. 125-131.
- SCHWABE, D., SCHARMANN, A. (1983) *Oscillatory Thermocapillary Convection in Floating Zones under Normal and Micro-Gravity*, Adv. Space Res., vol. 3, No. 5, p. 89-92.
- SCHWABE, D., SCHARMANN, A. (1984) *Microgravity Experiments on the Transition from Laminar to Oscillatory Thermocapillary Convection in Floating Zones*, Adv. Space Res., vol. 4, No. 5, p. 43-47.

SCHWABE, D., LAMPRECHT, R., SCHARMANN, A. (1989) *Experiments on Steady and Oscillatory Thermocapillary Convection in Space with Applications to Crystal Growth*, in Physico-Chemical Hydrodynamics : Interfacial Phenomena, Ed. M.G. Velarde, p. 291-310, Plenum Press.

SCHWABE, D., PREISSER, F., SCHARMANN, A. (1982) *Verification of the Oscillatory State of Thermocapillary Convection in Floating Zone under Low Gravity*, Acta Astronautica, vol. 9, No. 4, p. 265-273.

SCHWABE, D., SCHARMANN, A., PREISSER, F. (1979) *Steady and Oscillatory Marangoni Convection in Floating Zone under 1-g*, in Proc. 3rd european Symposium on Material Science in Space, Grenoble (France).

SCHWABE, D., VELTEN, R., SCHARMANN, A. (1990) *The Instability of Surface Tension Driven Flow in Models for Floating Zones under Normal and Reduced Gravity*, Acta Astronautica, vol. 99, p. 1258-1264.

SHEN, Y., NEITZEL, G.P., JANKOWSKI, D.F., MITTELMANN, H.D. (1990) *Energy Stability of Thermocapillary Convection in a Model of the Float-Zone Crystal Growth Process*, J.Fluid Mech. vol. 217, 639.

SLAVCHEV, S.G., KOJUKHAROVA, J.D. (1984) *Computer Simulation of Convection in Floating Zone Melting*, Arch. Mech., vol. 36, p. 241-250.

SMITH, M. K., DAVIS, S. H. (1983a) *Instabilities of Dynamic Thermocapillary Liquid Layers. Part 1. Convective Instabilities* J.Fluid Mech. vol. 132, p 119-144.

SMITH, M. K., DAVIS, S. H. (1983b) *Instabilities of Dynamic Thermocapillary Liquid Layers. Part 2. Surface-Wave Instabilities* J.Fluid Mech. vol. 132, pp 145-162.

SMITH, M. K (1986) *Instabilities Mechanisms in Dynamic Thermocapillary Liquid Layers* Phys. Fluids, vol. 29, p 3182-3186.

SMITH, M. K (1988) *The nonlinear Stability of Dynamic Thermocapillary Liquid Layers*. J.Fluid Mech. vol.194, p 391-415.

TAKAO., A. (1985) *Crystal Fabrication*, in VLSI Electronics Microstructure Sciences, vol.12, Ed. N.G. Einspruch & H. Huff, Academic Press, New York, USA.

VARGAS, M., OSTRACH,S., KAMOTANI, Y. (1982) *Surface Tension Driven Convection in Simulated Floating Zone Configuration*, Rpt., Case Western Reserve University.

VELTEN, R., SCHWABE, D., SCHARMANN, A. (1990) *Gravity-Dependence of the Instability of Surface-Tension-Driven Flow in Floating Zones*, Proc. 7th European Symposium on Materials and Fluid Sciences in Microgravity, ESA SP-295.

WAGNER, C., FRIEDRICH, R. (1994) *Comments on the Numerical Investigation of Rayleigh and Marangoni Convection in a Vertical Circular Cylinder*. Phys. Fluids vol. 6, p. 1425.

WILCOX, W. R. (1991) *Floating Zone Melting of Electronic Materials in Space*, Proc. 29th AIAA Conf., Paper No. AIAA-91-0507.

WIDNALL ET TSAI (1977) *The Instability of the Thin Vortex Ring of Constant Vorticity* Proceeding . R. Soc. Londres A287.

XU, J.J., DAVIS, S. H. (1983) *Liquid Bridges with Thermocapillarities*. Phys. Fluids vol. 26, p. 2880-2886

XU, J.J., DAVIS, S.H (1984) *Convective Thermocapillary Instabilities in Liquid Bridges*, Phys. Fluid, vol. 27, No. 5, p. 1102-1107.

YUAN, S. W. (1967) *Foundations of Fluid Mechanics*, Prentice-Hall.